

두 개의 유연 링크로 이루어진 2차원 구조물의 동적 모델링 및 실험

Dynamic Modeling of Planar System Consisting of Two Flexible Links and Experiment

최민섭* · 곽문규†

Min S. Choi and Moon K. Kwak

(Received October 5, 2016 ; Revised November 23, 2016 ; Accepted November 23, 2016)

Key Words : Flexible Link Structure(유연 링크 구조물), Flexible Multibody System(유연 다물체 구조물)

ABSTRACT

This research is concerned with the experimental investigation on the vibrations of a flexible two-link system for verifying the theoretical result from simplified equations of motion for the system along with the kinematical synthesis are proposed to simulate the elastic vibrations of a previous study. The structure consists of flexible two-links; The link 2 is attached to the end of the link 1. The link 1 is made of composite fiber reinforced polymer and the link 2 is an aluminum beam. In order to verify the theoretical result, a flexible two-link system operated by the AC and RC servo motors was constructed. Experimental results show that the dynamic modeling approach and the kinematical synthesis proposed in this paper are effective.

1. 서 론

우주개발이 진행되면서 경량 우주 구조물의 능동 진동제어에 관한 연구가 활발해지기 시작하였다. 이는 우주개발에 따라 우주선, 인공위성을 원하는 지구궤도로 올리거나 우주로 보내기 위해서 우주발사체 기술 개발과 함께 물체의 무게를 줄여야 하기 때문이다. 이를 위해 본체나 탑재 기기는 소형화 및 경량화하여 제작되는데 이렇게 제작된 인공위성의 안테나, 로봇팔 등 경량 우주 구조물은 우주공간에서 위치를 수정하거나 자세를 바꾸어야 하는 경우 미세한 움직임에도 진동에 취약하게 된다. 이처럼

경량 우주 구조물의 특성상 진동 문제가 발생하기 때문에 이를 억제하기 위하여 진동 제어에 관한 연구의 필요성이 증가하였다. 이러한 구조물의 동적 해석에 대해 직면한 가장 공통적인 문제는 어떻게 운동방정식을 효율적으로 유도하느냐는 것이다.

이와 같은 3차원 공간상에서 운동하는 구조물에 대해 동적 해석을 위해 준좌표계(quasi-coordinates)를 사용하는 것이 Meirovitch⁽¹⁾에 의해 제안되었다. 회전하는 유연한 우주 구조물의 경우에 강체운동과 탄성진동이 연성되어 나타나는데 강체운동과 탄성진동을 동시에 해석하는 것은 하나의 유연체 일지라도 다루기 어렵다. 일반적으로 유연 부속물이 있는 강체 또는 유연체를 위한 결합된 운동방정식은

† Corresponding Author; Member, Department of Mechanical, Robotics and Energy Engineering, Dongguk University
E-mail : Kwakm@dongguk.edu

* Member, Department of Mechanical Engineering, Graduate School of Dongguk University

A part of this paper was presented and selected as one of best papers at the KSNVE 2015 Annual Autumn Conference

‡ Recommended by Editor Jae Hung Han

© The Korean Society for Noise and Vibration Engineering

Grote⁽²⁾와 Likins⁽³⁾와 같이 매우 복잡한 표현식들을 가지고 있다.

그래서 Meirovitch and Nelson⁽⁴⁾은 강체 병진운동과 회전운동을 상미분방정식으로 탄성진동을 편미분방정식으로 분리하여 준좌표계에 대한 라그랑지 운동방정식을 최초로 유도하게 되었다. 이때 강체운동의 영향으로 운동방정식은 비선형이 됨을 해결하기 위해 Meirovitch 등은 섭동법을 적용하였다⁽⁵⁻⁷⁾.

이와 같이 유도된 상미분과 편미분 방정식이 뒤섞인 형태는 수치적으로 계산하기 적합하지 않으므로 가정모드법을 도입하여 이산화한 운동방정식에 다시 섭동법을 적용하여 선형 운동방정식을 유도하였다⁽⁸⁻¹⁴⁾. 앞서 제안된 방식을 이용함에도 불구하고 유도과정이 복잡해짐에 따라 준좌표계 관점에서 라그랑지 방정식에 직접 섭동법을 응용하여 매우 복잡한 유도과정을 단순화하여 수치해석 프로그램에 적합한 행렬식 형태의 운동방정식을 유도하였다⁽¹⁵⁾. 그리고 일반적인 조종 문제를 다루기 위해서 오일러 파라미터들을 포함하여 결과를 더 확장하였다⁽¹⁶⁾. 이 연구⁽¹⁶⁾는 강체운동을 표현하는 0차 운동방정식과 섭동된 강체운동과 탄성진동을 표현하는 1차 운동방정식으로 표현할 수 있었다. 유연 다물체 시스템을 위한 기구학적인 합성은 Kwak 등⁽¹⁷⁾에 의해 수행되었다.

선행연구에서 살펴본 바와 같이 현재까지의 유연 다물체에 대한 연구는 주로 정확한 모델링에 관한 연구가 많은 부분을 차지하고 있으며, 해석적 모델의 타당성에 대한 실험적인 연구는 거의 없는 실정이다. 그만큼 이 분야에 대한 실험은 실험 그 자체가 매우 까다로우며 특히 회전과 관련된 실험이 매우 어려운 분야라고 말할 수 있다. 게다가 경량 우주 구조물 중 두 개의 링크 구조물에 대한 실험이 지상에서 용이하지 않다.

이 연구는 선행연구에서 3차원 유연 다물체 구조물에 대해 유도된 운동방정식을 이용해 2차원 평면운동을 하는 유연 다물체 구조물의 운동방정식을 새롭게 유도하였다. 그리고 동적 모델의 타당성을 입증하기 위해 두 개의 유연 링크 구조물을 고려하였다. 각 유연 링크의 회전각도는 모터 제어에 의해 사전에 정의될 수 있다고 가정하였다. 수치계산 결과의 타당성 검증을 위해 실험 장치를 설계 제작하였다. 실험 결과는 이론 결과와 유사하게 나타나 이

론 모델의 유효성을 확인할 수 있었다.

