Journal for History of Mathematics
Vol. 29 No. 1 (Feb. 2016), 1–16
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2016.29.1.001

An Analysis of the Contents and Expression Methods of Jeong Yag-yong's 『Gugo Wonlyu』

정약용의 『구고원류』의 내용과 표현방법 분석

Lee Kyung Eon 이경언

This study analyzes the contents and expression methods of Jeong Yag-yong's 『Gugo Wonlyu』. The 530-page long 『Gugo Wonlyu』 discusses 1541 formulas about Gu, Go, Hyun, Hwa, Gyo; however, it has only the results of formulas and no explanations about their inducement method. Therefore we do not know how he derives and verifies the formulas. In addition, it did not follow the basic form of oriental mathematics textbooks: problem-answer-solution, and presented all the formulas only with characters without using numbers. This is a very distinctive aspect compared to other mathematical textbooks. In addition, the formulas about 5-Hwa and 5-Gyo are addressed exactly in fixed order and covers a formula in various directions. This is a clear evidence that Jeong Yag-yong analyzed and studied the Gugosul thoroughly.

Keywords: Jeong Yag-yong, Gugo Wonlyu, Gugosul; 정약용, 구고원류, 구고술.

MSC: 01–03 ZDM: A35

1 서론

구고현의 정리란 동양 수학에서 피타고라스의 정리를 말한다. 여기서 구, 고, 현은 직각삼각형의 세 변을 가리키며 구체적으로 빗변을 현, 직각을 낀 두 변 중 짧은 변을 구, 긴 변을 고라 한다. 동양 산학에서 구고술은 『구장산술』과 『주비산경』에서부터 시작하여 직각삼각형의 세 변들 사이의 문제와 이에 내접하는 사각형과 원의 문제를 대수적으로 해결하고 또 이를 통하여 측량 문제를 해결할 수 있기 때문에 대부분의 산서에서 취급하고 있는 내용이다 [5].

예를 들어, 중국 산학서인 『주비산경』에서는 구를 a, 고를 b, 현을 c라 할 때, $c^2 = (b-a)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$, $(a+b)^2 = (b-a)^2 + 4ab$, $2c^2 - (b-a)^2 = (b+a)^2$의 관계가 현도를 통해 제시되고 있으며, 『구장산술』 제9권 구고에는 구고술을 적용하여 변의 길이를 구하는

Lee Kyung Eon: Dept. of Math. Edu., Jeju National Univ E-mail: lee0622@jejunu.ac.kr
Received on Nov. 30, 2015, revised on Jan. 25, 2016, accepted on Feb. 2, 2016.

문제, 직각삼각형의 닮음을 이용한 문제, 피타고라스 3쌍을 생성하는 규칙 등을 포함하고 있다 [1, 213–216]. 이어서, 왕효통은『집고산경』에서 직각삼각형의 변에 관한 문제를 일반 3차방정식과 4차방정식을 통하여 해결하고 있다. 또한, 송대에 도입된 천원술을 이용하여 구고술의 대수적 접근이 가능해졌는데, 특히 진구소의『수서구장』과 이야의『측원해경』, 주세걸의『산학계몽』에서 천원술을 이용하여 구고술의 대수화가 이루어졌으며, 이러한 대수화는 주세걸의『사원옥감』에서 천원술을 사원술로 확장하여 구고술의 완전한 대수화가 이루어졌다 [4]. 한편, 남송의 양휘는『상해구장산법』에서 구장산술의 구고술을 다시 정리하고, "勾股生變十三名"을 통하여 직각삼각형의 세 변에서 만들어지는 "화", "교" 계열, 즉 구고화, 구현화, 고현화, 현화화, 현교화, 구고교, 구현교, 고현교, 현화교, 현교교를 도입하고, 이들을 사용하여 구장산술의 문제를 해설하는데 다항식의 연산에 해당되는 부분을 사각형의 넓이를 이용하여 설명하였다 [5, p. 2].

조선 산학에서도 구고술은 중요한 연구 주제였다. 조선 산학에서 구고술을 다룬 산학서로는 홍정하의『구일집』, 황윤석의『산학본원』, 홍대용의『주해수용』, 조태구의『주서관견』, 조희순의『산학습유』, 남병길의『유씨구고술요도해』등이 있다. 특히, 홍정하는『구일집』에서 천원술을 이용하여 구고술에 대한 완벽한 대수화를 이루어 그 당시 어떠한 구고술에 비교해 보더라도 가장 뛰어난 업적을 이루었다 [5]. 이들 산학서의 구고술에 대한 내용이나 중국 산학에서의 구고술에 대한 자료는 [5, 6]에 이미 자세히 분석되어 있으므로 본고에서는 위의 산학서의 내용이나 구고술의 역사나 발달 과정에 대한 내용은 생략한다.

한편, 정약용은 18세기 실학사상을 집대성한 한국 최대의 실학자이자 개혁가로서 개혁과 개방을 통해 부국강병을 주장한 인물이라 평가할 수 있다. 당시 조선 사회는 이미 청나라를 통해 다양한 서양 문물과 학문이 전해졌던 시기이다. 예를 들어, 서명응(1716～1787), 서호수(1736～1799), 서유본(1762～1822), 서유구(1764～1845) 등 서씨 3대가 역법 및 수학에 깊은 관심과 지식을 가지고 있었음은 널리 알려진 사실이며, 홍석주가 유가 지식인이 읽어야 할 책들을 열거한『홍씨독서록』에는『기하원본』,『수리정온』,『역상고성』등 역법 및 수학 책들이 많이 포함되어 있었다 [12, p. 39]. 이러한 시대적 상황에서 정약용도 23세에 이벽으로부터 서학에 관하여 듣고 관련 서적을 탐독했는데 이 과정에서 천주교뿐만 아니라 서양 수학에 대한 일부 서적을 접할 기회도 충분히 있었다고 볼 수 있다.

그동안 정약용의 저작에 관한 연구는『여유당전서』를 중심으로 정약용의 경학, 경세학, 서학 등을 대상으로 했으며 일부 과학기술에 대한 연구가 있었고, 몇몇 연구에서 정약용의 수학저술인『구고원류』의 진위 여부에 대한 논의가 이루어진 정도이다 [10, 13, 11]. 특히,『여유당전서보유』제4책『구고원류』의 해제에서 김영호는『구고원류』에 대하여 극찬한 바 있으나 [9],『구고원류』의 내용에 대한 수학적인 분석은 거의 이루어지지 않았다.

이러한 점에서 이 논문은『구고원류』를 통해 정약용의 수학적 연구에 대한 보다 많은

연구가 활발히 이루어지기를 기대하면서 시작한 연구 결과로, 먼저 2절에서는 『여유당전서보유』와 『구고원류』에 대하여 간단히 살펴보고, 제3절에서는 『구고원류』와 관련된 선행 연구를 분석하고, 제4절에서는 『구고원류』의 내용과 그 표현방법에서의 특징을 자세히 분석한다. 이러한 분석을 통해 정약용의 『구고원류』의 진위 여부에 대한 실마리를 제공할 수 있을 것으로 기대한다.

