

<http://dx.doi.org/10.7236/JIIBC.2016.16.1.291>

JIIBC 2016-1-39

파형 신호에 대한 다양체 임베딩의 위상학적 불변항의 분석

Analysis of Topological Invariants of Manifold Embedding for Waveform Signals

한희일*

Hee-II Hahn*

요약 본 논문에서는 임의의 주기적인 현상이나 특성은 위상구조와 밀접한 관련이 있음을 추론하고 이를 실험적으로 확인한다. 실험대상으로 주기적 특성이 있는 다양한 악기음을 선택하여 이를 유클리드 공간에 임베딩하고 이로부터 호몰로지 군을 계산하여 위상특성을 분석한다. 이를 위하여, 파형신호에서 추출한 패치모음을 패치 그래프로 구성한 다음, 대표적인 다양체 학습 방식인 통근시간 임베딩 기법을 이용하여 기하구조로 변환한다. 스펙트럼이 시간에 따라 가변적인 파형신호를 통근시간 임베딩할 때, 그에 따라 생성되는 기하구조는 변화하지만 그 신호 고유의 내재된 위상구조는 거의 변하지 않는다. 본 논문에서는 임베딩 데이터의 일부를 표본화하여 단순 복합체를 구성한 다음 이로부터 호몰로지를 계산하여 임베딩 기하구조의 위상특성을 분석하고, 이의 활용방안을 논의한다.

Abstract This paper raises a question of whether a simple periodic phenomenon is associated with the topology and provides the convincing answers to it. A variety of music instrumental sound signals are used to prove our assertion, which are embedded in Euclidean space to analyze their topologies by computing the homology groups. A commute time embedding is employed to transform segments of waveforms into the corresponding geometries, which is implemented by organizing patches according to the graph-based metric. It is shown that commute time embedding generates the intrinsic topological complexities although their geometries are varied according to the spectrums of the signals. This paper employs a persistent homology to determine the topological invariants of the simplicial complexes constructed by randomly sampling the commute time embedding of the waveforms, and discusses their applications.

Key Words : Manifold learning, Commute time embedding, Topological analysis, Persistent homology

1. 서론

위상 공간 또는 거리 공간 상에 존재하는 객체의 특성을 파악하기 위해서는, 우선 그 객체에서 충분히 조밀하

게 데이터들을 수집할 필요가 있다. 이러한 데이터를 처리하기 위한 방법으로 최근에는 이 데이터를 비선형 다양체 위의 점으로 간주하여 이를 저차원 공간으로 임베딩함으로써 기하학적으로 차원을 줄이려는 다양체 학습

*정희원, 한국외국어대학교 정보통신공학과
접수일자: 2015년 12월 16일, 수정완료: 2016년 1월 16일
게재확정일자: 2016년 2월 5일

Received: 16 December, 2015 / Revised: 16 January, 2016 /
Accepted: 5 February, 2016

*Corresponding Author: hihahn@hufs.ac.kr

Dept. of Information and Communications Engineering, Hankuk
University of Foreign Studies, Korea

(manifold learning) 기법이 활발히 연구되고 있다. 이들의 대표적인 예로는 ISOMAP^[10], LLE(locally linear embedding)^[8], 라플라시안 아이겐맵(Laplacian eigenmap)^[11], 통근시간 임베딩(commute time embedding)^[7,9] 등이 있다. 특히, 통근시간 임베딩은 무작위 행보(random walk) 기반으로 유사도를 측정하여 두 노드 간의 최단거리 대신에 통근시간을 거리함수로 이용함으로써 동일한 클러스터에 속한 노드 간의 통근시간은 작은 값을 갖는 반면에, 서로 다른 클러스터에 속한 노드 간에는 매우 큰 값을 가지는 특성이 있다. 이러한 특성으로 인하여 음성 신호나 오디오 신호와 같이 주기적인 신호에서 패치를 추출하여 통근시간 임베딩시키면 패치들이 폐곡선 형태로 매핑되는 현상이 나타난다. 따라서 통근시간 임베딩을 이용하면 그 신호에 고유한 기하구조를 생성할 수 있는 특징이 있다. 생성된 기하구조가 주어지면 위상학적 기법을 이용하여 그 고유의 연결특성을 분석할 수 있다.

최근에는 지속적 호몰로지(persistent homology) 이론^[4,12]의 등장으로 말미암아 가장 추상적인 수학분야로 알려진 대수적 위상수학을 신호처리 응용분야에 적용시키려는 기초연구가 시도되고 있다. 이들의 대표적인 예로, 센서 노드의 불규칙한 분포로 인하여 특정 지역에는 센서노드가 전혀 배치되지 않을 수 있는데, 이러한 영역(coverage hole)을 검출하는데 이용되거나^[3], 다양한 특성의 수많은 이미지에서 추출한 패치가 이루는 공간이 클라인 병과 위상적으로 동일함을 증명^[2] 하는데 활용된 바 있다.