2. 2차원 단일 유연체의 운동방정식 유도

이 연구에서는 먼저 Fig. 1에서 보이는 것과 같은 2차원 평면상에서 움직이는 단일 유연체의 운동방정식을 유도하였다. 평면 공간상의 유연체의 운동을 설명하기 위해서 공간상에 고정된 X, Y축과 유연체와 같이 회전하는 국부좌표 x, y축을 사용한다.

Fig. 1의 p점의 변위벡터는 식 (1)로 표현된다.

$$\mathbf{W} = \mathbf{R} + \mathbf{r} + \mathbf{u} \tag{1}$$

여기서 $\mathbf{R} = [R_x \ R_y]^T$ 은 원점O에서 국부좌표계의 원점o까지의 위치벡터, $\mathbf{r} = [r \ 0]^T$ 은 원점o부터 x위치까지의 위치벡터이고, $\mathbf{u} = [0 \ u]^T$ 은 x위치에서 탄성 변위를 나타낸다.

동적에너지를 구하기 위해서는 식 (1)로 주어진 위치벡터를 시간에 대해 미분해 속도벡터를 유도해야 한다. 속도벡터는 식 (2)와 같이 유도된다.

$$\dot{\mathbf{W}} = \mathbf{V} + (\mathbf{I}_y x - \mathbf{I}_x u)\omega + \mathbf{I}_y \dot{u} \tag{2}$$

여기서 $\mathbf{V} = [V_x \ V_y]^T$ 는 원점 o의 속도벡터, ω 는 물체의 각속도를 나타내고 \mathbf{I}_x 와 \mathbf{I}_y 는 다음과 같다.

$$\mathbf{I}_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3a,b}$$

이 연구에서는 수치해석을 위해 탄성변위 $u(x, t)$ 를 가정모드법을 도입해 다음과 같이 이산화해서 표

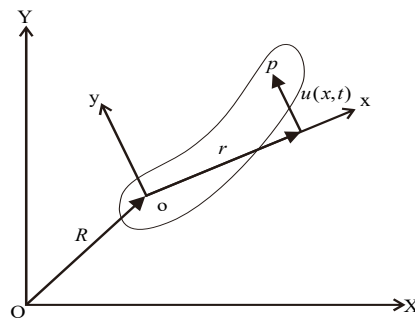


Fig. 1 Coordinates for the motion of a planar flexible beam

현한다.

$$u(x, t) = \Phi(x)q(t) \tag{4}$$

여기서 $\Phi(x)$ 는 허용함수 벡터, $q(t)$ 는 일반좌표계를 나타낸다.

식 (2)에 식 (4)를 대입하면 속도벡터가 다음과 같이 표현된다.

$$\dot{W} = V + (I_{y,x} - I_x \Phi q) \omega + I_y \Phi p \tag{5}$$

여기서 $p = \dot{q}$ 이다.

이때 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^L \dot{W} \cdot \dot{W} dx \tag{6}$$

식 (5)를 식 (6)에 대입하면 운동에너지가 다음과 같이 표현된다.

$$T = \frac{1}{2} x^T M x \tag{7}$$

여기서

$$x = [V \ \omega \ p]^T \tag{8a}$$

$$M = \begin{bmatrix} mI & I_y S_x - I_x \bar{\Phi} q & I_y \bar{\Phi} \\ I_y^T S_x - q^T \bar{\Phi}^T I_x^T & J_x + q^T M_b q & \bar{\Phi} \\ \bar{\Phi}^T I_y^T & \bar{\Phi}^T & M_b \end{bmatrix} \tag{8b}$$

이다. m 은 질량을 나타내며, S_x 는 점 o 에 대한 첫 번째 질량 모멘트, J_x 는 관성질량 모멘트를 나타낸다. 그리고 $\bar{\Phi}$, $\bar{\Phi}$, M_b 는 다음과 같다.

$$\bar{\Phi} = \int_0^L \bar{m} \Phi dx, \quad \bar{\Phi} = \int_0^L \bar{m} \Phi dx \tag{9a,b}$$

$$M_b = \int_0^L \bar{m} \Phi^T \Phi dx \tag{9c}$$

여기서 \bar{m} 은 단위길이당 질량을 나타내며, L 은 보의 길이를 나타낸다.

단일 유연체의 운동은 0차의 강체운동과 1차의 섭동된 강체운동과 탄성진동으로 구성된다고 가정하는 섭동법을 사용한다. 위 식 (8a)에 섭동법⁽⁶⁾을 적용하면 0차의 강체 병진운동과 각운동, 그리고 1차

의 섭동된 강체 병진운동과 각운동, 탄성진동으로 나눌 수 있다.

$$x = x_0 + x_1 \tag{10}$$

여기서

$$x_0 = [V_0 \ \omega_0 \ 0]^T, \quad x_1 = [V_1 \ \omega_1 \ p]^T \tag{11a,b}$$

이다. 그리고 $V_0 = [V_{0x} \ V_{0y}]^T$ 는 0차 속도벡터, $V_1 = [V_{1x} \ V_{1y}]^T$ 는 1차 속도벡터, ω_0 , ω_1 은 0차와 1차의 각속도이다.