2 『여유당전서』와 『여유당전서보유』

조선실학의 집대성자로 이름이 높은 정약용(丁若鏞, 1762～1836)은 字를 美庸이라 하고 茶山, 俟菴, 與猶堂 등의 다양한 호가 있다. 정약용은 생전에 수많은 연구와 저술을 하였는데 이러한 정약용의 저술을 총정리한 문집이 『여유당전서』로, 모두 154권 76책에 이르는 방대한 분량이다.

『여유당전서』는 정약용의 대표적인 저술인 『목민심서』, 『경세유표』, 『흠흠신서』 등 이른바 1표 2서(一表二書)에서 시문에 이르기까지 방대한 저술을 총망라한 문집이다. 외현손 김성진이 편집하고 정인보와 안재홍이 교열에 참가하여 1934～38년에 신조선사(新朝鮮社)에서 간행하였다. 그 후 신조선사판 『여유당전서』를 저본으로 해서 2종의 영인본이 더 간행되었는데, 1962년 문헌편찬위원회가 다산연보를 첨가해 『정다산전서』라는 책명으로 영인본을 냈고, 1970년에는 경인문화사가 『여유당전서보유』 5책을 추가해 영인본을 출간했다. 『여유당전서』는 모두 7집인데, 제1집은 25권 12책으로 시문집, 제2집은 48권 24책으로 경집(經集), 제3집은 24권 12책으로 예집(禮集), 제4집은 4권 2책으로 악집(樂集), 제5집은 39권 19책으로 정법집(政法集), 제6집은 8권 4책으로 지리집(地理集), 제7집은 6권 3책으로 의학집(醫學集)이다 [2].

한편, 『여유당전서보유』는 모두 5책으로 모두 49종의 저술과 자료가 포함되어 있다. 이 중 제4책에는 수학편과 잡찬편이 수록되었는데 수학편으로 『구고원류』 1편이, 잡찬류로 『려범지남』, 『서의』, 『역의』, 『임자세제도태양출입주야시각』 등 4편이 있으며, 특히 『구고원류』는 정해경씨 장본과 국립도서관본이 전해지고 있는데 내용은 거의 동일하며 필적 또한 동일인으로 추측된다 [9].

이 논문에서는 1975년 경인문화사에서 간행한 다산학회편 『여유당전서보유』 영인본 제4책에 포함된 『구고원류』를 이용하여 그 내용을 분석하였다.

3 『구고원류』에 관한 선행연구 분석

『구고원류』에 관한 선행연구는 크게 두 가지로 나누어진다. 첫째는 『구고원류』에 포함된 내용을 수학적으로 분석하는 연구 [3, 7]이다. 이 연구에 따르면 정약용은 $+$, $-$를

각각 다(多), 소(少)로 하고, 평방 대신에 멱(冪), 곱셈은 승(乘)을 사용하여 2차식으로 나타내었다. 이 방법을 이용하여 정약용은 구, 고, 현을 부정원으로 사용하여 3원 다항식의 대수적 구조를 밝혔다. 이때, 정약용은 17～18세기 중국 수학이 서양의 기하적 증명방법을 이용하여 항등식을 다룬 것과는 달리 인수분해에 대한 명확한 이해를 바탕으로 항등식을 얻었음을 밝혔다. 또한, 정약용은『구고원류』에서 1500여 가지의 항등식을 제시하였는데, 5화와 5교를 현화화, 현화교, 현교화, 현교교, 구고화, 구고교, 구현화, 구현교, 고현화, 고현교, 현멱의 순서로 정하고, 이들 중에 두 항씩 두 번 택하여 각 쌍을 곱한 것의 합과 차를 다시 가능한 대로 구고화부터 고현교를 사용하여 나타내었다. 여기서 정약용은 교환법칙을 이해하여 중복되지 않도록 순서를 정했으며, 구멱과 고멱은 각각 고현화와 고현교, 구현화, 구현교를 사용하여 나타낼 수 있다는 사실을 밝혀 제외하였다. 이는 정약용이 조합론의 기본을 정확히 이해하였음을 나타낸다. 이러한 점들을 바탕으로『구고원류』는 구고술에 관한 산서가 아니고 3원 다항식에 관한 순수 대수학 책으로 이는 동양 산학에서는 아닐지라도 조선 산학에서는 유일한 책임을 주장하였다.

한편,『구고원류』에 대한 지금까지의 연구는 주로 다산학회를 중심으로『구고원류』가 정약용의 저술인지 아닌지에 대한 논의가 주된 주제였으며 이와 관련된 연구와 논의 [10, 13]는 활발하게 진행되었으나 그 결론은 아직도 불분명하다. 일본인 학자 가와하라 히데키(川原秀城)는 그의 논문에서『구고원류』의 표지 및 제1권과 제2권의 권두에 '勾股源流 洌水丁鏞著'라고 적혀 있고 제3권의 권두에는 '勾股源流 丁鏞著'라고 기록되어 있는 점과 위작이라고 적극적으로 단정할 만한 이유도 없으므로 우선 정약용 본인의 저작으로 생각하고『구고원류』의 내용 중 일부에 대하여 고찰을 진행하였다. 가와하라는『구고원류』를 정약용의 저술로 보고 있지만, 그 내용에 대해서는 다음과 같이 낮게 평가하고 있다.

> 정약용이『勾股源流』에서 논한 것은 구고형에 관한 갖가지 허다한 공식이며, 공식의 증명이 없을 뿐 아니라 공식의 의미를 설명하는 산도算圖도 없다. 즉, 단지 구고현의 화교和較나 적멱積冪 등 동아시아 전통의 수학개념을 종횡으로 조합하여 언어표기로써 각종의 공식을 설명한 것이다. 서명書名인『구고원류』가 그 수학서로서의 보수적인 성격을 잘 말해 준다. 동아시아의 전통에는 존재하지 않는, 증명을 중시하는『기하원본』의 연역적演繹的 사고법의 영향을 정약용의 수학서에서는 조금도 찾아볼 수 없다 [10, p. 52].

한편, 신동원은 가와하라의 논문에 대한 논평에서『구고원류』의 진위 여부를 언급하는 과정에서 정약용의 자찬묘지명이나 다른 저술 어디에도『구고원류』에 대한 정보가 나타나 있지 않다고 밝히고 있다.

