

<https://doi.org/10.7236/IIBC.2016.16.6.319>

IIBC 2016-6-40

동식물의 나선축의 하중(荷重) Hadamard Transform : 대칭과 Element-wise Inverse 행렬

Weighted Hadamard Transform in the Helix of Plants and Animals :Symmetry and Element-wise Inverse Matrices

박주용*, 김정수**, 이문호***

Ju-Yong Park*, Jung-Su Kim**, Moon-Ho Lee***

요약 본 논문에서는 나무나 염소 뿔처럼 대부분의 동식물이 대칭임을 살펴본다. 또한 DNA를 가지고 있는 인간의 신체 역시 대칭이다. 피보나치수열, 식물의 나선, 동물의 대수 나선에서 볼 수 있는 것은 대칭이다. 해바라기 꽃은 원형이다. 원은 원점을 중심으로 회전을 해도 모양이 꼭 같으므로 회전대칭이다. 공간상의 회전변환을 넘어서, 시간·공간의 대칭적 변환으로 일반화하면 아인슈타인의 특수상대성 이론이 시공간 변환관계이다. 동식물의 나선은 좌우 나선들이 대칭을 이루며 그 속에는 element-wise inverse가 존재한다. Hadamard 행렬 중 가운데 하중 값을 2로 준 것은 자연 대수의 밑 2와 같고, 나선 행렬은 Symmetric하며 역행렬은 element-wise inverse이다.

Abstract In this paper we investigate that most of plants and animals have the symmetric property, such as a tree or a sheep's horn. In addition, the human body is also symmetric and contains the DNA. We can see the logarithm helices in Fibonacci series and animals, and helices of plants. The sunflower has a shape of circle. A circle is circular symmetric because the shapes are same when it is shifted on the center. Einstein's spatial relativity is the relation of time and space conversion by the symmetrically generalization of time and space conversion over the spacial. The left and right helices of plants and animals are the symmetric and have element-wise inverse relationships each other. The weight of center weight Hadamard matrix is 2 and is same as the base 2 of natural logarithm. The helix matrices are symmetric and have element-wise inverses.

Key Words : Co Hadamard matrix, Symmetry, Element-wise inverse, Helix, Center weighted Hadamard.

1. 서론

일찍이 이탈리아 과학자 갈릴레오 갈릴레이(1564~1642)는 “자연법칙이 수학적임을 명확히 밝힌 학자이다. 그 예는 동식물은 좌우 나선(Helix)형태는 자연의 섭리

알고 있음을 확인 할 수 있다. 그 속에는 대칭(symmetry)이 존재하며 대칭이 되는 것은 Element-wise Inverse가 되기 때문이다. 그 예를 식물과 동물의 나선 속에서 찾고 하중(weighted) Hadamard의 하중 값이 2인 logarithm에 기반 함을 증명한다^[1-6].

*정회원, 신경대학교 ICT융합학과

**정회원, 숭실사이버대학교 컴퓨터정보통신학과

***정회원, 전북대학교 전자정보공학부(교신저자)

접수일자: 2016년 9월 22일, 수정완료: 2016년 10월 22일

게재확정일자: 2016년 12월 9일

Received: 22 September, 2016 / Revised: 22 October, 2016

Accepted: 9 December, 2016

*** Corresponding Author: moonho@jbnu.ac.kr

Dept: Division of Electronic Engineering, Chonbuk National University, Korea

식물은 주어진 공간 정보를 최대한 이용하면서 주어진 공간에서 살아간다. 공간을 최대한 이용하는 방법을 무엇일까? 식물의 개도에 관해서 최초로 언급한 사람은 화가였던 이태리 레오나르도 다빈치(1452~1519)이다. 그는 르네상스 미술의 거장이었을 뿐만 아니라, 비상한 지적 능력을 가진 과학의 선구자였다. 자연의 법칙이 방해 받지 않는다면, 많은 식물의 경우 6번째 잎은 언제나 첫 번째 잎 위에 나온다. 이것은 식물을 위해 두 가지 역할을 한다.