식 (11)에서 알 수 있듯이 병진속도가 0차와 1차로 구성되고, 각속도도 0차와 1차로 구성된다고 가정하였다. 또한 탄성변위와 속도는 작다고 가정하여 1차 성분으로 취급하였다. 식 (10)을 이용하면, 운동에너지가 다음과 같이 0차, 1차, 2차 운동에너지로 구성된다고 말할 수 있다.

$$T = T_0 + T_1 + T_2 \tag{12}$$

여기서 0차, 1차, 2차 운동에너지는 다음과 같다.

$$T_0 = \frac{1}{2} x_0^T M_0 x_0 \tag{13a}$$

$$T_1 = x_0^T M_0 x_1 + \frac{1}{2} x_0^T M_1 x_0 \tag{13b}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} x_1^T M_0 x_1 + \frac{1}{2} x_0^T M_2 x_0 + x_0^T M_1 x_1 \tag{13c}$$

여기서 M_0 , M_1 , M_2 는 다음과 같다.

$$M_0 = \begin{bmatrix} mI & I_y S_x & I_y \bar{\Phi} \\ I_y^T S_x & J_x & \bar{\Phi} \\ \bar{\Phi}^T I_y^T & \bar{\Phi}^T & M_b \end{bmatrix} \tag{14a}$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & -I_x \bar{\Phi} q & 0 \\ -q^T \bar{\Phi}^T I_x^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14b}$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^T M_b q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14c}$$

그리고 단일 유연체에 대한 탄성에너지를 구하면 다음과 같이 표현되며 특성상 2차의 에너지가 된다.

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K}_b \mathbf{q} = V_2 \tag{15}$$

여기서

$$\mathbf{K}_b = \int_0^L EI \frac{d^2 \Phi^T}{dx^2} \frac{d^2 \Phi}{dx^2} dx \tag{16}$$

이다. 그리고 EI 는 굽힘모멘트 강성을 나타낸다.

라그랑지 방정식에 위에서 유도한 에너지 식들을 사용하고 Kwak 등⁽¹⁵⁾이 유도했던 운동방정식을 이용하면 다음과 같이 2차원 운동에 대한 간략화된 운동방정식이 유도된다. 강체운동을 나타내는 0차의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{V}_0} \right) + \omega_0 \tilde{\mathbf{I}} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{V}_0} \right) = \mathbf{F}_0 \tag{17}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \omega_0} \right) - \mathbf{V}_0^T \tilde{\mathbf{I}} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{V}_0} \right) = M_0 \tag{18}$$

여기서 $L_0 = T_0$ 가 되고, M_0 는 0차 모멘트, ω_0 는 0차 각속도를 나타내고 $\tilde{\mathbf{I}}$ 는 다음과 같다.

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{19}$$

1차의 섭동 강체운동과 탄성진동에 대한 운동방정식은 다음과 같다.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{V}_0} \right) + \omega_0 \tilde{\mathbf{I}} \left(\frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{V}_0} \right) + \omega_1 \tilde{\mathbf{I}} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{V}_0} \right) = \mathbf{F}_1 \tag{20}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_1}{\partial \omega_0} \right) - \mathbf{V}_0^T \tilde{\mathbf{I}} \left(\frac{\partial L_1}{\partial \mathbf{V}_0} \right) - \mathbf{V}_0^T \tilde{\mathbf{I}} \left(\frac{\partial L_0}{\partial \mathbf{V}_0} \right) = M_1 \tag{21}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (L_1 + L_2)}{\partial \dot{\mathbf{p}}} \right) - \frac{\partial (L_1 + L_2)}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \tag{22}$$

여기서 $L_1 = T_1$, $L_2 = T_2 - V_2$ 이며 \mathbf{F}_1 은 1차 힘 벡터, M_1 은 1차 모멘트, \mathbf{Q} 는 탄성진동을 위한 일반 힘 벡터를 나타낸다.

식 (17)과 식 (18)로부터 0차와 1차의 운동방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{bmatrix} m\mathbf{I} & \mathbf{I}_y \mathbf{S}_x \\ \mathbf{I}_y^T \mathbf{S}_x & \mathbf{J}_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{V}}_0 \\ \dot{\omega}_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_0 m \tilde{\mathbf{I}} & -\omega_0 \mathbf{I}_x \mathbf{S}_x \\ -\mathbf{V}_0^T m \tilde{\mathbf{I}} & \mathbf{V}_0^T \mathbf{I}_x \mathbf{S}_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_0 \\ \omega_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_0 \\ \mathbf{M}_0 \end{Bmatrix} \tag{23}$$

$$\mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{x}}_1 + \mathbf{G}_2 \mathbf{x}_1 + \mathbf{K}_2 \mathbf{y}_1 = \mathbf{d}_2 + \mathbf{F}_2 \tag{24}$$

여기서 \mathbf{M}_2 , \mathbf{G}_2 , \mathbf{K}_2 , \mathbf{d}_2 , \mathbf{F}_2 , \mathbf{y}_2 는 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} m\mathbf{I} & \mathbf{S}_x \mathbf{I}_y & \mathbf{I}_y \bar{\Phi} \\ \mathbf{S}_x \mathbf{I}_y^T & \mathbf{J}_x & \bar{\Phi} \\ \bar{\Phi}^T \mathbf{I}_y^T & \bar{\Phi}^T & \mathbf{M}_b \end{bmatrix} \tag{25a}$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} m\omega_0 \tilde{\mathbf{I}} & m\tilde{\mathbf{I}} \mathbf{V}_0 - 2\mathbf{S}_x \omega_0 \mathbf{I}_x & -2\omega_0 \mathbf{I}_x \bar{\Phi} \\ \mathbf{S}_x \omega_0 \mathbf{I}_x^T & \mathbf{S}_x \mathbf{V}_0^T \mathbf{I}_x & 0 \\ \omega_0 \bar{\Phi}^T \mathbf{I}_x^T & \bar{\Phi}^T \mathbf{I}_x^T \mathbf{V}_0 & 0 \end{bmatrix} \tag{25b}$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -(\dot{\omega}_0 \mathbf{I}_x + \omega_0^2 \mathbf{I}_y) \bar{\Phi} \\ 0 & 0 & (\omega_0 \mathbf{V}_0 \mathbf{I}_y + \dot{\mathbf{V}}_0^T \mathbf{I}_x) \bar{\Phi} \\ 0 & 0 & (\mathbf{K}_b - \omega_0^2 \mathbf{M}_b) \end{bmatrix} \tag{25c}$$