> 정약용은『자찬묘지명』에서 자신이 쓴 책을 밝히고 있으며, 책이 아니라 해도

> 자신이 관심을 가졌던 저작의 범위를 밝혀 놓았다. 하지만 거기서『구고원류』라는 책은 보이지 않으며, 심지어 수학 분야의 책을 썼다는 내용도 보이지 않는다. 또한 현재 남아 있는 정약용의 저술 그 어디에도 이 책에 대한 정보가 담겨 있지 않다. 유일한 근거는 가와하라 교수가 지적한 이 책 권두에 적힌 '구고원류 열수정용저' 라 적힌 구절뿐이다. 이를 근거로 가와하라 교수는 "위작이라고 적극적으로 단정할 이유가 없다" 고 하면서, 이 저작을 정약용의 정본으로 간주했다 [13, p. 112].

또한,『구고원류』의 진위 여부에 대한 연구로 김언종의 연구 [11]를 살펴볼 필요가 있다. 김언종은『여유당전서보유』제1책에서 제5책에 포함된 43종의 저술들 각각에 대하여 진위여부를 제시하고 있다. 이중『구고원류』에 대한 진위에 대해서는 열수정용저의 필체가 다산의 필체가 아님을 분명히 밝히며 이를 통해 다산의 저술로 보기는 어렵다고 추정을 하면서 정확한 판단을 위해서 관련 분야 전문가의 구체적인 검토가 필요함을 언급하였다. 또한 김언중은 중세 동아시아 과학사에 관한 연구자로 동경에 체류중인 안대옥 박사의 의견을 인용하여 다음과 같이 주장하고 있다.

> 1) 구고원류의 수준은 높지 않다. 2)『구고원류句股源流』는 피타고라스정리의 단순한 응용에 불과하므로 당시 조선의 수학의 수준에서 보더라도 내용적으로 별 가치를 찾기 어렵다. 3) 피타고라스 정리의 응용에 불과한 것을 "원류源流" 라 명명한 것이 이상하다. 안박사의 이러한 세 가지 지적은 많은 시사를 한다. 천재적인 다산이 과연 단순 반복에 지나지 않는 미련한 작업을 수행하였을지 의심이 간다. 이런 까닭에 필자 또한 구체적 증거가 없으면서도 "구고원류열수정용저句股源流洌水丁鏞著" 라는 다산의 필체가 아닌 아홉 자만으로는 다산의 저술로 여기기 어렵다는 추정을 하면서 전문가의 구체적인 검토를 기다리고자 한다 [11, 326–327].

한편 신동원은 가와하라 교수의 논문에 대한 논평에서『구고원류』의 내용 분석에 앞서 저서의 진위여부를 먼저 분명히 밝혀야 함을 다음과 같이 밝히고 있다.

> 위작이 많다고 여겨지는 정약용 저작의 경우라면, 나는 본격적인 내용 분석에 앞서 "적극적" 으로 위작 여부를 따지는 것이 급선무라고 생각한다. 그렇지 않고 그것을 곧바로 정본으로 간주해 논의를 펼친다면, 자칫 모든 빛나는 분석과 해석마저 사상누각이 될 위험성이 있다 [13, 111–112].

하지만 이러한 주장에 대하여 본 연구자의 생각은 다르다. 즉,『구고원류』가 정약용의 저술인지 아닌지라는 진위 여부를 결정하는데 무엇보다도 내용에 대한 분석이 그 근거가 될

수 있다고 본다. 김언중의 논문 [11]에서 청대 산학서와의 비교를 위해『천학초함』의『기하원본』이나『구고의』와 비교한 것이나 신동원이 윤태주의 미발간 논문에 있는『구일집』이나『동산초』와의 비교를 언급한 내용을 보면 결국 진위여부의 결정에서 필체나 정약용의 수학에 대한 생각 등을 기초로 판단하기 보다는『구고원류』의 내용을 기반한 판단이 무엇보다도 필요하다.

뿐만 아니라, 저술의 진위여부를 떠나 이 책에 제시된 구고술과 관련된 많은 내용을 분석하여 제시하는 연구는 그 자체로도 분명히 필요하며 이를 통해, 이 책이 당시 조선 산학에서 어떠한 위치에 있으며 어떤 가치가 있는지를 생각해 볼 수 있다고 본다.

4 『구고원류』의 내용과 표현방법 분석

『구고원류』는 530페이지에 달하는 방대한 분량으로 모두 3권으로 구성되어 있다. 경인문화사의 영인본[1]을 보면 제1권은 1～184쪽, 제2권은 185～378쪽이며 제1권과 제2권의 첫 부분에 "勾股源流 洌水丁鏞著"라고 제시되어 있다. 제3권은 379～530쪽이며 제3권의 첫 부분에는 "勾股源流 丁鏞著"라고 앞과는 조금 다르게 나와 있다.

또한 내용적으로는 크게 두 부분으로 나누어진다. 첫 번째 부분은 구고현화교상구법(勾股弦和較相求法)으로 제1권의 1～29쪽에 해당하며, 두 번째 부분은 구고현멱적상구법(勾股弦冪積相求法)으로 제1권의 30쪽 이후와 제2권, 제3권의 전체 내용이 해당한다.

『구고원류』의 내용 제시 방법에서 가장 중요한 특징 중 하나는 동양 산학서의 기본 체계인 "문제–답–풀이" 형식을 따르지 않고, 용어의 뜻을 제시하거나 공식만 나열하고 있다는 점이다. 공식에 대한 설명이나 유도 과정 등에 대한 설명이 전혀 없어 어떻게 그러한 공식을 만들어 냈는지 또한 검증을 했는지를 확인할 수 없다.

이하에서는『구고원류』의 내용 분석을 위해 $\angle C$가 90^o인 직각삼각형에서 직각을 낀 두 변 중 짧은 변을 勾로 하고 기호로 a, 긴 변을 股로 하고 기호로 b, 빗변을 弦으로 하고 기호로 c로 나타내어『구고원류』에 제시된 다양한 공식을 분석한다.

4.1 구고현화교상구법의 내용과 표현방법 분석

제1권의 첫 부분은 구고현화교상구법으로 직각삼각형의 구, 고, 현과 이를 이용한 화(和)와 교(較)에 관한 기본공식을 제시하고 구고술에 대한 기초이론을 설명하고 있다. "구고현화교상구법"이라는 용어는『수리정온』하편 제12권에 나온다. 정약용보다 이른 시기인 황윤석의 산학본원과 홍대용의 주해수용에서 이미『수리정온』을 인용하고 있으며,『수리정온』을 가장 정확하게 이해한 산서로 알려져 있는『수리정온보해』가 이미 1730년에 출판된 것으로 보아[10] 정약용도 당시에『수리정온』을 연구하였다고 볼 수 있다.『수리정온』에서는 12권～13권에 걸쳐 상구법에 대하여 모두 60항목을 들고 있다. 다만『수리정온』

에서는 “화”, “교”에 대한 용어가 조금 다른데, 예를 들면, 현교교를 “弦與勾股較之較”와 같이 나타내고 있다. 또한, 정약용은 각각의 정의를 기술한 다음, 勾(a), 股(b), 弦(c), 勾股和$(b+a)$, 勾股較$(b-a)$, 勾弦和$(c+a)$, 勾弦較$(c-a)$, 股弦和$(c+b)$, 股弦較$(c-b)$, 弦和和$(a+b+c)$, 弦和較$(b+a-c)$, 弦較和$(b-a+c)$, 弦較較$(c-b+a)$, 五和併$(2a+4b+4c$ = 句股和+股弦和+句弦和+弦較和+弦和和), 五較併$(2c$ = 句股較+股弦較+句弦較+弦和較+弦較較)의 순으로 각 요소가 다른 어떤 요소의 덧셈과 뺄셈에 의해 얻어지는지를 설명하는데, 여기서 『수리정온』에서와 같이 $+$, $-$를 각각 다(多), 소(少)를 이용하여 나타내고 있다.