첫 번째는 주어진 공간에 햇빛과 바람, 비를 최대한 받기 위해서 다음해(年)에 이 싹들이 자라면서 서로 덮이지 않도록 하는 것이다. 다섯 개의 가지가 다섯 가지의 서로 다른 방향으로 나아가기 때문에 6번째 가지는 첫 번째 가지 위에 일정한 거리를 두고 나오게 된다. 햇빛이 직접 닿는 꽃은 성숙하지만 햇빛의 반사광만 닿는 꽃은 싹이 성숙되지 않는다. 잎 위에 잎이 나는 방식은 4가지 방식이 있다. 가장 흔한 방식은 6번째 잎이 언제나 6번째 아래의 것 위에 있는 것이다. 두 번째는 2/3만큼 위에 있는 것이 2/3 아래의 것 위에 있는 것이다. 세 번째 방식은 3번째 위의 잎이 3번째 아래의 잎 위에 있는 것이다. 네 번째 방식은 전나무의 방식으로서 잎들이 층층으로 나는 것이다. 그 가지들은 4, 5 또는 6개의 쌍으로 나오며, 제일 위에 나는 싹은 줄기에서 위쪽으로 피라미드를 이룬다. 호두나무나 오크나무에서는 줄기에서 위쪽으로 반구를 이룬다.

두 번째 나뭇잎은 언제나 그 위 부분을 하늘로 향하여 대기 중에서 떨어지는 이슬을 잘 받을 수 있도록 한다. 그리고 나뭇잎은 서로 가리는 일이 없도록 엇갈려 나오는데 이것은 담은 담은 담쟁이덩굴을 관찰함으로써 알 수 있다. 하나는 공기와 태양이 그들 사이를 뚫고 들어갈 수 있는 공간을 남겨 두는 것이고 다른 하나는 첫 번째 잎으로 떨어진 물방울이 네 번째나 여섯 번째 잎 위로 떨어지도록 하기 위한 것이다.

화가라는 직업상 다빈치는 잎이 줄기를 따라 나선형을 그리며 나온다는 사실을 보았고 여기에 일정한 규칙이 있음을 발견하였는데, 무엇보다 가장 많은 식물의 경우 6번째 잎이 첫 번째 잎의 바로 위에 나온다는 것을 알게 된 것이다. 풀이나 텃밭에 나가면 흔히 볼 수 있는 엉겅퀴, 썬바퀴, 냉이, 마초, 명아주, 쑥, 깨 풀, 집시꽃 등 그리고 야무 데서나 자라는 대부분의 풀이나 잎의 배열을 관찰해보면 알 수 있다. 이들은 어느 잎에서든 줄기를 따

라 세어보면 처음 세기 시작한 잎과 6번째 잎은 (정확하지는 않더라도) 거의 같은 방향으로 향해 있다. 수직으로 곧게 자라는 풀 종류(초본 식물)나 줄기에 잎이 어긋나게 자라는 것이라면 거의 예외가 없다. 다빈치는 식물의 잎의 각도가 대체로 $144^\circ(360 \times 2/5)$ 에 가깝다는 사실을 발견한 것이다. 동물에서는 염소 뿔, 고동 등의 나선을 대수(logarithm) 특성을 갖는 것이 특이하다. 본 논문 구성은 다음과 같다. 2장에서는 식물의 나선, 3장에서는 동물의 나선, 4장은 하중(荷重) Hadamard Transform : 대칭과 Element-wise Inverse 행렬, 5장은 Center Weighted Hadamard, 6장은 검토키 그리고 7장에서 결론을 맺는다.

II. 식물의 나선

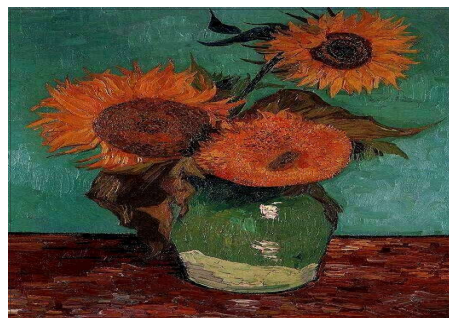


그림 1. 빈센트 반 고흐(1853~1890) “별이 빛나는 밤과 해바라기”

Fig. 1. Vincent Van Gogh(1853~1890) “The Starry Night” and Sunflower.

개도와 함께 항상 언급되는 것은 식물에서 관찰되는 나선들이다. 그림 1의 화가 빈센트 반 고흐의 작품 중 “별이 빛나는 밤에”라는 작품이 있다. 위의 구름을 두개의 나선으로 형성한 대표적인 작품이다. 이것 외에도 고흐는 자신 작품에서 소용돌이 형태의 화법을 구현했다^[6].