다양체 학습 기법을 이용하여 데이터들을 저차원 공간으로 임베딩함으로써 정보를 압축시키거나 클러스터링하는 연구는 많이 진행된 바 있으나 임베딩 결과의 대역적 특성을 분석하는 연구는 현재까지 거의 발표된 바 없다. 이와 같은 의미에서 본 논문의 특징과 기여는 다음과 같이 요약될 수 있다. 첫째로, 본 논문의 목적은 임의의 주기적인 현상이나 특성은 위상구조와 밀접한 관련이 있음을 실험적으로 확인하는 작업이다. 신체의 리듬이나 파형신호 등, 관찰 가능한 수많은 자연현상에서는 다양한 형태의 주기적인 패턴이 나타난다^[11]. 잡음이나 왜곡 등, 다양한 원인으로 인하여 그 형태가 변형되면 이의 주기성에 대한 인식이나 분류는 쉬운 일이 아니다. 이러한 문제는 그 현상을 기하구조로 변환한 다음 위상특성을 분석함으로써 해결 가능하다. 이를 확인하기 위하여 본 논문에서는 주기적인 파형신호를 이용한다. 즉, 통계적

특성이나 스펙트럼이 시간에 따라 가변적인 파형 신호를 다양체 임베딩할 때, 그에 따라 생성되는 기하 구조는 변화하지만 그 신호 고유의 내재된 특성은 보존하고 있음을 실험적으로 확인할 수 있다. 둘째로는, 호몰로지 이론을 적용하여 그 신호 고유의 내재된 특성은 다른 아닌 위상구조임을 실험으로 확인하였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. II장에서는 통근시간 임베딩을 리뷰하고, 임베딩 데이터를 무작위로 표본화하여 단순 복합체를 구성한 다음 이로부터 호몰로지를 구하는 과정을 III장에서 설명한다. IV장에서는 파형 신호에서 구한 통근시간 임베딩 결과에 대하여 계산한 호몰로지를 통하여 위상구조를 분석하고 그 결과를 설명한다. 마지막으로 V장에서는 결론을 맺고 향후 연구 진행방향에 대하여 논의한다.

II. 통근시간 임베딩 리뷰

1. 패치 그래프 구성

파형 신호를 통근시간 임베딩하여 이의 위상 특성을 구하기 위해서는 우선, 파형신호에서 패치를 추출하여 이를 그래프로 구성하여야 한다. 패치들을 모두 모은 패치집합 $\{\mathbf{x}_n, n = 1, \dots, N\}$ 이 p 차원 상의 비선형 다양체를 이산화한 것으로 가정할 때, 다양체 위의 두 점이 서로 근방에 위치하면 이들 간의 측지거리는 유클리드 거리로 근사화시킬 수 있다. 하지만 두 점이 서로 멀리 떨어져 있으면, 다양체의 곡률로 인하여 측지거리와 유클리드 거리 사이에는 큰 오차가 발생하여 측지거리를 측정하는 것이 사실상 불가능하다. 이러한 문제는 패치들을 노드로 간주하여 그래프를 구성함으로써 해결할 수 있다. 본 논문에서는 k -NN(k -nearest neighbor)방식을 이용하여 \mathbf{x}_v 가 \mathbf{x}_u 에 가장 가까운 k 개의 인근 패치에 속하거나 \mathbf{x}_u 가 \mathbf{x}_v 에 가장 가까운 k 개의 인근 패치에 속하면 \mathbf{x}_u 와 \mathbf{x}_v 를 연결시킨다. 이 때, 패치 그래프에서 패치 \mathbf{x}_u 와 \mathbf{x}_v 간의 가중치 $w(u, v)$ 는 다음과 같이 구한다^[9].

$$w(u, v) = \begin{cases} -\frac{\delta(\mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v)^2}{\sigma^2} & \mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v: \text{connected} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (1)$$

여기서, $\delta(\mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v) = \left\| \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} - \frac{\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_v\|} \right\|$ 으로 정의된다. $\delta(\mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v)$ 는 그 크기로 정규화된 두 패치 \mathbf{x}_u 와

x_v 간의 거리를 나타내고, σ 는 $\delta(\cdot)$ 에 따른 $w(u,v)$ 의 크기를 제어한다.

2. 통근시간 임베딩

통근시간 임베딩은 데이터 집합 $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^p$ 가 주어질 때, 이들의 정보손실을 최소한으로 줄이면서 보다 낮은 차원의 점 $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^q$ 으로 변환시키기 위하여, 스펙트럼 그래프 이론을 이용하여 적절한 맵을 구한다^[7,9]. 두 노드 x_i 와 x_j 간의 통근시간 $c(x_i, x_j)$ 는 랜덤 워크가 x_i 에서 x_j 로 이동한 다음 다시 x_i 로 되돌아 오는데 소요되는 평균시간으로 정의된다. 그래프에서 최단 거리(측지거리)와는 달리, 두 노드 간의 통근시간은 이들을 연결하는 경로가 많을수록 감소한다. 두 노드 x_i 와 x_j 간의 $c(x_i, x_j)$ 는 다음과 같이 구할 수 있다^[7].

$$c(x_i, x_j) = V_G \left(l_{ii}^\dagger - 2l_{ij}^\dagger + l_{jj}^\dagger \right) \quad (2)$$

$$= V_G (e_i - e_j)^T L^\dagger (e_i - e_j)$$

위 식에서, $e_i = [0 \dots 0, 1, 0, \dots 0]^T$ 이고 $L^\dagger = (l_{ij}^\dagger)_{i,j=1, \dots, n}$ 는 $L = D - W$ 의 의사 (Moore-Penrose) 역행렬을 나타낸다. 여기서, D 는 각 원소가 $d_u = \sum_v w(u,v)$ 인 대각행렬이다. 즉, $L = UAU^T$ 로 스펙트럼 분해될 때, $L^\dagger = UA^\dagger U^T$ 이다. $U = [u_1, \dots, u_n]$ 의 각 열벡터 u_i 는 L 의 고유벡터이고 A 는 u_i 에 해당하는 고유값 λ_i 을 대각원소로 하는 대각행렬이며, A^\dagger 는 A 의 의사 역행렬로서 다음과 같이 정의된다.