구고현화교상구법 부분에서 제시되는 내용과 제시방식을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 勾股較, 勾股和, 股弦較, 股弦和, 勾弦較, 勾弦和, 弦和較, 弦較和, 弦和和(또는 總和), 弦較較를 정의하고 있다. 이를 현대적인 문자 기호를 사용하여 표현하면 다음 Table 1과 같다. 『수리정온』에는 이와 관련된 45개의 예제를 이용하여 설명하는데, 모든 경우에 도형의 넓이를 이용하고 있다. 이에 비하여 정약용은 다양한 규칙과 공식을 제시할 뿐, 예제나 문제를 전혀 사용하지 않고 있다.

이름	설명	기호표현
勾股較	勾股相減 曰勾股較	$b-a$
勾股和	勾股相加 曰勾股和	$b+a$
股弦較	股弦相減 曰股弦較	$c-b$
股弦和	股弦相加 曰股弦和	$c+b$
勾弦較	勾弦相減 曰勾弦較	$c-a$
勾弦和	勾弦相加 曰勾弦和	$c+a$
弦和較	勾股和與弦相減 曰弦和較	$b+a-c$
弦較和	勾股較與弦相減 曰弦較和	$b-a+c$
弦和和(總和)	勾股和與弦相加 曰弦和和 又曰總和	$a+b+c$
弦較較	勾股較與弦相減 曰弦較較	$c-b+a$

Table 1. Wuhe and wujiao; 5화와 5교

둘째, 구, 고, 현 사이의 관계를 다음 Table 2와 같이 간단히 제시한다. 먼저 구고현의 정리에 의해 구, 고, 현을 이용하여 각각 현, 고, 구를 구하는 공식을 차례로 제시한다. 여기에 제시된 내용은 이미 『주비산경』에서부터 제시되어 있는 것으로 “구와 고를 각각 제곱하여 더하면 현의 제곱이 되며, 이것의 제곱근을 구하면 현이다”라는 내용이다. 정약용이 제시한 다양한 등식들은 이를 이용하면 간단히 검증되는 경우가 많다.

[원문] 弦和和冪 卽弦冪勾股相乘積勾弦相乘積股弦相乘積各二 [9, p. 31]

[번역] 현화화의 제곱은 현의 제곱과 구고의 곱과 구현의 곱과 고현의 곱이 각각 2배이다.

[기호표현]

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)\\ &= c^2+c^2+2(ab+ac+bc)\\ &= 2(c^2+ab+ac+bc)\end{aligned}$$

구하는 것	설명	기호표현
弦	勾股各自乘倂之爲弦冪 開方得弦	$a^2+b^2=c^2,\ c=\sqrt{a^2+b^2}$
股	勾弦各自乘相減餘爲股冪 開方得股	$c^2-a^2=b^2,\ b=\sqrt{c^2-a^2}$
勾	股弦各自乘相減餘爲勾冪 開方得勾	$c^2-b^2=a^2,\ a=\sqrt{c^2-b^2}$

Table 2. The Pythagorean theorem; 구고현의 정리

셋째, 앞서 제시한 10개의 교와 화의 정의를 이용하여 각각 구, 고, 현을 구하는 방법을 제시한다. 구와 고를 구하는 방법은 14가지, 현을 구하는 방법은 15가지가 제시되어 있다. 각각의 방법들은 그 순서에 따라 유사한 대상의 연산이 제시되어 있는데, 구화 고의 경우는 오화병과 오교병으로 끝을 맺지만 현의 경우에는 마지막 15번째 규칙으로 "勾股和減弦和較"가 추가 되어 있다.

넷째, 앞서 제시한 10개의 교와 화의 정의에서 구, 고, 현 등을 빼거나 더하는 연산을 통해 얻어지는 결과를 모두 28가지(빼기 14가지, 더하기 14가지)로 제시하고 있다. 특히, 주어진 것에서 빼는 경우에 큰 수에서 작은 수를 빼는 순서를 고려하여 "減A卽B"와 "減於A 卽B"로 나타내었다.

[원문] 減勾弦較 卽股 減於股弦和 卽勾 [9, p. 19]

[해석] 구현교를 빼면 고이다. 고현화에서 빼면 구이다.

[기호표현] $(b-a+c)-(c-a)=b,\ (c+b)-(b-a+c)=a$

다섯째, 빼는 두 대상의 크기가 상황에 따라 다를 수 있으면 "A與B相減 卽"으로 제시하고 A>B인 경우에는 "A多則 B"로 B>A인 경우에는 "B多則 A"로 규칙을 나타내고 있다.

[원문] 與勾股較相減 卽一弦二勾與二股之較 弦較較多 則爲一弦二勾內少二股 勾股較多 則爲二股內少一弦二勾 [9, p. 21]

[해석] 구고교와의 차는 1현2구와 2고의 교이다. 현교교가 많다면 1현2구보다 2고만큼 적고, 구고교가 많다면 2고보다 1현2구만큼 적다.

[기호표현] $(c-b+a)-(b-a)=(c+2a)-2b,\ (b-a)-(c-b+a)=2b-(c+2a)$

여섯째, 빼거나 더하는 대상의 순서는 정확히 일치하지는 않지만 구, 고, 현, 구고교, 구고화, 구현교 등으로 앞서 각각의 정의를 제시한 순서와 같다. 다음 Table 4는 구고화를 기준으로 빼거나 더하여 얻어진 다양한 결과이며, 구고교, 구현화, 구현교, 고현화, 고현교, 현화화, 현화교, 현교화, 현교교의 경우도 마찬가지 방식으로 제시되어 있다.