반 고흐가 해바라기를 즐겨 그린 시기는 남 프랑스에 도착 후 처음 거처로 삼은 아를르에 있을 때였다. 그는 세 들어 사는 집을 온통 황색 페인트로 칠하고 “황색의 집”이라고 불렀다. 불타는 태양, 해바라기 등 당시 그림은 황색이 주조를 이루었다. 그리고 불꽃처럼 이글거리는 곡선과 휘감아 돌아가는 소용돌이의 질피가 서서히 나타나기 시작했다.

솔방울에는 실편들이 소용돌이 형태로 좌우대칭 나선을 만든다. 여기에는 서로 반대방향으로 회전하는 두 부류의 나선이 55개와 89개, 혹은 89개와 34개이다. 그 외에 밀집된 꽃이나 잎의 배열 등 식물의 도처에 나선이 나타난다. 여기서 특이한 사실은 이 나선들의 숫자가 앞에서 나열한 개도의 분모 또는 분자로 사용한 숫자들이라는 것이다.

하나의 예로써 솔방울의 실편 나선을 그림 2에 보이고 있다.

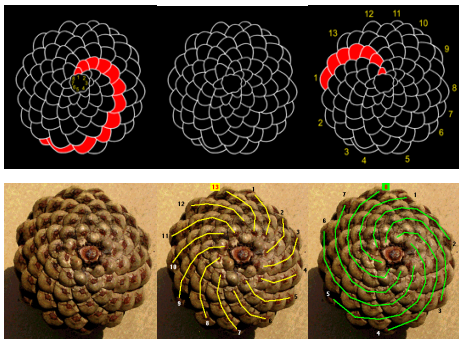
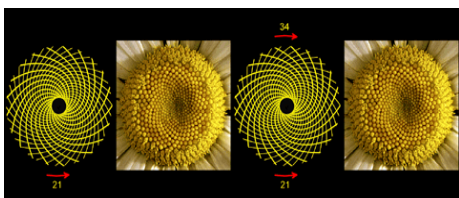


그림 2. 솔방울 나선
 Fig. 2. Pine cone helix.

솔방울에서 나타나는 숫자를 크기순으로 나열하면 다음과 같은 피보나치(Fibonacci) 수열들이다. 즉 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377...

여기서 나선의 수가 이와 같이 되는 것은 우연이 아니다. 그것은 나선형 배열구조를 만들고 있는 개도의 분모, 분자가 그와 같은 숫자로 되었기 때문이다. 즉 나선의 수는 개도 숫자와 직접적으로 관계가 있다.



(a) 원형대칭 해바라기 꽃



- Densification of networks
- Device-to-device
- IoT, etc.
- Important: Most communication is bi-directional (uplink/downlink, feedback, etc.)

(b) 기지국 Femto cell

그림 3 해바라기 나선과 기지국 Femto cell
 Fig. 3. Sunflower helix and base station Femto cell.

한편 그림3 (a),(b)와같이 이동통신 기지국에서는 공간에 촘촘하게 기지국(Base station)을 세워 음영(Shadow)지역을 최소화 한다. 공간 정보를 최적화 한 알고리즘은 해바라기 꽃씨가 공간을 최적화 하는 것과 일치한다.

펄토셀(Femtocell)은 가정이나 소규모 사무실을 위한 초소형 이동통신 기지국이다. 데이터 트래픽 분산 및 음영지역 해소의 목적으로 사용되는데 커버리지는 셀 반경 10m정도이고 Picocell은 30m, Micro cell은 cell반경 250-300m, Macrocell반경은 4-5km이다. 해바라기 꽃 반경은 20-30cm 이다. 모두가 공간 정보를 최대로 이용하는 것이 목표인 것이다.