$$\lambda_i^\dagger = \text{diag} \begin{cases} \frac{1}{\lambda_i} & \lambda_i \neq 0 \\ 0 & \lambda_i = 0 \end{cases} \quad (3)$$

식 (2)의 $c(x_i, x_j)$ 는 다음과 같이 표현되는데,

$$c(x_i, x_j) = V_G (e_i - e_j)^T U A^\dagger U^T (e_i - e_j) \quad (4)$$

$$= (\psi_i - \psi_j)^T (\psi_i - \psi_j)$$

여기서 $d_i = \sum_{j=1}^n w(i, j)$, $V_G = \sum d_i$ 으로 정의되고,

$\psi_i = \sqrt{V_G} (u_{i,2} / \sqrt{\lambda_2}, \dots, u_{i,n} / \sqrt{\lambda_n})^T$ 이다. 성능향상을 위하여 $L_{sym} = D^{-1/2} L D^{-1/2}$ 으로 정규화시키면

$$\psi_i = \sqrt{V_G} \left(\frac{v_{i,2}}{\sqrt{\hat{\lambda}_2 d_i}}, \dots, \frac{v_{i,n}}{\sqrt{\hat{\lambda}_n d_i}} \right) \quad (5)$$

으로 변경된다. 여기서, $\hat{\lambda}_i = \lambda_i / \sqrt{d_i}$ 이고 $v_{i,j} = u_{i,j} / \sqrt{d_i}$ 이다. 위 식 (4)를 관찰하면 $\sqrt{c(x_i, x_j)}$ 는 \mathbb{R}^{n-1} 상에서 두 벡터 간의 거리로 해석될 수 있다. 즉, x_i 를 식 (5)와 같이 임베딩하면 $\sqrt{c(x_i, x_j)}$ 는 임베딩 공간의 두 노드 ψ_i 와 ψ_j 간의 유클리드 거리로 간주될 수 있는데, 이를 통근시간 거리라고 부른다. 임베딩 공간의 차원은 노드 수에 따라 증가하므로 허용오차 범위 내에서 차원을 q 로 줄이면 다음과 같이 통근시간 임베딩을 정의할 수 있다^[9].

$$\phi_i = \sqrt{V_G} \left(\frac{v_{i,2}}{\sqrt{\hat{\lambda}_2 d_i}}, \dots, \frac{v_{i,q+1}}{\sqrt{\hat{\lambda}_{q+1} d_i}} \right) \quad (6)$$

여기서, 고유값 $\hat{\lambda}_k$ 는 다음과 같이 정렬되어 있다고 가정한다.

$$0 = \hat{\lambda}_1 \leq \hat{\lambda}_2 \leq \dots \leq \hat{\lambda}_n < 2 \quad (7)$$

III. 호몰로지

1. 단순 복합체

M 은 위상 또는 거리 공간이고 $X \subset M$ 가 M 에서 표본화된 유한개 점의 집합이라고 가정한다. 일반적으로 각 점 간의 거리가 정의되면 유클리드 공간에 각 점의 좌표를 지정함으로써 유클리드 거리 공간을 생성할 수 있다. 즉, $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ 가 연속 임베딩 함수를 나타낼 때, $Y = f(X) \subset \mathbb{R}^m$ 를 이용하여 파라미터 공간 M 의 위상 특성을 파악하는 것이 본 논문의 핵심적인 주제이다. $M \subset \mathbb{R}^n$ 에서 유한개의 점을 조밀하게 얻을 수 있다고 가정하면 이들의 점으로부터 M 의 위상 정보(topological invariants)를 구할 수 있다. 여기서 점의 집합을 PCD(point cloud data)라고 부른다. M 의 위상 정보를 구하기 위해서는 PCD로부터 체크(*Čech*) 복합체(complex)나 보다 계산이 간편한 립스(Vietoris-Rips) 복합체 등을 구성하여야 한다. 예를 들어 립스 복합체 $R_\epsilon(M)$ 에서는 점들의 부분 집합 $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ 에서 각 쌍의 점 $x_i, x_j \in \sigma$ 간의 거리 $d(x_i, x_j) \leq \epsilon$ 이면 σ 는 k -심플렉스를 스캔한다고 정의한다. 예를 들어,

$\mu = \{x_i, x_j\}$ 에서 $d(x_i, x_j) \leq \epsilon$ 이면 μ 는 x_i 와 x_j 를 잇는 에지(1-심플렉스)가 되고, $\gamma = \{x_i, x_j, x_k\}$ 에서 각 쌍의 점 $x_\alpha, x_\beta \in \sigma$ 에 대하여 $d(x_\alpha, x_\beta) \leq \epsilon$ 이면 삼각형 면(2-심플렉스)이 된다. 이 때, $\epsilon < \epsilon'$ 이면 $R_\epsilon(M) \rightarrow R_{\epsilon'}(M)$ 인 포함관계가 성립한다. 따라서 ϵ 이 단순 증가하는 값을 갖는 수열이 되도록 $R_\epsilon(M)$ 를 구성하면 복합체 열(persistence complex)을 얻을 수 있다. 여기서 복합체 열은 $R_\epsilon(M)$ 의 열, 사슬(chain)과 경계(boundary) 사상 등의 집합체 등을 말한다^[4,12].