$$\mathbf{d}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\bar{\Phi}^T \mathbf{I}_y^T \dot{\mathbf{V}}_0 - \bar{\Phi}^T \dot{\omega}_0 - \omega_0 \bar{\Phi}^T \mathbf{I}_x^T \mathbf{V}_0 \end{bmatrix} \tag{25d}$$

$$\mathbf{F}_2 = [\mathbf{F}_1 \quad M_1 \quad \mathbf{Q}]^T \tag{25e}$$

$$\mathbf{y}_2 = [0 \quad 0 \quad \mathbf{q}_2]^T \tag{25f}$$

3. 두 개의 유연 링크로 이루어진 이차원 구조물의 통합 운동방정식 유도

앞에서 유도한 단일 유연체에 대한 운동방정식을 이용해 Fig. 2와 같이 두 개의 유연 링크로 이루어진 구조물의 통합 운동방정식을 유도해 보자. Fig. 2에서 β_1 은 1번 링크가 X축에 대한 회전각도 θ 를 나타내며, β_2 는 2번 링크의 1번 링크에 대한 상대 회전각도를 나타낸다. 그림에서 보이는 것처럼 2번

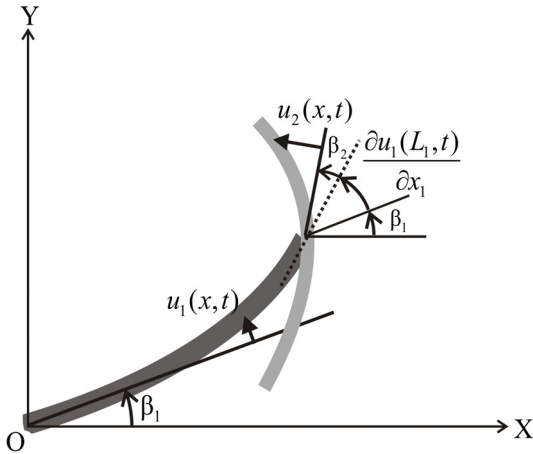


Fig. 2 Kinematical synthesis for a planar two-flexible link

링크의 최종 회전각도 θ_2 는 $\beta_1 + \frac{\partial u_1(L_1, t)}{\partial x_1} + \beta_2$ 가 된다. 각 링크의 회전각 β_1, β_2 는 모터 제어기에 의해 정확하게 제어된다고 가정한다. 즉 각도 변위가 미리 정의된다고 가정한다. 또한 각각의 탄성변위는 단일 유연체의 경우와 동일하게 가정모드법을 사용해 다음과 같이 표현한다.

$$u_1(x, t) = \Phi_1(x) \mathbf{q}_1(t) \tag{26a}$$

$$u_2(x, t) = \Phi_2(x) \mathbf{q}_2(t) \tag{26b}$$

1번 링크가 점 O를 기준으로 미리 정해진 회전운동을 하기 때문에 1번 링크의 0차 운동방정식은 없고 오직 탄성진동과 관련된 1차 운동방정식만 남게 된다. $\omega_{10} = \dot{\beta}_1$ 가 되고, 따라서 1번 링크의 1차 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{M}_{b1} \dot{\mathbf{p}}_1 + (\mathbf{K}_{b1} - \dot{\beta}_1^2 \mathbf{M}_{b1}) \mathbf{q}_1 = -\tilde{\Phi}_1^T \ddot{\beta}_1 + \mathbf{Q}_1 \tag{27}$$

추가적인 아래첨자 숫자는 링크 번호를 나타낸다.

또한 2번 링크에 대해서도 강체 병진운동과 회전운동은 1번과 2번 링크의 회전 운동에 의해 다음과 같이 표현된다.

$$\mathbf{V}_{20} = L_1 \dot{\beta}_1 \begin{bmatrix} \sin \beta_2 \\ \cos \beta_2 \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$\omega_{20} = \dot{\beta}_1 + \dot{\beta}_2 \tag{29}$$

따라서 2번 링크의 1차 운동방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{x}}_{21} + \mathbf{G}_2 \mathbf{x}_{21} + \mathbf{K}_2 \mathbf{y}_{21} = \mathbf{d}_2 + \mathbf{F}_2 \tag{30}$$

여기서 $\mathbf{x}_{21}, \mathbf{y}_{21}, \mathbf{G}_2, \mathbf{K}_2, \mathbf{d}_2$ 는 다음과 같이 나타낸다.

$$\mathbf{x}_{21} = \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{21} \\ \omega_{21} \\ \mathbf{p}_2 \end{Bmatrix}, \mathbf{y}_{21} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{q}_2 \end{Bmatrix} \tag{31a,b}$$

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{G}(\mathbf{V}_{20}, \omega_{20}) \tag{31c}$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}(\dot{\omega}_{20}, \omega_{20}) \tag{31d}$$

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{d}(\dot{\mathbf{V}}_{20}, \mathbf{V}_{20}, \dot{\omega}_{20}, \omega_{20}) \tag{31e}$$

2번 링크의 접동 병진 속도와 각속도, 1번 링크와 2번 링크의 강체운동과 탄성 변위에 의해 통합 운동방정식이 결정된다. 2번 링크의 접동변위벡터와 두 링크의 탄성변위벡터는 다음 관계식으로 표현된다.

$$\dot{\mathbf{x}}_{21} = \mathbf{T}_a \dot{\mathbf{z}} + \mathbf{T}_b \mathbf{z}, \mathbf{y}_{21} = \mathbf{T}_c \mathbf{z} \tag{32a,b}$$