III. 동물의 나선

앞에서 보았던 해바라기나 고흐의 그림에서 보았던 소용돌이에 대해서는 두 가지의 신기한 사실이 지적된다. 우선, 그 소용돌이의 곡선은 소라껍질이나 짐승의 뿔에서 볼 수 있는 것과 같은 대수나선이라는 것이다. 대수 나선이란 축을 한 바퀴 돌 때마다 일정한 비율로 원점에서 멀어져 가거나 가까워지는 곡선이다. 대수나선은 많은 동 식물 형태에서 발견되는 생명의 나선으로 알려져 있는데, 해바라기의 나선도 그 중의 하나이다. 또 하나는 해바라기의 나선이 피보나치 수이다. 피보나치 수 역시 생명현상과 관련해 불가사의한 의미로 해석한다. 예를 들면 다음과 같은 기록을 볼 수 있다.

“이 구조를 자세히 들여다보면 아주 놀라운 두 가지 사실을 발견할 수 있다. 첫째로는 하나같이 로그나선(대수나선)의 형태를 가지고 있다. 그리고 둘째는 시계 방향으로 도는 나선의 수와 반시계 방향으로 도는 나선의 수가 피보나치수열에서 나오는 연속된 두 항과 일치한다.

이 곡선은 수학에서 흔히 로그나선이라고 하는 것이다. 이 나선이 수많은 자연물에서 발견되고 있는데 그 대표적인 예가 달팽이 껍질이다.”

나선에는 어떤 에너지나 생명의 힘이 응집되어 있는 것으로 알려지고 있다. 무엇보다 나선은 그 형태부터가 원이나 쌍곡선, 다각형에 비하면 낫선 느낌을 주는 도형이다. 평면 위에 구부러진 곡선이 뒤틀어져 3차원 공간에서 꼬이고 틀어진 모습이 한층 심오하고 복잡하다. 용틀임을 한 기둥과 달팽이관 형태는 신비스런 느낌을 준다. 나선은 주로 소용돌이와 회오리바람처럼 정상적인 궤도를 벗어나는 혼돈의 현상에서도 나타난다. 또한 태초의 생명이 탄생한 곳도 공허한 공간 한 구석에서 회오리바람 같이 꼬이는 기체와 액체의 소용돌이였을 것으로 생각된다. 은하의 소용돌이, DNA, 단백질, 황금나선, 앵무조개 등, 나선은 어떤 특별한 힘을 가진 곡선처럼 보인다.

오스트리아의 빅도로 샤우버거(1885~1958)는 나선 모양의 소용돌이 운동에는 에너지를 내부로 응집시키는 작용이 있다고 했다. 여러 가지 형태의 나선 중에 대수나선은 특별한 지위를 가진다. 가로, 세로의 비가 황금비인 직사각형 안에서는 여러 개의 정사각형으로 분할되는데 이에 의해 만들어지는 대수나선은 ‘동적 균형’의 비례가 존재되는 황금 나선이다. 이 나선에 대하여는 식물에서 관찰되는 피보나치 수, 그리고 생명체에서 관찰되지 않은 대수나선들과 연관시킴으로써 생명현상과 관련시킬 수 있다.

대수나선은 달팽이나 조개에게는 분명히 의미 있는 기하학적 성질이 분명하다. 게나 가재와 같이 몸에 단단한 외피를 가지고 있는 갑각류나 파충류는 몸이 성장함에 따라 여러 번 탈피가 불가피하다. 그러나 탈피는 양분과 에너지의 낭비이고, 천적에게 노출되기 때문에 여간 성가신 것이 아니다. 그러나 조개나 달팽이는 단단한 외피를 가지고 있지만 가재나 게처럼 탈피를 하는 낭비를 하지 않는다. 나선형 껍질의 입구 쪽에 계속 석회질을 발라나가기만 하면 자신의 신체 모양을 그대로 유지하면서 외피를 키울 수 있기 때문이다. 이것은 껍질이 크기를 확대하여도 모양이 변하지 않는 대수나선 형태를 하고 있기 때문이다. 따라서 이 점에 있어 대수나선은 분명히 생명의 곡선으로 볼 수 있다. 그림 4에 앵무조개와 우영의 나선을 보이고 있다.

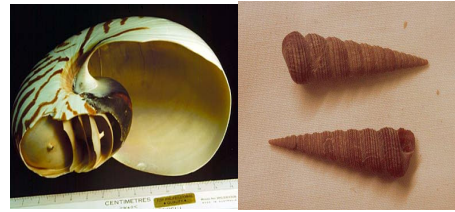


그림 4. 앵무조개와 우영의 나선 대칭
Fig. 4. nautilus and burdock helix Symmetric

IV. 하중(荷重) Hadamard Transform : 대칭과 Element-wise Inverse 행렬

지수 함수의 일반적인 특징을 알아보기 위해서 밑이 2인 지수함수를 선택해 x 의 값을 정수로 한정하면 표 1과 같다.