2. 호몰로지

주어진 기하공간의 위상구조를 알기 위해서는 일반적으로 위상동형(homeomorphism)을 계산하여야 하지만 이는 매우 어려운 작업이므로 이의 대안으로 호몰로지를 대수적으로 구하는 것이 보편적인 선택이다. 여기서 위상동형의 개념은 기하구조를 찢거나 이어 붙이지 않고 단순히 늘이거나 휘게 하는 과정을 통해서는 위상구조가 변하지 않음을 의미한다. 호몰로지 이론의 수학적 정의는 다음과 같이 요약될 수 있다. 주어진 단순 복합체 $S \in \mathbb{R}^p$ 에 대하여, 사슬 군(chain group) $C_k(S)$, $0 \leq k \leq p$ 는 기저원소로 k -심플렉스를 이용하여 구성된다. $C_k(S)$ 의 원소인 k -사슬은 덧셈에 닫혀 있는 아벨 군(Abelian group)으로서 본 논문에서는 그 계수로 정수(\mathbb{Z})를 이용한다. 예를 들어, \mathbb{R}^3 상의 복합체에서는 $C_0(S)$, $C_1(S)$, $C_2(S)$ 만이 비자명 군(nontrivial group)이다. 경계 사상(boundary map) $\partial_k: C_k \rightarrow C_{k-1}$ 은 k -사슬 $\sigma = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ 에 다음과 같이 정의되는데,

$$\partial_k \sigma = \sum_i (-1)^i [v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k] \quad (8)$$

여기서, $[v_0, v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_k]$ 는 \hat{v}_i 가 제거된 $k-1$ 사슬을 나타낸다. 이러한 경계 사상은 사슬 군을 다음과 같이 사슬 복합체로 연결시키는 역할을 한다.

$$\dots \xrightarrow{\partial_5} 0 \xrightarrow{\partial_4} C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \quad (9)$$

∂_k 의 커널 $\ker(\partial_k)$ 은 그 경계가 0인 k -사슬을, ∂_k 의 치역 $\text{img}(\partial_k)$ 은 k -사슬의 경계인 $k-1$ 사슬을 각각 나타낸다. k -순환(cycle)은 $\ker(\partial_k)$ 의 원소인 k -사슬이고 k -경계(boundary)는 $\text{img}(\partial_{k+1})$ 의 원소인 k -사슬이다. k -순환 군 Z_k 와 k -경계 군 B_k 는 C_k 의 부분군

(subgroup)으로서 $B_k \subseteq Z_k \subseteq C_k$ 인 관계가 있다^[12].

k -호몰로지 군 H_k 는 Z_k/B_k 인 상군(quotient group)으로 정의되는데, H_k 의 랭크(rank)를 복합체 S 의 k -베티 수(Betti number)라고 한다^[4]. 예를 들어, 임의의 순환 $c \in \ker(\partial_1)$ 는 H_1 의 한 원소인 동등류(equivalence class) $[c]$ 에 속하고, 두 개의 순환 $c_1, c_2 \in \ker(\partial_1)$ 가 H_1 의 동일한 원소로 매핑되면, 즉, $[c_1] = [c_2]$ 이면 c_1 과 c_2 는 동일한 홀(hole)을 감싼다. $[c] = 0$ 이면, 1-순환 c 는 축약가능(contractible)하다고 말하는데, 어떠한 홀도 감싸지 않으며 $\text{img}(\partial_2)$ 의 원소가 된다.

기하구조의 연결성에 대한 모든 정보를 명확히 알면 호몰로지를 이용하여 그 구조의 위상특성을 구할 수 있다. 하지만, 어떤 기하구조에서 무작위 표본화된 데이터로 간주된 PCD로 주어지면 그 내부의 각 점이 어떻게 연결되어 있는지 정확히 알 수 없으므로 호몰로지를 바로 적용하는데 어려움이 발생한다. 공간의 연결성이 위상구조를 결정하므로 PCD 내의 각 점의 연결성을 적절히 지정해 주어야 한다. 이를 위하여 지속특성(persistence) 개념이 도입된다. PCD 외에 별 다른 정보를 알지 못하면 최적의 ϵ 을 찾는 것은 사실상 불가능하다. 따라서 ϵ 이 단순 증가하는 값을 갖는 수열이 되도록 $R_\epsilon(M)$ 을 구성하여 복합체 열(persistence complex)을 얻은 다음, 이로부터 호몰로지의 추이를 관찰하면 위상구조를 추론할 수 있는데, 이 기법을 지속적 호몰로지라고 부른다. 지속적 호몰로지를 구하기 위해서는 위에서 설명한 방법으로 복합체 열 $0 = K^0 \subseteq K^1 \subseteq \dots \subseteq K^m = K$ 을 구하여야 한다. 지속적 호몰로지란 복합체 열을 따라 계산한 호몰로지를 말한다. 여기서 심플렉스 $\sigma \in K$ 의 필터레이션(filtration) 인자를 $\sigma \in K^i$ 를 만족시키는 인자 i 의 최소 값으로 정의한다. 심플렉스 σ 가 k 차원 홀을 필터레이션 인자 s 에서 생성하고 t 에서 소멸시킬 때, 그 구간 $[s, t)$ 을 k 차원 홀의 지속구간(persistence)이라고 부른다. K^s 의 p 지속구간 k 차원 호몰로지 군은 다음과 같이 정의되는데^[12],

$$H_k^{s,p} = \frac{Z_k^s}{B_k^{s+p} \cap Z_k^s} \quad (10)$$

여기서, $p = t - s$ 이고, Z_k^s 는 K^s 의 k -순환 군을, B_k^{s+p} 는 K^{s+p} 의 k -경계 군을 각각 나타낸다. 본 논

문에서 지속적 호몰로지는 각 지속구간을 수평 막대의 집합으로 그래프화시킨 바코드로 표현한다.

