

기대 평균흐름시간 최소화를 위한 단일설비 일정계획의 성능변동 분석

주 운 기[†]

선문대학교 산업경영공학과

Chaotic Behavior of a Single Machine Scheduling Problem with an Expected Mean Flow Time Measure

Un Gi Joo

Department of Industrial and Management Engineering, Sun Moon University

■ Abstract ■

A single machine scheduling problem for jobs with stochastic processing time is considered in this study. Shortest processing time (SPT) sequencing according to the expected processing times of jobs is optimal for schedules with minimal expected mean flow time when all the jobs arrive to be scheduled and their expected processing times are known. However, SPT sequencing according to the expected processing time may not be optimal for the minimization of the mean flow time when the actual processing times of jobs are known. This study evaluates the complexity of SPT sequencing through a comparison of the mean flow times of schedules based on the expected processing times and actual processing times of randomly generated jobs. Evaluation results show that SPT sequencing according to the expected flow time exhibits chaotic variation to the optimal mean flow time. The relative deviation from the optimal mean flow time increases as the number of jobs, processing time, or coefficient of variation increases.

Keywords : Stochastic Scheduling, Mean Flow Time, SPT Sequencing, Complexity

1. 서 론

본 논문은 단일설비 일정계획 문제에서 처리시간의 불확실성이 SPT(Shortest Processing Time) 일정 계획 규칙의 성능에 어떤 영향을 미치는 지의 분석에 대한 것이다. 단일 설비를 필요로 하는 다수의 작업들에 대해, 각 작업을 처리하는데 필요한 평균시간은 알고 있지만 실제 처리에 소요되는 시간은 처리하는 과정에서 결정된다고 할 때, 기대 평균 흐름 시간의 최소화를 위해서는 각 작업의 평균 처리시간이 작은 작업부터 먼저 처리하는 SPT 규칙이 최선이다[10, 12]. 그러나 불확실성이 있는 작업처리 시간 값이 처리 시간의 평균치와 동일한 값일 확률은 0이므로, 평균치를 이용하는 SPT 규칙은 처리시간의 불확실성 정도에 따라 일정계획의 성능에 큰 영향을 줄 것으로 예상된다. 본 논문은 이러한 처리시간의 불확실성에 따른 일정계획의 복잡성(complexity) 분석을 다룬다.

제조환경에서의 복잡성에 대한 연구로, Elmaraghy and Urbanic[5]은 제품, 공정 및 운영 복잡성으로 제조 환경의 복잡성을 구분하였고, 복잡성을 정보의 양, 정보의 다양성 및 내용으로 평가하기 위해 엔트로피(entropy) 함수를 이용하였다. 여기서 운영 복잡성(operational complexity)은 일정계획 규칙, 준비 시간, 생산 제어 및 유지보수 등의 복잡성을 의미하지만, 이 논문에서는 특정한 일정계획 규칙을 다루지는 않았다. 본 연구는 SPT로 일정계획을 수행하는데 있어서의 복잡성 분석을 목표로 한다. Efthymiou et al.[3]은 생산성과 예측가능성을 향상시키고자 복잡성을 기능 측면과 물리적 측면에서 정의하였다. 여기서 물리적 복잡성(physical complexity)은 제품의 구성 및 구조의 복잡성과 제품 운영 상 복잡성이나 시스템의 시간에 따른 특성 변화의 불확실성을 측정하는 것으로, 본 연구는 작업의 처리 시간의 불확실성에 따른 물리적 복잡성에 대한 것이다.

일정계획 관련 복잡성 연구로, Alfaro and Sepulveda [1]은 제조 환경에서의 혼돈적인(chaotic) 현상은 선택한 일정계획 규칙에 따라서 차이가 있음을 보였다. Papkostas et al.[7]은 작업 처리시간의 변동과 흐름