표 1. 지수함수
Table 1. Exponential function.

n	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
2^n	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16	32

이 값들을 좌표 평면에 점으로 표시하면, 그림 5에 나타난 그래프를 얻는다. 여기서 x 의 값이 증가함에 따라 y 의 값도 증가함을 알 수 있다. 처음에는 천천히 증가하지만, 나중에는 매우 빠르게 증가해서 무한대로 향한다. 반대로 x 의 값이 감소하면 y 의 값은 매우 느린 속도로 감소한다. 그런데 0에는 결코 도달하지 못하지만, 한없이 가까워진다. 그래서 음의 방향의 x 축은 이 함수의 수평 점근선이 된다.

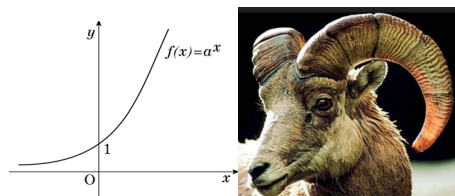


그림 5. 증가하는 지수함수의 그래프와 염소 뿔
Fig. 5. Exponential Function graph and sheep's horn.

예를 들어, 표 1에서 $n=2$ 에 지수는 $2^2=4$ 이고 역은 $\frac{1}{4}$ 이다. 즉 Forward \times Inverse = $1 : 4 \times \frac{1}{4} = 1$ 이며 그림

5는 지수함수곡선이고, 응용은 염소 뿔, 해바라기 꽃 씨알, 앵무새 조개, 송곳니, 고동 등과 같은 자연에서 쉽게 볼 수 있으며, 작품으로 음악가 피첼 작곡과 네덜란드 에스허르 (M.C.Egcher)의 삶의 경로에서 소용돌이 나선을 찾아볼 수 있다.

Bach(1685~1750) 소나타는 음악 첫 옥타브 연주에서 마지막 옥타브를 연주하고, 반대로 마지막 octave에서 첫 octave로 연주해도 똑같이 연주된다. 천재 수학자 Kunt(1906~1978)는 이 원리로 수학정리를 증명했다.

한편, 1614년 Hohn Napier가 Logarithm을 발견했다. 지수함수 곡선에 착안해서 동양의 주역을 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 (a+b)^1 &= a+b && : \text{兩儀} = 1+1=2 \\
 (a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 && : \text{四象} = 1+2+1=4 \\
 (a+b)^3 &= a^3+3ab^2+3a^2b+b^3 && : \text{八卦} = 1+3+3+1=8 \\
 (a+b)^n &= \sum_{r=0}^n nC_r a^{n-r} b^r = nC_0 a^n + nC_1 a^{n-1} b + nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + nC_n b^n
 \end{aligned}$$

$$\text{Cosmos, } \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots \rightarrow 0 : S = \frac{a}{1-r} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$$

$$\begin{aligned}
 a=1, b=x \\
 (1+x)^n &= \sum_{r=0}^n nC_r x^r = nC_0 + nC_1 x + \dots + nC_n x^n \\
 \sum_{r=0}^n nC_r &= 2^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} : \text{Hamming bound}
 \end{aligned}$$

따라서 2를 기반으로 한 현대적 통신 이론으로 보면 2진법 Binary(0, 1) 생성이론이기도 하면서 조합이론 (Combinatorial Theory)과 맥을 같이한다.

이때 e와 2는 다음 관계를 갖고, 1948년 C. G. Shannon은 point-to-point Channel Capacity를 $C = B \log_2(1 + \frac{S}{N})$ 로 유도했다.

$$2 = \frac{e^1}{e^{1/2}} \times \frac{e^{1/3}}{e^{1/4}} \times \frac{e^{1/5}}{e^{1/6}} \times \dots \text{ 이고 이 때 } e = 2.718282$$

이다. 그림 6은 파스칼의 삼각형과 패를 보인다.