IV. 통근시간 임베딩의 위상 특성 분석

본 실험에 앞서, 대표적인 주기신호인 정현파와 비주기신호인 처프신호(chirp)에 대하여 통근시간 임베딩을 수행함으로써 그 특성을 알아본다. 그림 1은 700개의 표본으로 구성된 정현파와 처프신호에서 25차원 벡터 크기의 패치를 최대한 겹치도록 676개 추출하여 패치 그래프를 구성한 다음, 식 (6)을 이용하여 통근시간 임베딩한 결과를 각각 보여 준다. 이 그림에서는 각 패치에서 그레이던트 벡터의 크기를 각각 구하고 이를 오름 차순으로 정렬하여 중간 값보다 작으면 파란 점으로, 크면 빨간 점으로 나타낸다. 즉, 파란 점은 부드러운 저주파 영역의 패치에 해당되는 반면, 빨간 점은 고주파 영역을 나타낸다. 위에서 설명한 바와 같이, 비주기 신호의 통근시간 임베딩이 그림 1(b)와 같이 유클리드 공간에서 열린 곡선의 형태를 갖는 반면, 주기적인 신호의 임베딩은 그림 1(a)와 같은 고리 형태의 폐곡선 기하구조임을 확인할 수 있다^[56]. 그 이유는 주기 신호의 각 점은 주위에 항상 인근 점들이 존재하기 때문이다.

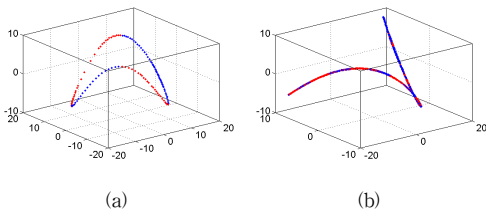


그림 1. 정현파와 처프 신호에 대한 통근시간 임베딩
 (a) 정현파 신호, (b) 처프신호
 Fig. 1. Commute time embedding of a sinusoidal and a chirp signal
 (a) Sinusoidal signal, (b) Chirp signal

하지만, 모든 임베딩 방식이 이와 같은 특성을 갖고 있지는 않다. 예를 들어, 대표적인 선형 임베딩 방식인 주성분 분석을 정현파와 처프신호에 각각 적용하면 그림 2에 제시한 바와 같이 통근시간 임베딩의 결과에 비해 에너지 집적도가 매우 낮고 위상적으로 의미 있는 구조를 생성하지 못한다. 따라서, 주성분 분석은 주기적인 현상과 위상구조의 관련성을 파악하고자 하는 본 논문의 목적에

부합하지 않는다. 이와 같은 이유로 본 논문에서는 통근시간 임베딩을 채택한다.

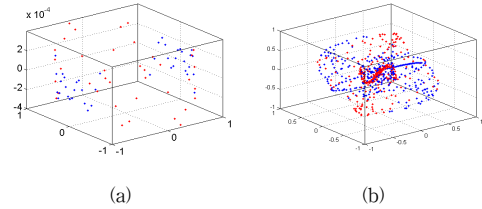


그림 2. 주성분 분석을 이용한 정현파 신호와 처프신호의 임베딩
 (a) 정현파 신호, (b) 처프신호
 Fig. 2. Embedding of a sinusoidal and a chirp signal using a principal component analysis
 (a) Sinusoidal signal, (b) Chirp signal

비주기 신호의 통근시간 임베딩 구조인 열린 곡선의 호몰로지 군은 자명 군(trivial group)이므로 본 논문에서는 주기적인 신호에 해당되는 폐곡선 형태의 임베딩에 대해서만 그 위상특성을 분석한다. 이해를 돕기 위한 선행 연구로 대표적인 주기 신호인 정현파를 예로 들어 설명한다. 그림 1-(a)의 통근시간 임베딩 데이터를 PCD로 간주하여 이로부터 100개의 점을 무작위 표본화하고, ϵ 을 0부터 5까지 15 등분하여 이에 따른 15개의 림스 복합체로 구성된 열(persistence complex)을 생성한다. 그림 3은 그 중에서 세 개의 림스 복합체를 보여준다. 이 열로부터 지속적 호몰로지를 계산하여 구한 베타 수는 그림 4에 호몰로지 바코드로 제시한다.