구	고	현
弦減勾弦較 $c-(c-a)$	弦減股弦較 $c-(c-b)$	勾加勾弦較 $a+(c-a)$
勾弦和減弦 $(c+a)-c$	股弦和減弦 $(c+b)-c$	勾弦和減勾 $(c+a)-a$
股減勾股較 $b-(b-a)$	勾加勾股較 $a+(b-a)$	股加股弦較 $b+(c-b)$
勾股和減股 $(b+a)-b$	勾股和減勾 $(b+a)-a$	股弦和減股 $(c+b)-b$
弦和和減股弦和 $(a+b+c)-(b+c)$	弦和和減勾弦和 $(a+b+c)-(c+a)$	弦和和減勾股和 $(a+b+c)-(c+a)$
弦和較加股弦較 $(b+a-c)+(c-b)$	弦和較加勾弦較 $(b+a-c)+(c-a)$	弦較較加勾股較 $(c-b+a)+(b-a)$
弦較較減股弦較 $(c-b+a)-(c-b)$	勾弦和減弦較較 $(c+a)-(c-b+a)$	勾弦較股弦較弦和較併 $(c-a)+(c-b)+(b+a-c)$
股弦和減弦較和 $(c+b)-(b-a+c)$	弦較和減勾弦較 $(b-a+c)-(c-a)$	弦較和減勾股較 $(c+b-a)-(b-a)$
勾股和減勾股較折半 $\frac{1}{2}\{(b+a)-(b-a)\}$	勾股和加勾股較折半 $\frac{1}{2}\{(b+a)+(b-a)\}$	勾弦和加勾弦較折半 $\frac{1}{2}\{(c+a)+(c-a)\}$
弦和較加弦較較折半 $\frac{1}{2}\{(b+a-c)+(c-b+a)\}$	股弦和減股弦較折半 $\frac{1}{2}\{(c+b)-(c-b)\}$	股弦和加股弦較折半 $\frac{1}{2}\{(c+b)+(c-b)\}$
弦和和減弦較和折半 $\frac{1}{2}\{(a+b+c)-(b-a+c)\}$	弦和較加弦較和折半 $\frac{1}{2}\{(a+b+c)+(b-a+c)\}$	弦和和減弦和較折半 $\frac{1}{2}\{(a+b+c)-(b+a-c)\}$
勾弦和減勾弦較折半 $\frac{1}{2}\{(c+a)-(c-a)\}$	弦和和減弦較較折半 $\frac{1}{2}\{(a+b+c)-(c-b+a)\}$	弦較和加弦較較折半 $\frac{1}{2}\{(b-a+c)+(c-b+a)\}$
五和併內減四箇股弦和折半 $\frac{1}{2}\{\text{오화병}-4(c+b)\}$	五和併內減兩弦及兩箇勾弦和四歸 $\frac{1}{4}\{\text{오화병}-2c-2(c+a)\}$	五和併內減兩股及兩箇勾股和四歸 $\frac{1}{4}\{\text{오화병}-2b-2(b+a)\}$
五較併內減弦及勾弦較 $\text{오교병}-c-(c-a)$	五較併內減弦及股弦較 $\text{오교병}-c-(c-b)$	五較併折半 $\frac{1}{2}\text{오교병}$
		勾股和減弦和較 $(b+a)-(b+a-c)$

Table 3. To find gou, gu and xian with gou, gu, xian, wuhe and wujiao; 구, 고, 현 및 5화와 5교를 이용하여 구, 고, 현 구하기

4.2 구고현멱적상구법의 내용과 표현방법 분석

구고현멱적상구법은 1권의 30쪽부터 시작하여 2권과 3권에 걸쳐 다루어지고 있는데, 제1권에서는 현화화를 중심으로 한 공식이 제시되어 있고, 제2권에서는 현화교와 현교화를 중심으로 하는 공식이 제시되어 있으며, 제3권에서는 현교교, 구고화, 구고교, 구현화, 구현교, 고현화, 고현교를 중심으로 하는 공식이 제시되어 있다. 이들 공식의 제시 형식은 기본적으로 “A冪B乘 與C乘D 相加～, 相減～”의 형태이다. 여기서 A, B, C, D에 해당하는

	연산	설명	기호표현
勾股和 $b+a$	減~	減勾 卽股	$(b+a)-a=b$
		減股 卽勾	$(b+a)-b=a$
		減弦 卽弦和較	$(b+a)-c=$ 현화교
		減勾股較 卽二勾	$(b+a)-(b-a)=2a$
		減於勾弦和 卽股弦較	$(c+a)-(b+a)=c-b$
		減勾弦較 卽弦和較多一勾	$(b+a)-(c-a)=\{(b+a)-c\}+a$
		減於股弦和 卽勾弦較	$(c+b)-(b+a)=(c-a)$
		減股弦較 卽弦和較多一股	$(b+a)-(c-b)=\{(b+a)-c\}+b$
		減於弦和和 卽弦	$(a+b+c)-(b+a)=c$
		減弦和較 卽弦	$(b+a)-\{(b+a)-c\}=c$
		與弦較和相減 卽一弦二勾之較 勾股和多 則爲二勾內少一弦 弦較和多 則爲一弦內少二勾	$\{(b-a)+c\}-(b+a)=c-2a$, $(b+a)-\{(b-a)+c\}=2a-c$
		減弦較較 卽二股少一弦	$(b+a)-(c-b+a)=2b-c$
		減於五和併 卽四弦三股一勾併	오화병$-(b+a)=4c+3b+a$
		減於五較併 卽勾弦較股弦較併	오교병$-(b+a)=(c-a)+(c-b)$
	加~	加勾 卽二勾一股併	$(b+a)+a=2a+b$
		加股 卽二股一勾併	$(b+a)+b=2b+a$
		加弦 卽弦和和	$(b+a)+c=$ 현화화
		加勾股較 卽二股	$(b+a)+(b-a)=2b$
		加勾弦和 卽弦和和多一勾	$(b+a)+(c+a)=\{(b+a)+c\}+a$
		加勾弦較 卽股弦和	$(b+a)+(c-a)=(c+b)$
		加股弦和 卽弦和和多一股	$(b+a)+(c+b)=\{(b+a)+c\}+b$
		加股弦較 卽勾弦和	$(b+a)+(c-b)=(c+a)$
		加弦和和 卽二勾二股一弦併	$(b+a)+(a+b+c)=2a+2b+c$
		加弦和較 卽二勾二股少一弦	$(b+a)+(b+a-c)=2a+b-c$
		加弦較和 卽二股一弦併	$(b+a)+(b-a+c)=2b+c$
		加弦較較 卽二勾一弦併	$(b+a)+(c-b+a)=2a+c$
		加五和併 卽五股四弦三勾併	$(b+a)+$오화병$=5b+4c+3a$
		加五較併 卽弦和和多一弦	$(b+a)+$오교병$=(a+b+c)+c$

Table 4. Various results with gouguhe; 구고화를 이용하여 얻을 수 있는 다양한 결과

내용은『구고원류』전체에 걸쳐서 "현화화→현화교→현교화→현교교→구고화→구고교→구현화→구현교→고현화→고현교"의 순서로 차례대로 제시되고 있다. 그런데 491번부터 C에 해당하는 부분에서 "현교교, 구고화, 구고교, 구현화, 구현교, 고현화, 고현교" 에 관련된 규칙이 28가지가 제시될 수 있는데 본문에서는 이 중에서 4개의 규칙만 제시되어 있고 나머지 24개의 규칙은 제시되어 있지 않다.