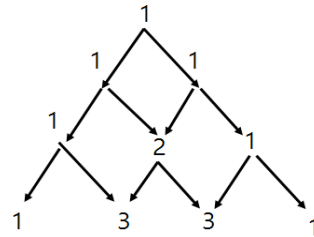


그림 6. 파스칼 삼각형과 패
 Fig. 6. Pascal's triangle and trigram.

V. Center Weighted Hadamard

저자가 1989년에 제안한 WH(Weighted Hadamard) Matrix는 다음과 같이 주어진다. Matrix order가 $N=2^k$ 인 Hadamard와 WH를 각각 $[H]_N, [WH]_N$ 이라 하고, $N \times 1$ 신호 Vector F, 2차원 $(N \times N)$ 이라면^[5,6]

$$[F] = [WH]_N [f], \tag{1}$$

$$[G] = [WH]_N [g] [WH]_N^T. \tag{2}$$

lower [WH] Matrix는 4x4라면 식 (3)과 같다.

$$[WH]_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

(3)의 inverse 는 다음과 같다.

$$[WH]_4^{-1} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$[WH]_N$ Matrix는 Recursive 하며 일반식은 다음과 같다.

$$[WH]_N = [WH]_{N/2} \otimes [H]_2, \tag{5}$$

예를 들어 $N=8$ 인 경우는 다음과 같다.

$$[WH]_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

하중계수 행렬 $[WC]_N$ 은 식 (7)과 같다.

$$\Delta [WC]_N = [H]_N [WH]_N. \quad (7)$$

분명히 $[WC]_4$ 는 Sparse Matrix이다. 즉,

$$[WC]_N = ([H]_{N/2} \otimes [H]_2) ([WH]_{N/2} \otimes [H]_2) = ([H]_{N/2} [WH]_{N/2}) \otimes ([H]_2 [H]_2) = [WC]_{N/2} \otimes 2 [I]_2 \quad (8)$$

여기서 $[I]_2$ 는 2×2 Identity Matrix 이다. 따라서 $[WH]_N$ 은 (Since $[H]_N^{-1} = 1/N [H]_N$)

$$[WH]_N = 1/N [H]_N [WC]_N. \quad (9)$$

이다. 또한 inverse는

$$[WH]_N^{-1} = N [WC]_N^{-1} [H]_N^{-1}. \quad (10)$$

이다. 식 (5)와 (10)을 algebra of Kronecker products를 사용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} [WH]_N [WH]_N^{-1} &= 1/N (\{ [H]_{N/2} [WC]_{N/2} \otimes 2 [H]_2 \} \cdot \{ [H]_{N/2} [WC]_{N/2}^{-1} \otimes 1/2 [H]_2 \}) \\ &= ([WH]_{N/2} \otimes [H]_2) ([WH]_{N/2}^{-1} \otimes 1/2 [H]_2) \\ &= ([WH]_{N/2} [WH]_{N/2}^{-1} \otimes 1/2 ([H]_2 [H]_2)) \\ &= [I]_N. \end{aligned} \quad (11)$$

식 (11)에서 보는 것처럼 $N \times N$ identity matrix가 명확하다.

예로서 $N=8$ 인 경우 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} [WH]_8 &= \frac{1}{8} ([H]_4 \otimes [H]_2) ([WC]_4 \otimes 2 [I]_2) \\ &= \frac{1}{8} ([H]_4 [WC]_4) \otimes 2 [H]_2 \\ &= \frac{1}{8} ([WC]_4 [H]_4) \otimes 2 [H]_2. \end{aligned} \quad (12)$$

즉, $[WH]_8$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \otimes 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 2 & 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 2 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (13) \end{aligned}$$

그 Inverse도 식 (14), (15)와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} [WH]_8^{-1} &= ([H]_4 \otimes [H]_2) ([WC]_4^{-1} \otimes 1/2 [I]_2) \\ &= ([H]_4 [WC]_4^{-1}) \otimes 1/2 [H]_2 \end{aligned} \quad (14)$$

$$[WC]_8^{-1} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & -1 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -2 & -2 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

$$\begin{aligned} [H]_N [WH]_N^{-1} &= 1/N (\{ [H]_{N/2} [WC]_{N/2} \otimes 2 [H]_2 \} \cdot \{ [H]_{N/2} [WC]_{N/2}^{-1} \otimes 1/2 [H]_2 \}) \\ &= ([WH]_{N/2} \otimes [H]_2) ([WH]_{N/2}^{-1} \otimes 1/2 [H]_2) \\ &= ([WH]_{N/2} [WH]_{N/2}^{-1} \otimes 1/2 ([H]_2 [H]_2)) \\ &= [I]_N. \end{aligned} \quad (16)$$