여기서 $\mathbf{z}, \mathbf{T}_a, \dot{\mathbf{T}}_a, \mathbf{T}_b, \dot{\mathbf{T}}_b, \mathbf{T}_c$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^T & \mathbf{q}_2^T \end{bmatrix}^T \tag{33a}$$

$$\mathbf{T}_a = \begin{bmatrix} \sin \beta_2 \Phi_{1L} & \mathbf{0}_{1n} \\ \cos \beta_2 \Phi_{1L} & \mathbf{0}_{1n} \\ \Phi'_{1L} & \mathbf{0}_{1n} \\ \mathbf{0}_{nn} & \mathbf{0}_{nn} \end{bmatrix} \tag{33b}$$

$$\dot{\mathbf{T}}_a = \begin{bmatrix} \dot{\beta}_2 \cos \beta_2 \Phi_{1L} & 0 \\ -\dot{\beta}_2 \sin \beta_2 \Phi_{1L} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{33c}$$

$$\mathbf{T}_b = \begin{bmatrix} \dot{\beta}_1 \cos \beta_2 (\mathbf{L}_1 \Phi'_{1L} - \Phi_{1L}) & 0 \\ -\dot{\beta}_1 \sin \beta_2 (\mathbf{L}_1 \Phi'_{1L} - \Phi_{1L}) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{33d}$$

$$\dot{\mathbf{T}}_b = \begin{bmatrix} (\dot{\beta}_1 \cos \beta_2 - \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \sin \beta_2)(L_1 \Phi'_{1L} - \Phi_{1L}) & 0 \\ (-\dot{\beta}_1 \sin \beta_2 - \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 \cos \beta_2)(L_1 \Phi'_{1L} - \Phi_{1L}) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (33e)$$

$$\mathbf{T}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3n} & \mathbf{0}_{3n} \\ \mathbf{0}_{mn} & \mathbf{0}_{mn} \end{bmatrix} \quad (33f)$$

식 (32)를 이용하면 2번 링크에 대한 1차의 운동 방정식을 변환해 전체 좌표계인 z에 대한 운동방정 식으로 다음과 같이 변환할 수 있다.

$$\mathbf{T}_a^T \mathbf{M}_2 \ddot{\mathbf{z}} + [\mathbf{T}_a^T \mathbf{M}_2 (\mathbf{T}_b + \dot{\mathbf{T}}_a) + \mathbf{T}_a^T \mathbf{G}_2 \mathbf{T}_a] \dot{\mathbf{z}} + [\mathbf{T}_a^T \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{T}}_b + \mathbf{T}_a^T \mathbf{G}_2 \mathbf{T}_b + \mathbf{T}_a^T \mathbf{K}_2 \mathbf{T}_c] \mathbf{z} = \mathbf{T}_a^T (\mathbf{d}_2 + \mathbf{F}_2) \quad (34)$$

식 (27)을 식 (34)와 통합하면 전체 구조물에 대한 통합 운동방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} & (\mathbf{T}_u^T \mathbf{M}_{b1} \mathbf{T}_u + \mathbf{T}_a^T \mathbf{M}_2 \mathbf{T}_a) \ddot{\mathbf{z}} \\ & + [\mathbf{T}_a^T \mathbf{M}_2 (\mathbf{T}_b + \dot{\mathbf{T}}_a) + \mathbf{T}_a^T \mathbf{G}_2 \mathbf{T}_a] \dot{\mathbf{z}} \\ & + \left[\mathbf{T}_u^T (\mathbf{K}_{b1} - \dot{\beta}_1^2 \mathbf{M}_{b1}) \mathbf{T}_u + \mathbf{T}_a^T \mathbf{M}_2 \dot{\mathbf{T}}_b \right. \\ & \left. + [\mathbf{T}_a^T \mathbf{G}_2 \mathbf{T}_b + \mathbf{T}_a^T \mathbf{K}_2 \mathbf{T}_c] \right] \mathbf{z} \\ & = -\mathbf{T}_u^T \ddot{\Phi}_1 \dot{\beta}_1 + \mathbf{T}_a^T \mathbf{d}_2 + \mathbf{T}_u^T \mathbf{Q}_1 + \mathbf{T}_a^T \mathbf{F}_2 \end{aligned} \quad (35)$$

여기서 $\mathbf{T}_u = [\mathbf{I}_{mn} \quad \mathbf{0}_{mn}]$ 이다.

식 (35)를 사용하면 각 링크의 회전각도가 제어되는 두 개의 유연 링크 시스템의 진동에 대한 동적 해석이 가능해진다.

4. 실험장치 구성

앞에서 유도한 두 개의 유연 링크 시스템을 구현 하기 위해 Fig. 3과 같은 유연 링크 장치를 설계 제작하였다. 그림에서 보이는 바와 같이 두 개의 링크 구조물은 복합재 보인 1번 링크와 알루미늄 보인 2번 링크로 이루어져 있으며 T자 형태를 가지고 있다. 2번 링크를 한쪽 방향으로의 링크로 할 경우 질량 중심이 회전축에서 벗어나 있어 비틀림 진동을 유발하게 된다. 앞서 유도된 운동방정식에서 비틀림 진동이 발생하지 않는다고 가정하였으므로 이를 보완하기 위해 T자 형태의 구조물을 고려하였으며, 이

경우 2번 링크의 질량이 회전축 상에 놓이게 되어 비틀림 진동을 최소화 할 수 있게 된다. 이와 같은 구조는 여러 형태의 유연 링크 구조물 실험을 통해 고안된 형태이다.

Fig. 4에 보이는 바와 같이, 1번 링크는 AC 서보 모터에 의해 회전각 (β_1)이 제어된다. 2번 링크는 RC 서보모터에 의해 회전각 (β_2)이 제어된다.

1번 링크의 진동은 끝 단에 설치한 가속도계를 이용해 계측하였고 2번 링크의 진동은 표면에 부착한 PZT 센서를 이용해 계측하였다. 이 구조물에 대한 물성치는 Table 1과 같다.