구고현멱적상구법 부분에서 제시되는 내용과 제시방식을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 17~21번까지 공식은 구고현멱과 그들 사이의 관계를 설명하는데 사용되는 기본적인 공식들을 다룬다. 17번은 구고적(勾股積)의 개념과 구하는 방법을 다루고 있으며, 18~20번에서는 각각 구의 제곱, 고의 제곱, 현의 제곱을 구하는 방법을 설명하고 있다. 21번에서는 구, 고, 현의 제곱을 각각 곱한 결과에 대하여 다루고 있다.

[원문] 勾股積 卽勾股相乘折半 亦卽弦較和弦較較相乘四歸 亦卽弦和和弦和較相乘四歸 亦卽勾股和冪弦冪相減四歸 亦卽弦冪勾股較冪相減四歸 [9, p. 30]

[해석] 구고적은 구와 고를 서로 곱한 것의 절반이다. 또한 현교화와 현교교를 서로 곱한 것을 4로 나눈다. 또한 현화화와 현교화를 서로 곱한 것을 4로 나눈다. 또한 구고화의 제곱과 현의 제곱의 차를 4로 나눈다. 또한 현의 제곱과 구고교의 제곱의 차를 4로 나눈다.

[기호표현]

$$\begin{aligned}\text{구고적} &= \frac{1}{2}ab = \frac{1}{4}(b-a+c)(c-b+a) \\ &= \frac{1}{4}(a+b+c)(b+a-c) = \frac{1}{4}\{(b+a)^2-c^2\} = \frac{1}{4}\{c^2-(b-a)^2\}\end{aligned}$$

둘째, 22번부터 75번까지 공식의 제시 형식은 "A冪與B乘C 相加～相減"을 기본으로 한다.

먼저, "현화화"부터 시작한다. 22번 공식은 (현화화, 현화화)의 경우로 현화화멱에 대한 공식이다. 이어서 현화화멱을 기본으로 하여 현화화와 현화교의 곱을 더하고 뺀 결과를 제시한다. 이어서 C에 해당하는 현화교를 각각 현교화부터 고현교까지 변화시킬 때 나타나는 공식(23～31번)을 제시한다. 이러한 "A冪與B乘C 相加～相減 ～"의 공식은 33～40번, 42～47번, 49～54번, 56～60번, 62～65번, 67～69번, 71～72번, 74번에서도 동일하게 제시된다. 32번 공식은 B와 C가 모두 현화교의 경우로 "B乘C는 B冪"과 같으므로 "A冪與B冪 卽～"의 형식으로 41번, 48번, 55번, 61번, 66번, 70번, 73번, 75번 공식도 동일하다.

셋째, 모든 공식 또는 규칙들은 주어진 것을 더하는 경우(相加)와 빼는 경우(相減)의 순서로 제시되어 있으며 같은 규칙을 얻을 수 있는 공식이 다양하게 존재하는 경우에는 "역즉(亦卽)"을 이용하여 다양한 공식을 제시하고 있다.

[원문] 弦和和冪與弦和較乘弦較較積 相加 卽勾乘弦和和二倍多股乘弦四倍 亦卽弦乘弦和和多股乘弦較較之二倍 相減 卽弦乘勾弦和多股乘勾股和之二倍 亦卽勾乘弦和和二倍多股冪四倍 [9, p. 35]

[해석] 현화화의 제곱과 현화교와 현교교를 곱한 적을 더하면 구와 현화화의 곱의 2배와 고와 현의 곱의 4배를 합한 것이다. 또한 현과 현화화의 곱과 고와 현교교의 곱을 합한 것의 2배이다. 빼면 현과 구현화이 곱과 고와 구고화의 곱을 합한 것의 2배이다. 또한 구와 현화화의 곱의 2배와 고의 제곱의 4배를 합한 것이다.

[기호표현]

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2+(b+a-c)(c-b+a) &= 2a(a+b+c)+4bc \\ &= 2\{c(a+b+c)+b(c-b+a)\} \\ (a+b+c)^2-(b+a-c)(c-b+a) &= 2\{c(c+a)+b(b+a)\} \\ &= 2a(a+b+c)+4b^2\end{aligned}$$

넷째, 반대 순서로 빼는 규칙을 제시하는 경우는 "반감칙(反減則)"을 이용하여 공식을 제시하고 있다.

<table>
<tr><th>번호</th><th>A</th><th>B</th><th>C</th><th>D</th><th colspan="2">규칙의 개수</th></tr>
<tr><td>22</td><td>현화화</td><td></td><td></td><td rowspan="19"></td><td rowspan="19">54</td><td rowspan="30">476</td></tr>
<tr><td>23~31</td><td rowspan="18">현화화</td><td>현화화</td><td>현화교→고현교</td></tr>
<tr><td>32</td><td>현화교</td><td></td></tr>
<tr><td>33~40</td><td>현화교</td><td>현교화→고현교</td></tr>
<tr><td>41</td><td>현교화</td><td></td></tr>
<tr><td>42~47</td><td>현교화</td><td>구고화→고현교</td></tr>
<tr><td>48</td><td>현교교</td><td></td></tr>
<tr><td>49~54</td><td>현교교</td><td>구고화→고현교</td></tr>
<tr><td>55</td><td>구고화</td><td></td></tr>
<tr><td>56~60</td><td>구고화</td><td>구고교→고현교</td></tr>
<tr><td>61</td><td>구고교</td><td></td></tr>
<tr><td>62~65</td><td>구고교</td><td>구현화→고현교</td></tr>
<tr><td>66</td><td>구현화</td><td></td></tr>
<tr><td>67~69</td><td>구현화</td><td>구현교→고현교</td></tr>
<tr><td>70</td><td>구현교</td><td></td></tr>
<tr><td>71~72</td><td>구현교</td><td>고현화→고현교</td></tr>
<tr><td>73</td><td>고현화</td><td rowspan="3">고현교</td></tr>
<tr><td>74</td><td>고현화</td></tr>
<tr><td>75</td><td>고현교</td></tr>
<tr><td>76</td><td>현화화</td><td>현화교</td><td></td><td></td><td rowspan="11">53</td></tr>
<tr><td>77~84</td><td rowspan="10">현화화</td><td rowspan="10">현화교</td><td>현화화</td><td>현교화→고현교</td></tr>
<tr><td>85~93</td><td>현화교</td><td>현화교→고현교</td></tr>
<tr><td>94~100</td><td>현교화</td><td>현교화→고현교</td></tr>
<tr><td>101~107</td><td>현교교</td><td>현교교→고현교</td></tr>
<tr><td>108~113</td><td>구고화</td><td>구고화→고현교</td></tr>
<tr><td>114~118</td><td>구고교</td><td>구고교→고현교</td></tr>
<tr><td>119~122</td><td>구현화</td><td>구현화→고현교</td></tr>
<tr><td>123~125</td><td>구현교</td><td>고현화→고현교</td></tr>
<tr><td>126~127</td><td>고현화</td><td>고현교</td></tr>
<tr><td>128</td><td>고현교</td><td>고현교</td></tr>
</table>