따라서 식 (16)은 식 (17)로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1875 & 0.0625 & 0 \\ 0 & 0.0625 & 0.1875 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} [WH]_8 [WH]_8^{-1} &= \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \\ &\otimes \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= [I]_8 \end{aligned} \quad (18)$$

그림 6은 4×4 고속 CWHT 신호처리 흐름도이다.

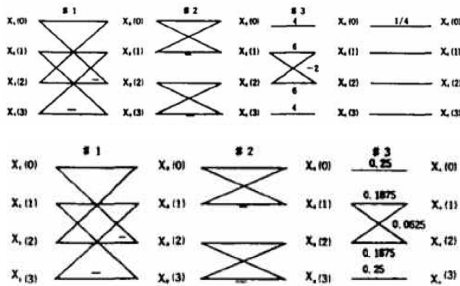


그림 6. 고속 inverse CWHT flow graph, N=4
 Fig. 6. Fast inverse CWHT flow graph, N=4.

분명한 것은 비직교(non-orthogonal) CWH인데, inverse는 forward 행렬 원소의 부호가 변함이 없이 element(block)-wise inverse이다.

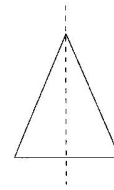
VI. 검토

피보나치수열, 식물의 나선, 동물의 대수 나선에서 볼 수 있는 것은 대칭이다. 위상수학 Group 정의에서 Inverse는 원소 $a \in G$, 유일한 a^{-1} 가 존재하기 위해서는 $\frac{1}{a} \in G$ 이고 그러면 $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ 이다. 즉 Inverse는 element-wise inverse 이다. 부록 참조. 따라서 동식물의 나선은 좌우 나선들이 대칭을 이루며 그 속에는 element-wise inverse가 존재한다. 이를 간파한 수학자

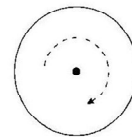
는 Emmy Noether (독일 : 1882~1935)이다. 뇌터는 아인슈타인이 “여성의 고등 교육이 시작된 이래 가장 훌륭한 천재적 학자” 라고 극찬한 수학자다. 저자는 대칭행렬은 역행렬이 동식물의 symmetry처럼 Element-wise inverse임을 확인했다. 이것은 우주 Cosmos Black Hall 원리를 밝힌 아인슈타인 일반 상대성 원리에서도 볼 수 있다. 즉 우주의 천문학적인 대상들이 거의 구(球)형이기 때문이다. 구는 중심을 축으로 돌렸다고 하면 돌리기 전이나 돌린 후나 똑같은 모양을 한다. 이 때 대칭성을 가졌다고 한다. 우주 자연 법칙은 대칭성을 갖는다.



(a)독일 여성수학자 Emmy Noether (1882~1935)



(b) 이등변 삼각형 대칭성



(c) 원의 회전 대칭

그림 7. 에미 뇌터(1882~1935)와 이등변삼각형 및 원의 대칭성

Fig. 7. Germany woman mathematician Emmy Noether(1882~1935), an isosceles triangle and circular symmetry of circle.

VII. 결론

나무를 보면 이등변 삼각형으로 중심을 축으로 좌우가 바뀌도 대칭이다. 해바라기 꽃은 원형이다. 원은 원점을 중심으로 회전을 해도 모양이 똑 같으므로 회전대칭

이다. 공간상의 회전변환을 넘어서, 시간·공간의 대칭적 변환으로 일반화하면 아인슈타인의 특수상대성 이론이 시공간 변환관계이다. 즉 대칭성의 群이론(group theory)이다. 그 가능성을 Center Weighted Hadamard 행렬로 보였다. 즉 Hadamard 행렬 중 가운데 하중 값을 2로 주었는데 그것은 자연대수의 밑이 2와 같고, 행렬은 Symmetric하고 역행렬은 element-wise inverse이다. 즉 너터의 정리는 역학(힘과 운동, 자연의 기본법칙들)과 대칭이라는 추상적 세계를 가장 직접적이고 심층적으로 연결해서 증명한 것이 1915년 독일 괴팅겐 대학에서이다. 너터의 정리는 대칭과 에너지 보존법칙의 개념을 통하여 자연에서 대칭이 가장 직접적으로 표현되는 방식임을 보였다. 이것이 아인슈타인이 극찬한 이유이다.