앞에서 소개한 유연 링크 시스템의 모터 제어기와 센서들을 Fig. 5와 같이 dSpace사의 DS1104와 연결하였다. 1번 링크의 회전운동은 Mitsubishi사의 AC 서보모터(HC-KFS23)와 서보모터 드라이버(MR-J2S-20A)를 사용하여 속도모드 방식으로 제어 하였다. 2번 링크의 회전운동은 동부로봇사의 RC 서보모터(DRS-0201)와 mbed사의 마이크로컨트롤러(LPC1768)를 이용하여 제어하였다.

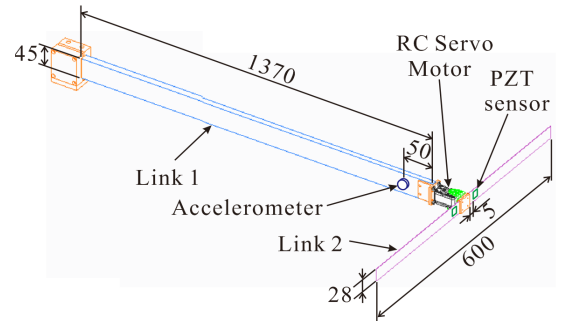


Fig. 3 3-D model of two flexible link system

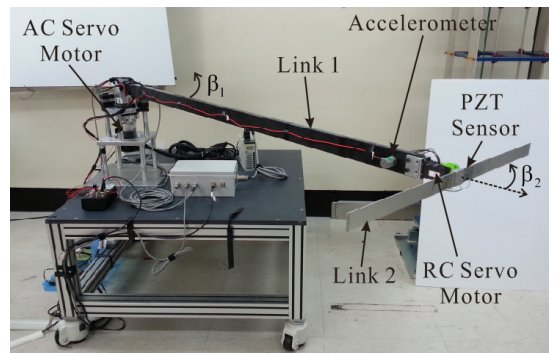


Fig. 4 Flexible two-link test bed

두 개의 유연 링크로 이루어진 시스템에 대한 실험 연구는 현재까지 국내외적으로 수행된 적이 없다. 또한, 이론 연구 결과의 타당성을 실험으로 증명한 연구 결과도 없다. 앞에서 유도한 유연 다물체에 대한 동적 모델의 타당성을 입증하기 위해서는 실험에 의한 입증이 반드시 필요한데 이 연구실에서는 실험 장치 구성을 위해 다양한 시도를 하였다. 회전각을 만들어내기 위해 DC모터와 BLDC모터를 이용해 보았으나 우리가 원하는 각도 제어를 얻을 수 없었다.

Fig. 6은 유연 링크 시스템의 모터 제어를 위한 Simulink block diagram을 보여준다. 1번 링크를 제

어하기 위해 AC 서보모터를 사용하여 속도모드 방식으로 $\pm 10\text{ V}$ 출력과 PID제어($P = 5, I = 0, D = 0.005$)를 이용하였다. 이와 동시에 2번 링크를 제어하기 위해 Switch블록을 통해 RC 서보모터의 구동 신호가 출력된다.

이 신호는 마이크로컨트롤러에 입력되어 두 개의

Table 1 Parameters of two flexible link system

Parameters	Numerical value
Link 1	$14 \times 45 \times 1370\text{ mm}$
Link 2	$1 \times 28 \times 600\text{ mm}$
Tip mass	0.129 kg
Mass per unit length of link 1	0.5292 kg/m
Mass per unit length of link 2	0.0636 kg/m
Damping factor of link 1	0.02
Damping factor of link 2	0.01
Piezo sensor size	$25 \times 30\text{ mm}$
Young's modulus of piezo	30.33 GPa
Piezo strain constants(d31)	$265 \times 10^{-12}\text{ m/V}$