그림 3에서 알 수 있는 바와 같이, $\epsilon = 1$ 일 때에는 림스 복합체가 여러 개의 연결성분으로 구성되어 있어서 그림 4(a)에 그 수에 해당되는 수평 막대가 나타나지만, $\epsilon \geq 2$ 에서는 모든 성분이 연결되어 단일 객체를 이룬다. 복합체의 0차원 베타 수는 그 연결성분의 개수를 나타내므로 그림 4(a)를 관찰하면 $\epsilon \geq 1.5$ 일 때 복합체가 단일 성분임을 알 수 있다. 복합체의 일차원 베타 수가 폐곡선 구조의 개수를 나타내는 바, 그림 4(b)는 복합체가 연결 구조화되면서 일차원 베타 수가 1이 됨을 보여 준다. 이 복합체에서 면으로 둘러싸인 홀은 존재하지 않으므로 이차원 베타 수는 항상 0이다. 따라서, 이 복합체 K 의 호몰로지 군은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} H_0(K) &= \mathbb{Z} \\ H_1(K) &= \mathbb{Z} \\ H_2(K) &= \{0\} \end{aligned} \quad (11)$$

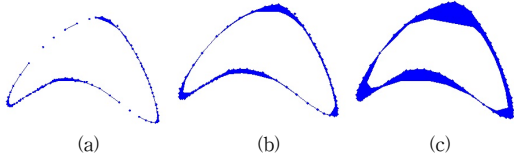


그림 3. 정현파 신호의 통근시간 임베딩을 표본화하여 구한 립스 복합체 열

(a) $\epsilon = 1.0$, (b) $\epsilon = 2.0$, (c) $\epsilon = 3.0$

Fig. 3. Rips complexes constructed by random sampling the commute time embedding of a sinusoidal signal, where ϵ is selected as:

(a) $\epsilon = 1.0$, (b) $\epsilon = 2.0$, (c) $\epsilon = 3.0$

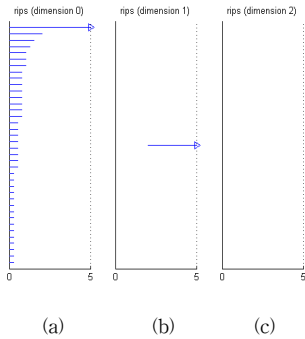


그림 4. 정현파 신호의 통근시간 임베딩에 대한 립스 복합체 열($0 \leq \epsilon \leq 5$)로부터 구한 호몰로지 바코드 (a) 0차원 베타 수, (b) 1차원 베타 수, (c) 2차원 베타 수

Fig. 4. Persistence barcodes corresponding to the Rips complexes ($0 \leq \epsilon \leq 5$) constructed from the commute time embedding of a sinusoidal signal (a) 0th Betti number, (b) 1st Betti number, (c) 2nd Betti number

이상에서 비주기 신호의 통근시간 임베딩이 유클리드 공간에서 열린 곡선의 형태를 갖는 반면, 주기적인 신호의 임베딩은 고리 형태의 폐곡선 기하구조임을 확인하였고, 호몰로지를 이용하면 신호의 주기/비주기 특성을 대수적으로 결정할 수 있음을 보여 주었다. 다음에서는 주기적 특성이 강한 악기음을 대상으로 이들의 위상구조를 분석하고 이들의 대역적 특성을 논의한다.

1. 현악기 음의 위상 특성

통근시간 임베딩을 이용하면 파형신호를 기하 구조로 변환시킬 수 있음을 이전 연구에서 확인한 바 있다^[5]. 그림 5는 바이올린, 비올라, 첼로 등의 현악기 음에서 1,500개 샘플 길이의 파형을 무작위로 추출하여 구한 통근시간 임베딩 결과를 나타낸다.

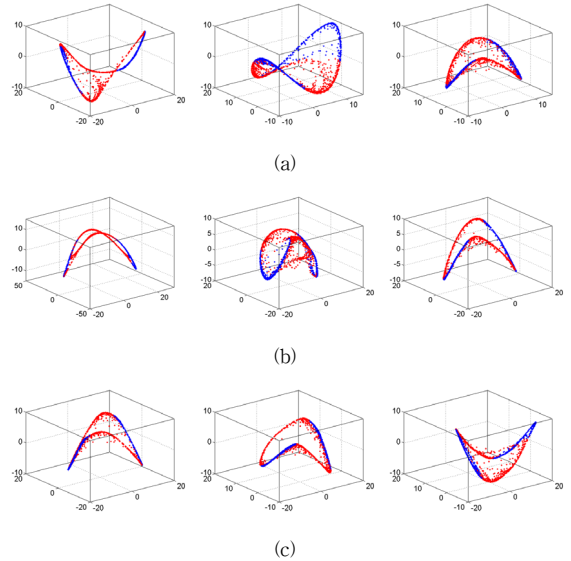


그림 5. 현악기 음의 스펙트럼 변화에 따른 통근시간 임베딩의 변화 (a) 바이올린, (b) 비올라, (c) 첼로

Fig. 5. The variation of commute time embedding as the spectrum of the string instrumental sounds changes (a) Violin, (b) Viola, (c) Cello

그림 5에서 확인할 수 있듯이, 악기 별로 각 세그먼트의 스펙트럼 변화로 인하여 임베딩 결과는 서로 다른 형태를 갖고 있지만, 그림 1(a)에 제시한 정현파 신호의 임베딩과 유사한 기하 구조를 갖고 있다. 즉, 악기 별로 스펙트럼에 따라 임베딩은 어느 정도 변하기는 하지만 현악기음 고유의 기하구조는 유지하고 있음을 알 수 있다. 이들의 위상 특성을 확인하기 위하여 1,476개의 임베딩 데이터로부터 150개의 점을 무작위로 표본화하여 립스 복합체 열을 구성한 다음 지속적 호몰로지를 구한다. 그림 5의 모든 임베딩에 대하여 호몰로지를 구한 결과, 예상한 바와 같이 그림 5(b)의 중간에 위치한 임베딩을 제외하고는 모두 영차원과 일차원 베타 수가 각각 1로 수렴하여 이들의 위상 특성이 기본적으로 동일함을 확인하였다. 예를 들어, 그림 5(c)의 좌측에 나타낸 첼로 음의 임