References

- [1] John H. Conway, R.K. Guy, *The Book of Numbers*, Springer New York 1996.
- [2] Moon Ho Lee, *The Arithmetic Code of Animal-plant*, Youngil, 2004.
- [3] Michael S, Schneider, "A Beginners Guide to Constructing the Universe the Mathematical Archetypes of Nature, Art, and Science, Kyeongmunsa, 2002.
- [4] Moon Ho Lee, "Wireless communications signal processing based on the Reciprocal Inverse orthogonal Matrics," Unpublished in *KICS*, 2014.
- [5] Moonho Lee, "The Center Weighted Hadamard Transform," *IEEE Trans. on CAS* vol.36, No.9, 1988.
- [6] Moon Ho Lee, *The Arithmetic Code of The Animals-Plants*, Youngil 2004.
- [7] Sung Kook Lee, Ju Yong Park and Moon Ho Lee, "A Double Helix DNA Structure Based on the Block Circulant Matrix(I)," *The Journal of The Institute of Internet, Broadcasting and Communication (IIBC)* Vol.16, no.3, pp.203-211, June 2016.
DOI: <https://doi.org/10.7236/JIIBC.2016.16.3.203>.
- [8] Ju Yong Park, Jeong Su Kim and Moon Ho Lee,

"A Double Helix DNA Structure Based on Block Circulant Matrix(Π)," *The Journal of The Institute of Internet, Broadcasting and Communication (IIBC)* Vol.16, no.5, pp.229-233, Oct. 2016.

DOI: <https://doi.org/10.7236/JIIBC.2016.16.5.229>.

부 록

유한체 finite group 성질

1. 군을 구성하는 개개인의 변환을 군의 원소 (Element)라고 하고, 각각의 군은 항등변환 (identical transformation) E를 포함한다.
2. 군의 원소들끼리 서로 곱셈(multiplication)할 수 있다. 군의 원소들의 곱셈은 연이은 대칭변환을 의미한다. 원소들의 곱셈으로 이루어진 새로운 원소 또한 해당군의 원소가 된다.
3. 원소들의 곱셈은 결합법칙(Associative rule)을 만족시키고 주어진 군의 원소 A에 대해 그 역 (inverse)이 동일한 군에 존재한다. 대칭행렬 $A = (a_{ij})$ 가 complex 또는 finite field에서 $AB = BA = I_N$, 단 $B = \frac{1}{n} (a_{ij}^{-1})^T$ 이고 Jacket 행렬의 성질을 만족한다.

저자 소개

박 주 용(정회원)



- 1994년 : 전북대학교 전자공학과 박사
 - 1991년~2007년 : 서남대학교 전기전 자공학과 교수
 - 2007년 3월~현재 : 신경대학교 ICT 융합학과 교수
- <주관심분야 : 무선이동통신, 통신이론, Molecular communication>

김 정 수(정회원)



- 1998년 : 전북대학교 정보통신공학과 석사
- 2003년 : 전북대학교 컴퓨터공학과 박사 졸업.
- 2002년 6월 ~ 현재 : 송실사이버대학교 컴퓨터정보통신학과 부교수
<주관심분야 : 이동통신>

이 문 호(정회원)



- 1984년 : 전남대학교 전기공학과 박사, 통신기술사
- 1985년~1986년 : 미국 미네소타 대학 전기과 포스트닥터
- 1990년 : 일본동경대학 정보통신공학과 박사
- 1970년~1980년 : 남양MBC 송신소장
- 1980년 10월~2010년 2월 : 전북대학교 전자공학부 교수
- 2010년 2월~2013년 : WCU-2 연구책임교수
- 2015 국가연구개발 우수성과 100선
- 현재 : 전북대학교 전자공학부 초빙교수
<주관심분야 : Jacket행렬, 무선이동통신, Molecular communication>

※ 본 연구는 한국 연구재단 도약 2015R1A2A1A05000977 지원으로 이루어졌음