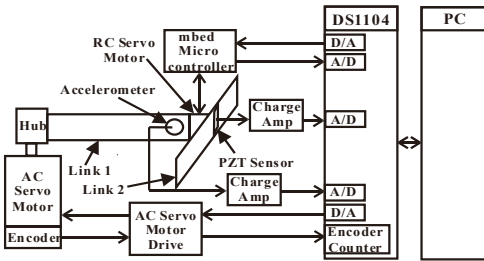


Fig. 5 Schematic diagram for flexible two-link system

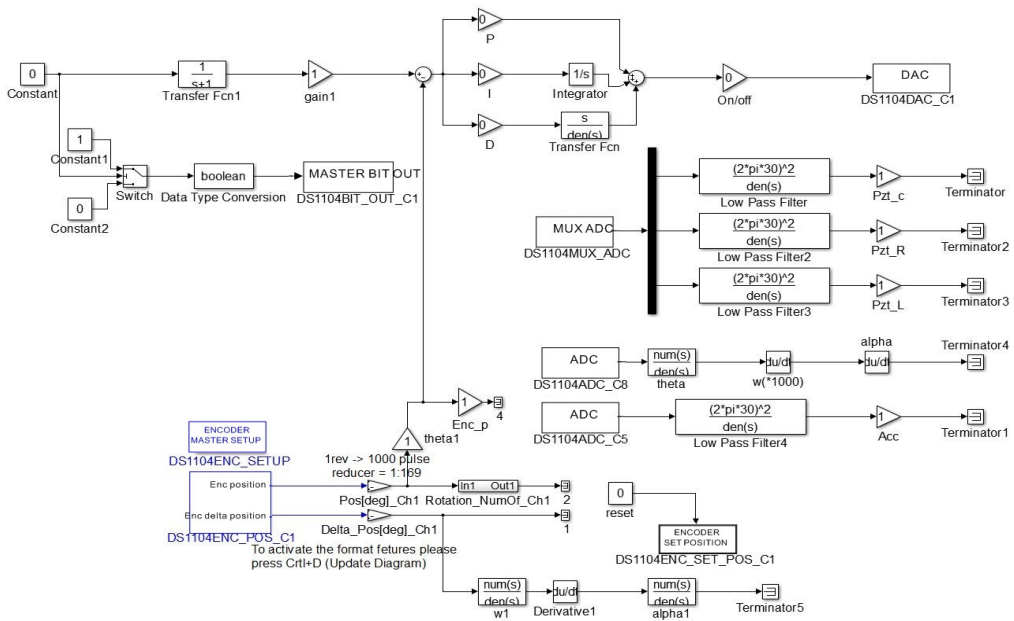


Fig. 6 Simulink block diagram

링크가 동시에 제어된다. 이와 같이 두 개의 링크가 회전함에 따라 발생하는 1번 링크의 회전각은 AC 서보모터의 엔코더 신호로 계측하였으며 진동은 가속도계를 이용하여 계측하였다. 그리고 2번 링크의 회전각은 RC 서보모터의 포텐서미터 신호로 계측하였으며 진동은 PZT 센서를 부착하여 계측하였다. 이때 포텐서미터에서 발생하는 신호는 low pass filter (30 Hz)를 적용하여 낮은 주파수의 노이즈를 제거하였다.

5. 수치모사 및 실험과의 비교

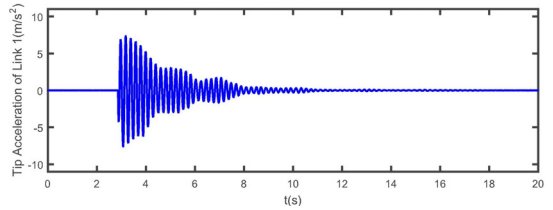
앞에서 유도한 통합운동방정식 식 (35)를 이용해 두 개의 유연 링크에 대한 동적 수치모사를 수행하였다. 수치해석에서 두 링크의 회전각도에 대한 정보가 필요한데 이 연구에서는 두 링크가 다음과 같은 회전각을 추적하도록 제어를 적용하였다.

Fig. 7에서 보이는 바와 같이 1번 링크는 회전각도 β_1 을 0°에서 90°로 회전시키고 이와 동시에 2번 링크 회전각도 β_2 를 90°에서 170°로 회전시켰다. 이때의 각도변위는 AC 서보모터와 RC 서보모터의 엔코더와 포텐서미터에 의해 각각 계측되었으며, Fig. 6은 계측 결과를 보여준다.

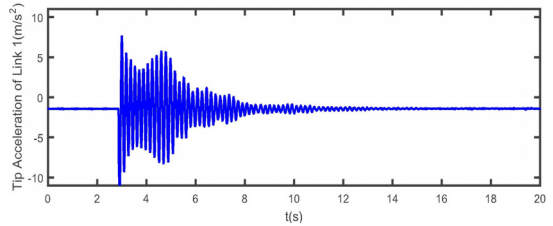
Fig. 8과 Fig. 9는 이 경우 발생하는 각 링크의 진동에 대한 이론 예측 결과와 계측된 실험 결과를 보

여주고 있다. 1번 링크에 부착된 가속도계의 값을 이론적으로 계산하기 위해 먼저 가속도 위치의 변위를 계산하고 이를 수치적으로 두 번 미분하여 가속도를 산정하였다. 2번 링크에 부착된 PZT 센서 값을 계산하기 위해 먼저 2번 링크의 진동 변위를 계측하고 이를 다음 pin-force 식을 이용해 산정하였다.

$$v_p = \frac{1}{C_c} w_p E_p d_{31} \frac{t_2}{2} \frac{1}{L_2} [\Phi'(p_e) - \Phi'(p_s)] \mathbf{q}_2 \quad (37)$$

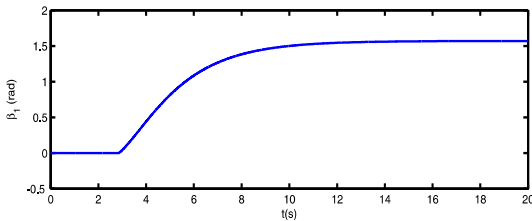


(a) Theory

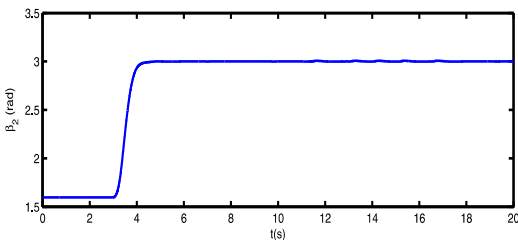


(b) Experiment

Fig. 8 Tip acceleration of the link 1

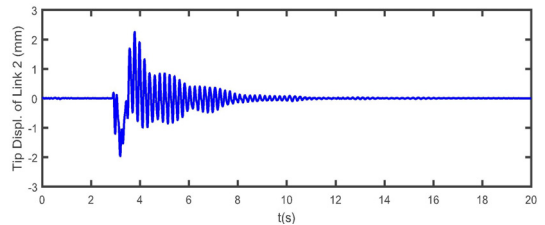


(a) Link 1

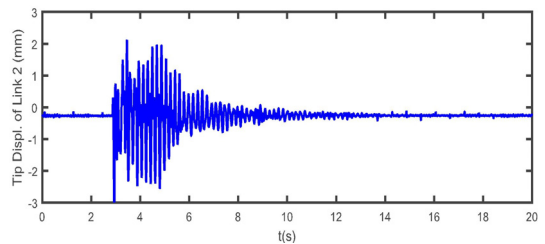


(b) Link 2

Fig. 7 Angular displacement



(a) Theory



(b) Experiment

Fig. 9 Tip displacement of the link 2

여기서 C_c 는 전하앰프의 커패시터 값이고, w_p 는 PZT 센서의 폭, E_p 은 PZT 센서의 young's modulus, d_{31} 는 PZT 센서의 상수값, t_2 는 2번 링크의 두께, L_2 는 2번 링크의 길이로 나타낸다. 그리고 x_{pe} 와 x_{ps} 는 PZT 센서의 시작점과 끝점을 나타내며 p_e 와 p_s 는 다음과 같다.

$$p_e = \frac{x_{pe}}{L_2}, \quad p_s = \frac{x_{ps}}{L_2} \quad (38a,b)$$

Fig. 8과 Fig. 9에서 알 수 있듯이 각 링크의 이론적인 진동 예측값과 실제 계측값이 유사함을 알 수 있다. 이때 Fig. 9(b)에서 초기의 PZT 센서값이 다른 이유는 PZT 센서에 의해 발생한 전하가 전압을 변환될 때 발생하는 현상으로 이론에서 나오는 것과 같은 정적인 값이 실제 나오지 않기 때문이다.