베딩에 대한 호몰로지 바코드는 그림 6에 제시한 바와 같다. 이 바코드를 통하여 호몰로지 군은 식 (11)과 동일함을 알 수 있다. 현악기 음의 임베딩에 대한 위상특성은 기본적으로 정현파 신호의 경우와 동일한데, 이는 현악기 음의 속성이 정현파적임을 위상적으로 해석할 수 있음을 의미한다.

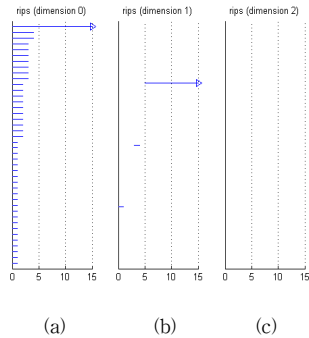


그림 6. 첼로 음 신호의 통근시간 임베딩(그림 5(c)의 좌측)에 대한 립스 복합체 열($0 \leq \epsilon \leq 15$)로부터 구한 호몰로지 바코드. (a) 영차원 베티 수, (b) 일차원 베티 수, (c) 이차원 베티 수

Fig. 6. Persistence barcodes corresponding to the Rips complexes ($0 \leq \epsilon \leq 15$) constructed from the commute time embedding of a cello instrumental sound signals, as given in the left of Fig. 5(c). (a) 0th Betti number, (b) 1st Betti number, (c) 2nd Betti number

2. 관악기 음의 위상 특성

현악기 음의 경우와 동일한 방법으로 플룻, 호른 등의 관악기 음에서 파형을 추출하여 구한 통근시간 임베딩 결과를 그림 7에 제시한다. 현악기 음의 임베딩이 대부분 한 개의 폐곡선 구조를 갖는 단순한 모습인 반면, 관악기 음의 임베딩은 두 개 또는 그 이상의 폐곡선 구조가 연결되거나 분리된 형태를 보인다. 스펙트럼의 안정구간에서 추출한 파형 세그먼트는 주기적이어서 이의 임베딩은 선명한 폐곡선 구조를 갖는데 비해, 그림 7(b)의 좌측에 위치한 임베딩에서와 같이 과도구간에 위치한 세그먼트는 주기적 특성이 저하되어 임베딩하면 곡선의 구조가 명확하지 않을 뿐만 아니라 그 위에 많은 점들이 잠음처럼 흩어져 있는 모습을 볼 수 있다. 영차원 베티 수가 연결 성분의 수를 나타내므로 그림 7(c)의 중간에 위치한 임베딩은 영차원 베티 수가 2이지만 그 외의 임베딩은 1의 값을 갖는다.

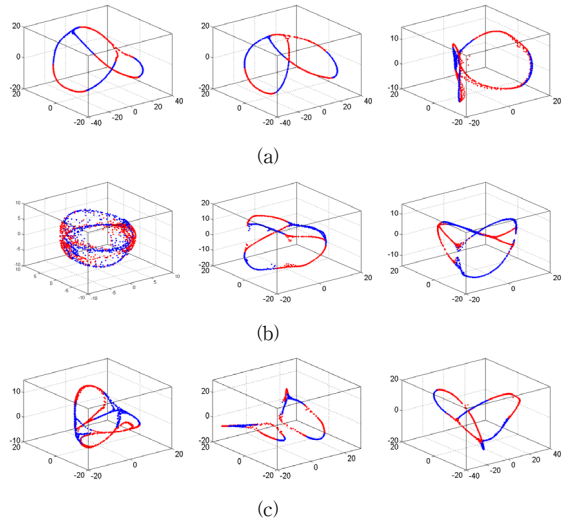


그림 7. 관악기 음의 스펙트럼 변화에 따른 통근시간 임베딩의 변화 (a) 플룻, (b) 클라리넷, (c) 호른

Fig. 7. The variation of commute time embedding as the spectrum of wind instrumental sounds changes (a) Flute, (b) Clarinet, (c) Horn

그림 8은 그림 7(a)의 좌측에 제시한 플룻 음의 임베딩에 대한 호몰로지 바코드를 보여 준다. 이 바코드를 통하여 호몰로지 군은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} H_0(K) &= \mathbb{Z} \\ H_1(K) &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ H_2(K) &= \{0\} \end{aligned} \quad (12)$$

본 실험 결과를 정리하면 다음과 같다. 파형 신호를 통근시간 임베딩하면 그 신호의 특성에 따른 기하 구조를 생성하는 바, 이로부터 립스 복합체를 구성하여 호몰로지를 구하면 비주기 신호의 일차원 베티 수가 0 인 반면, 주기 신호 또는 의사 주기 신호의 일차원 베티 수는 1 이상의 값을 가지므로 이들을 쉽게 구별할 수 있다. 또한, 현악기 음과 관악기 음의 위상구조는 서로 다름을 실험으로 확인하였다. 이는 현악기 음과 관악기 음이 별개의 두 위상공간에서 추출한 표본이라고 가정할 때에 이들의 위상공간이 서로 다르므로 현악기 음과 관악기 음은 완전히 다른 부류에 속한다고 볼 수 있어서 위상정보가 이들을 분류하는데 매우 중요한 특징정보로 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