Table 5. The contents of the rule from 22 to 128 in vol.1; 제1권 규칙 22～128의 내용

[원문] 弦較較冪與勾股較乘勾弦和積 相加 卽弦乘弦較較多股乘勾股較 亦卽弦乘勾弦和少股乘弦較較 相減 卽弦乘弦較較三倍少股乘勾股和及二勾 反減則多少相反 [9, p. 383]

[해석] 현교교의 제곱과 구고교와 구현화를 곱한 적을 더하면 현과 현교교의 곱보다 고와 구고교의 곱만큼 많다. 또한 현과 구현화의 곱보다 고와 현교교의 곱만큼 적다. 빼면 현과 현교교의 곱을 3배한 것보다 고를 구고화와 2구에 곱한 것만큼 적다. 반대로 빼면 많고 적음은 서로 반대가 된다.

[기호표현]

$$(c-b+a)^2+(b-a)(c+a)=c(c-b+a)+b(b-a)$$
$$=c(c+a)-b(c-b+a)$$
$$(c-b+a)^2-(b-a)(c+a)=3c(c-b+a)-b\{(b+a)+2a\}$$
$$(b-a)(c+a)-(c-b+a)^2=b\{(b+a)+2a\}-3c(c-b+a)$$

다섯째, 적의 2배를 더하거나 빼는 경우 또는 적의 2배에서 뺀 공식을 제시하는 경우에는 “가배적(加倍積)”, “감배적(減倍積)” 또는 “반감어배적(反減於倍積)”을 이용하여 나타낸다.

[원문] 弦和和冪與勾弦和乘股弦較積 相加 卽勾弦和乘二弦及股弦和 加倍積 卽弦乘勾弦和四倍 相減 卽勾弦和乘二股及股弦和 減倍積 卽股乘勾弦和四倍 [9, p. 47]

[해석] 현화화의 제곱과 구현화와 고현교를 곱한 적을 더하면 구현화와 2현의 곱과 고현화의 합이다. 적의 2배를 더하면 현과 구현화의 곱의 4배이다. 빼면 구현화와 2고의 곱과 고현화의 합이다. 적의 2배를 빼면 고와 구현화의 곱의 4배이다.

[기호표현]

$$(a+b+c)^2 + (c+a)(c-b) = 2c(c+a) + (c+b)$$
$$(a+b+c)^2 + 2(c+a)(c-b) = 4c(c+a)$$
$$(a+b+c)^2 - (c+a)(c-b) = 2b(c+a) + (c+b)$$
$$(a+b+c)^2 - 2(c+a)(c-b) = 4b(c+a)$$

여섯째, 빼는 두 수가 같아 결과가 0이 되는 경우는 “흡진(恰盡)”을 이용하여 나타낸다.

[원문] 弦和和冪與勾弦和乘股弦和積 相加 卽勾弦和乘股弦和之三倍 相減 卽勾弦和乘股弦和 減倍積 恰盡 [9, p. 47]

[해석] 현화화의 제곱과 구현화와 고현화를 곱한 적을 더하면 구현화와 고현화의 곱의 3배이다. 빼면 구현화와 고현화의 곱이다. 적의 2배를 빼면 그 차이는 똑같아서 0이다.

[기호표현]

$$(a+b+c)^2 + (c+a)(c+b) = 2(c+a)(c+b)$$
$$(a+b+c)^2 - (c+a)(c+b) = (c+a)(c+b)$$
$$(a+b+c)^2 - 2(c+a)(c+b) = 0$$

일곱째, 제2권의 구고현멱적상구법은 영인본 185～378쪽에 해당하며 제1권에 이어서 구고현멱적상구법의 규칙 중에서 495～1079번까지 규칙이 제시되어 있다. 제2권의 규칙들은 “현화교멱”과 “현교화멱”을 기본으로 하는 공식들이다. 특히, 855～889번까지는 “현교화멱”, 890번에서는 “현교화멱승현교교적”의 결과를 다루는데 “현교화”를 “현교화멱”으로 제시한 오류가 나타난다. 즉, 17번 공식에 따르면 구고적은 현교화와 현교교를 곱한 것의 4배임을 알 수 있다. 890번 공식에서는 현교화멱과 현교교적을 곱한 것으로 제시하고 있는데, “현교화멱”을 “현교화”로 고쳐야 한다.

[원문] 弦較和冪乘弦較較積 卽勾股積四倍 其加減諸數與弦和和乘弦和較之加減諸數並同 [9, p. 315]

[해석] 현교화멱과 현교교의 적은 구고적의 4배이다. 이것들을 더하고 뺀 것은 현화화와 현화교를 곱한 것을 더하고 뺀 것과 같다.

[기호표현]

$$(b-a+c)^2(c-b+a) = 4 \times \frac{1}{2}ab \quad (\text{오류수정} \rightarrow (b-a+c)(c-b+a) = 4 \times \frac{1}{2}ab)$$

여덟째, 제3권의 구고현멱적상구법은 영인본 379～530쪽에 해당하며 제1권과 제2권에 이어서 구고현멱적상구법의 규칙 중에서 1080～1541번까지의 규칙이 제시되어 있다. 이 규칙들 중에서 1080～1485번까지 규칙들은 각각 "현교교멱"과 "구고화멱", "구고교멱", "구현화멱", "구현교멱", "고현화멱", "고현교멱"을 기본으로 하는 공식들이며 1486～1541번 규칙들은 구멱, 고멱, 현멱에 관한 공식들을 다룬다. 이중에서 1486과 1487번 규칙은 구멱과 고멱을 다루는데 이들은 각각 고현화와 고현교, 구현화와 구현교를 사용하여 나타낼 수 있다는 사실을 밝혀 제외하였다. 이는 정약용이 조합론의 기본을 정확히 이해하였음을 나타낸다 [3, p. 32].

[원문] 勾冪 其加減諸數與股弦和乘股弦較之加減諸數幷同

股冪 其加減諸數與勾弦和乘勾弦較之加減諸數幷同 [9, p. 511]

[해석] 구멱과의 합과 차는 고현화와 고현교의 곱의 합과 차와 같다.

고멱과의 합과 차는 구현화와 구현교의 곱의 합과 차와 같다.