6. 결 론

이 연구는 평면상에서 움직이는 두 개의 유연 링크 구조물의 동적 모델 유도과 이론 모델을 입증할 수 있는 실험 장치의 구현과 관련이 있다. 선행연구에서 제안된 3차원 구조물에 대한 운동방정식을 2차원 평면 운동으로 제한하여 2차원 평면 운동에 대해 유연 다물체 구조물의 운동 방정식을 유도하였다. 그리고 유연 단일체 구조물에 대한 방정식을 이용해 유연 다물체 구조물의 운동방정식을 유도하는 방법을 새롭게 제안하였다.

이차원 평면 운동을 하는 유연 다물체 구조물의 동적 모델에 대한 타당성을 입증하기 위해 두 개의 유연 링크로 이루어진 시스템에 대해 수치계산을 수행하고 그 결과를 입증하기 위해 실험 장치를 제작하였다. 각 링크의 탄성진동을 이론적으로 예측하고 이를 실험값과 비교한 결과 이론 모델이 타당함을 입증할 수 있었다. 따라서 이 연구에서 제안한 이론 모델이 차후 유연 다물체 구조물의 동적 해석에 유용하게 사용될 수 있을 것으로 예상된다.

후 기

이 연구는 2016년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 기초연구사업의 지원을 받아 수행된 연구임(NO. NRF-2015R1D1A1A09057694).

References

- (1) Meirovitch, L., 1970, Method of Analytical Dynamics, McGraw-Hill, New York.
- (2) Grote, P. B., McMunn, J. C. and Gluck, R., 1971, Equations of Motion of Flexible Spacecraft, Journal of Spacecraft and Rockers, Vol. 8, No. 6, pp. 561~567.
- (3) Likins, P. W., 1972, Finite Element Appendage Equations for Hybrid Coordinate Dynamic Analysis, International Journal of Solids and Structures, Vol. 8, No. 5, pp. 709~731.
- (4) Meirovitch, L. and Nelson, H., 1966, On the High-spin Motion of a Satellite Containing Elastic Parts, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 3, No. 11, pp. 1597~1602.
- (5) Meirovitch, L. and R. Quinn, 1987, Equations of Motion for Maneuvering Flexible Spacecraft, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 10, No. 5, pp. 453~465.
- (6) Meirovitch, L. and Kwak, M. K., 1990, Dynamics and Control of Spacecraft with Retargeting Flexible Antennas, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 13, No. 2, pp. 241~248.
- (7) Meirovitch, L., 1991, Hybrid State Equations of Motion for Flexible Bodies in Terms of Quasi-coordinates, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 14, No. 5, pp. 1008~1013.
- (8) Meirovitch, L., 1993, State Equations for Maneuvering and Control of Flexible Bodies Using Quasimomenta, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 16, No. 5, pp. 882~891.
- (9) Meirovitch, L., 1980, Computational Methods in Structural Dynamics, Springer Science & Business Media.
- (10) Kwak, M. K. and Meirovitch, L., 1992, New Approach to the Maneuvering and Control of Flexible Multibody Systems, Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 15, No. 6, pp. 1342~1353.
- (11) Meirovitch, L. and Kwak, M., 1989, State Equations for a Spacecraft with Maneuvering Flexible Appendages in Terms of Quasi-coordinates, Applied Mechanics Reviews, Vol. 42, No. 11, pp. 161~170.

(12) Meirovitch, L. and Kwak, M. K., 1990, Control of Spacecraft with Multi-targeted Flexible Antennas, *Journal of Astronautical Sciences*, Vol. 38, No. 2, pp. 189~199.

(13) Meirovitch, L. and Kwak, M. K., 1992, Control of Flexible Spacecraft with Time-varying Configuration, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol. 15, No. 2, pp. 314~324.

(14) Kwak, M. K. and Nam, S. H., 2001, A Study on the Valid Dynamic Modeling for the Slewing and Vibration Suppression Control of Beam, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 11, No. 2, pp. 292~300.

(15) Kwak, M. K., 2005, Application of Perturbation Method to the Dynamic Analysis of Free-free Beam, *Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering*, Vol. 15, No. 1, pp. 46~52.

(16) Kwak, M. K. and Yang, D.-H., 2013, Dynamic Modeling, Input-shaped Maneuvering and Vibration Suppression of Flexible Body Using Quasi-coordinates and Euler Parameters, *Journal of Mechanical Science and Technology*, Vol. 27, No. 3, pp. 657~671.

(17) Kwak, M. K. and Yang, D.-H., 2013, Dynamic Modeling and Kinematical Synthesis of Flexible Multibody System based on Quasi-coordinates and Euler

Parameters, *Japan-Korea Dynamics and Control Conference*.



Min Seop Choi received B.S. and M.S. degree in Mechanical Engineering from Dongguk University in 2005 and 2016. He worked for the SFA engineering corp. from 2010 to 2013. His research interests are in the area of dynamics and control of flexible multibody system and active vibration control of smart structure.



Moon K. Kwak received B.S. and M.S. degree in Naval Architecture from Seoul National University in 1981 and 1983. He then received his Ph.D. degree from Virginia Tech in 1989. He is currently a Professor at the Department of Mechanical, Robotics and Energy Engineering of Dongguk University in Seoul, Korea. His research interests are in the area of dynamics and control of flexible multibody system and active vibration control of smart structure.