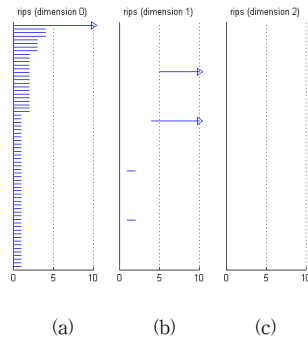


그림 8. 플룻 음 신호의 통근시간 임베딩(그림 7(a)의 좌측)에 대한 립스 복합체 열($0 \leq \epsilon \leq 10$)로부터 구한 호몰로지 바코드. (a) 0차원 베티 수 (b) 1차원 베티 수 (c) 2차원 베티 수

Fig. 8. Persistence barcodes corresponding to the Rips complexes ($0 \leq \epsilon \leq 10$) constructed from the commute time embedding of a flute instrumental sound signals, as given in the left of Fig. 7(a). (a) 0th Betti number (b) 1st Betti number (c) 2nd Betti number

V. 결론

본 논문에서는 임의의 주기적인 현상이나 특성은 위상구조와 밀접한 관련이 있음을 실험적으로 확인하기 위하여 대표적인 의사주기신호인 악기음을 채택하였다. 파형신호에서 패치를 추출하여 이를 통근시간 임베딩하면 파형신호의 특성에 따른 기하구조를 생성할 수 있는데, 임베딩 결과는 그 신호에 고유한 기하구조를 보존하고 있음을 확인하였다. 하지만, 생성된 기하 구조로부터 유용한 정보를 추출해 내는 것은 쉬운 일이 아니다. 이를 해결하기 위한 기초 연구로 본 논문에서는 임베딩 기하구조로부터 지속적 호몰로지를 구하여 이들의 위상 특성을 분석하는 기법을 제안하였다.

주기적인 자연현상이라 하더라도 악기음 신호에서와 같이 대부분 시간에 따라 가변적인 특성을 갖는다. 따라서, 이러한 현상을 위상적으로 분석하기 위해서는 PCD를 동적으로 추출하여야 할 필요가 있다. 향후에는 시간에 따른 위상구조의 동적 변화를 분석하기 위한 연구를 진행할 계획이다.

References

- [1] M. Belkin and P. Niyogi, "Laplacian eigenmaps for dimensionality reduction and data representation," *Neural Computation* 15(6), pp.1373-1396, 2003.
- [2] G. Carlsson, T. Ishkhanov, V. deSilva and A. Zomorodian, "On the local behavior of spaces of natural images," *International Journal on Computer Vision*, 2004.
- [3] H. Chintakunta and H. Krim "Distributed localization of coverage holes using topological persistence," *IEEE Trans. Signal Processing*, Vol.62, No. 10, pp. 2531-2541, May 2014.
- [4] H. Edelsbrunner, D. Letscher and A. Zomorodian, "Topological persistence and simplification," *Discrete Computational Geometry* 28, pp. 511-533, 2002.
- [5] H. Hahn, "A Study on classification of waveforms using manifold embedding based on commute time," *Journal of the Institute of Electronics and Information Engineers*, Vol. 51, No. 2, pp. 148-155, 2014.
- [6] H. Hahn, "A Study on Statistical Approach for Nonlinear Image Denoising Algorithms," *Journal of the Institute of Internet, Broadcasting and Communication*, Vol. 12, No. 1, pp. 157-164, 2012.
- [7] H. Qiu and E.R. Hancock, "Clustering and embedding using commute times," *IEEE Trans. PAMI*, Vol. 29, No. 11, Nov. 2007.
- [8] S.T. Roweis and L.K. Saul, "Nonlinear dimensionality reduction by locally linear embedding," *Science* Vol.290, 2000.
- [9] K.M. Taylor, "The geometry of signal and image patch-sets," PhD Thesis, University of Colorado, Boulder, Dept. of Applied Mathematics, June 2011.
- [10] J.B. Tenenbaum, V. deSilva, and J.C. Langford, "A global geometric framework for nonlinear dimensionality reduction," *Science*, Vol. 290, pp.2319-2323, 2000.
- [11] B. Yun, T. An, W. Lee Y. Bong, and Y. Hong, "Image surveillance system using intelligence,"

Journal of the Institute of Internet, Broadcasting
and Communication, Vol. 9, No. 5, pp. 123-127,
2009.

- [12] A. Zomorodian and G. Carlsson, "Computing
persistent homology," Discrete Computational
Geometry 33, pp. 249-274, 2005.

저자 소개

한 희 일(정회원)



- 1984년 : 서울대학교 제어계측공학과
학사 졸업.
- 1988년 : 서울대학교 제어계측공학과
석사 졸업.
- 1995년 : University of Arizona 전기
및 컴퓨터공학과 박사 졸업.
- 2016년 현재 : 한국외국어대학교 정보
통신공학과 교수.

<주관심분야 : 신호처리, 컴퓨터비전, 패턴인식, 기하학 및 토
폴로지>

※ 본 논문은 2015년도 한국외국어대학교 교내 학술연구지원에 의하여 연구되었음