5 결론

정약용의『구고원류』는 많은 동양 산학서에서 다루어졌던 구고술, 그 중에서도 특히 5화와 5교를 활용하여 유도할 수 있는 방대한 양의 공식들을 체계화하여 종합적으로 제시한 것으로 볼 수 있다. 정약용은『구고원류』에서 구, 고, 현 및 이를 통해 만들어지는 5화와 5교 그리고 이들을 이용하여 만들어낼 수 있는 1541개의 공식을 제시하였다. 이 중에서 구고현화교상구법의 내용은 이미 동양의 다양한 산서에서 계속적으로 기술되고 활용된 부분이지만, 구고현멱적상구법의 내용은『수리정온』등에서 일부의 공식만이 제시되어 있을 뿐이다. 이러한 사실은 그동안『구고원류』가 정약용의 저술인지 아닌지에 대한 진위 여부의 판단에 추가적인 증거를 제시한다고 생각한다. 즉, 이전의 산학서에서 구, 고, 현 및 5화와 5교에 관한 극히 일부의 공식만을 다룬 것에 비하여『구고원류』에서는 가능한 모든 경우를 체계적으로 다루었다는 점에서『구고원류』는 정약용의 독창적이고 체계적인 산학 연구의 결과라 보는 것이 타당하다. 또한, 문제-풀이-답의 형식을 따르지 않은 점이나 수를 사용한 특수한 경우의 해법을 찾기보다는 문자를 사용하여 일반적인 공식을 이용한 진술방식은 남병길의『유씨구고술요도해』에서 수치가 없는 일반 해법을 제시한 것에서 찾을 수 있는데, 이 역시 전통적인 동양 산학의 전통과는 다른 독창적인 측면이다.

또한,『구고원류』에 제시된 공식들의 제시 방법을 살펴보면, 현화화를 시작으로 하여 현화교, 현교화, 현교교, 구고화, 구고교, 구현화, 구현교, 고현화, 고현교의 순으로 제시되는데 이는 저자가 조합의 기본적인 아이디어를 이해하였다는 증거가 될 수 있으며, 이러한 방법을 사용하여 가능한 모든 경우를 다루고자 한 저자의 노력을 알 수 있다. 또한, 같은 규칙을 얻을 수 있는 공식이 다양하게 존재하는 경우에 "역즉"을 이용하여 하나의 공식을 다양한 방법으로 제시하고 있다는 점이나 "반감칙", "감배적", "가배적" 등을 사용하여 조건이 달라질 경우를 고려한 것은 구고술에 대한 저자의 깊은 분석과 연구가 있었다는 증거이다.

조선 후기 황윤석의『산학입문』의 구고현법에서는『동문산지』에서 인용한 구, 고, 현과 5화 및 5교의 관계 중 일부 내용을 소개하고 이들 사이의 관계를 설명하고 있다. 이때 현대적인 인수분해의 방법을 활용하면 간단하게 같은 결과임을 확인할 수 있지만, 당시에는 인수분해 개념이 없었으므로 도해를 이용하여 설명하고 있다 [1, p. 215].『구고원류』의 내용의 제시방법을 볼 때, 정약용은 당시 일반적으로 알려진 도해를 이용한 방법을 통해 검증했다기보다는 현대적 의미의 인수분해를 이해하고 활용하여 이러한 공식들을 검증하였다고 보는 것이 타당하다.

References

1. Chang Hye-Won, *Joseon Mathematics from the Mathematics Textbooks*, Kyungmoonsa, 2006. 장혜원, 산학서로 보는 조선 수학, 경문사, 2006.
2. Encyclopedia of Korean Culture. 한민족대백과사전 http://terms.naver.com/entry.nhn?docId=581214&cid=46649&categoryId=46649
3. Hong Sung Sa, Mathematical Structures of Jeong Yag-yong's Gugo Wonlyu, *Proceedings of The Korean Society for History of Mathematics* 25(2) (2015), 29–32. 홍성사, 丁若鏞의 算書 勾股源流의 수학적 구조, *Proceedings of The Korean Society for History of Mathematics* 25(2) (2015), 29–32.
4. Hong Sung Sa, Hong Young Hee, Mathematics in Chosun Dynasty and Si yuan yu jian, *The Korean Journal for History of Mathematics* 20(1) (2007), 1–16. 홍성사, 홍영희, 朝鮮 算學과 四元玉鑑, 한국수학사학회지 20(1) (2007), 1–16.
5. Hong Sung Sa, Hong Young Hee, Kim Chang Il, Gougushu in the 18th century Chosun, *The Korean Journal for History of Mathematics* 20(4) (2007), 1–22. 홍성사, 홍영희, 김창일, 18世紀 朝鮮의 勾股術, 한국수학사학회지 20(4) (2007), 1–22.
6. Hong Sung Sa, Hong Young Hee, Kim Chang Il, Gougushu in the 19th century Chosun, *The Korean Journal for History of Mathematics* 21(2) (2008), 1–18. 홍성사, 홍영희, 김창일, 19世紀 朝鮮의 勾股術, 한국수학사학회지 21(2) (2008), 1–18.
7. Hong Sung Sa, Hong Young Hee, Lee Seung On, Mathematical Structures of Jeong Yag-yong's Gugo Wonlyu, *Journal for History of Mathematics* 28(6) (2015), 301–310.
8. Hong Young Hee, Mathematics of Chosun Dynasty and Shu li jing yun, *The Korean*

Journal for History of Mathematics 19(2) (2006), 25–46. 홍영희, 조선 산학과 수리정온, 한국수학사학회지 19(2) (2006), 25–46.

9. Jeong Yag-yong, *Gugo Wonlyu*, Yeoyudang Jeonseo Boyu four, Gyeongin Munhwasa, 1975. 정약용, 구고원류, 여유당전서보유 4, 다산학회, 경인문화사, 1975.
10. Kawahara Hideki, Cheong Yagyong's Scholarly Works in Scientific Technology, *Journal of TASAN Studies* 13 (2008), 43–75. 가와하라 히데키, 정약용의 과학저작, 다산학 13호, 2008, 43–75.
11. Kim Eon Jong, A Study on the Authenticity of the Pieces Collected in Addendum to the Complete Writings of Yeoyudang, *Journal of TASAN Studies* 11 (2007), 321–353. 김언종, 『여유당전서보유與猶堂全書補遺』의 저작별 진위문제에 대하여(下), 다산학 11호, 2007, 321–353.
12. Kim Young-Sik, *The Science and Technology in Jeong Yag-yong's Thought*, SNU Press, 2006. 김영식, 정약용 사상 속의 과학기술, 서울대학교출판부, 2006.
13. Shin Dongwon, [Comment] KAWAHARA Hideki「Cheong Yagyong's Scholarly Works in Scientific Technology」, Journal of TASAN Studies, 13 (2008), 108–120. 신동원, [논평] 가와하라 히데키「정약용의 과학저작」, 다산학 13호, 2008, 108–120.