시간 간에 존재하는 비선형성 관계를 측정위한 제조실행 복잡성 지수를 하나 제안하였는데, 제안한 복잡성 지수의 유용성을 보이기 위해 FCFS(First Come First Service), SPT, EDD(Earliest Due Date) 일정 계획 수립 규칙을 고려하였다. 그리고 이들 일정 계획 규칙에 대해 수치 예를 통해 SPT 규칙의 복잡성이 FCFS나 EDD 규칙의 경우보다 크고, 흐름시간과의 비선형성의 관계도 강하다는 것을 보였다. 하지만 여기에서의 작업 처리 시간은 확정적 시간을 다룬데 반해, 본 연구에서는 처리 시간이 확률적인 경우를 다룬다. 기계화와 자동화가 많이 이뤄진 작업 공정에서의 작업처리 시간은 변동계수(coefficient of variation)가 0.06 정도로 불확실성이 크지 않지만, 실제 작업 처리 과정에서는 여러요인들에 의해 처리시간의 변동계수가 0.507까지 증가한다[7]. 변동성을 증가시키는 요인으로, 작업에서의 사람의 개입과 설비 고장 등이 있다. 특히 한명의 작업자가 여러 설비의 작업 준비와 작업 완료 처리를 하는 경우에는 작업자의 지연이나 작업위한 도구 교환 준비 작업의 변동성 등으로 인해 처리시간은 불확실하게 된다. 설비의 갑작스런 고장에 따른 수리시간도 작업 완료시간을 불확실하게 하는 요소로 작용하고, 작업주문량의 갑작스런 변경 요구에 맞추는 경우에도 작업처리 시간은 확률적으로 변하게 된다. 또한 품질문제의 발생으로 인한 추가 작업도 처리 시간의 변동성을 높이는 역할을 한다. 따라서 사람이 개입되는 작업 뿐 아니라 사람이 개입되지 않는 작업장에서도 처리 시간의 불확실성은 빈번하게 발생가능하고, 본 논문은 이와 같이 처리시간이 불확실한 상황에서의 일정계획 문제를 다룬다.

본 논문은 처리 시간의 불확실성과 작업량(수)의 증가에 따른 SPT 일정계획 규칙의 복잡성을 최적 일정계획과의 상대적 비교를 통해 분석한다. 부하가 높은 제조 설비에서의 약간의 입력 요소 변화는 최적의 일정계획 규칙의 성능에 매우 큰 영향을 줄 수 있는데, Chryssolouris et al.[2]는 임의의 도착시간(ready time)을 가지는 작업들을 단일 설비로 처리하는 경우, 평균 지연시간, 평균 흐름시간, 지연 작업 비율 등의 척도에 대해 SPT로 수립한 일정이 우수하다는 것을

시물레이션을 통해 보였다. 그러나 Chryssolouris et al.[2]는 처리할 작업이 임의의 도착시간을 가지는 상황을 고려하였으므로 SPT가 최적의 일정계획 규칙이라는 보장을 할 수 없다. 따라서 SPT 규칙보다 더 나은 규칙에 대한 복잡성 분석이 필요하지만, SPT 규칙을 분석 대상으로 한 한계가 있다. 또한 여기에서는 관련 요소들이 모두 확률적으로 알려져 있는 경우를 다루었지만, 본 연구는 확률적인 처리 시간을 갖는 문제를 다룬다. 확률적 처리시간을 갖는 환경 하에서도 이미 도착해 있는 작업들에 대해 처리할 경우에는 평균 흐름시간에 대해 SPT 규칙이 최적이므로, 본 논문에서는 이미 도착해있는 작업들에 대해서 최적의 규칙인 SPT 규칙이 고부하의 상황에서 어떤 성능을 가지는 지를 분석한다. Efthymiou et al.[4]는 제조분야의 성능 척도로 비용, 시간, 품질, 유연성의 네 가지를 고려하여, 이들 척도 실현의 불확실성 정도로 복잡성을 측정하였다. 여기에서는 작업 처리를 위한 준비시간이 확률적으로 주어진 경우가 확정적 준비시간을 가지는 경우보다 FCFS 규칙의 일정계획이 평균 흐름시간에 대해 복잡성을 더 증가시킨다는 것을 예시로 보였다. 여기서 고려한 FCFS 규칙은 평균 흐름시간에 대해 최선의 규칙이라는 보장이 없는 규칙이지만, 본 연구에서는 최적의 규칙인 SPT 규칙의 일정계획에 대한 동태적 분석을 한다.

본 연구는 처리시간이 확률적인 분포를 따라서 변하는 경우, 처리 시간의 평균치를 기준으로 하는 SPT 규칙의 일정계획 성능평가를 위해 최적 일정계획과의 상대적인 비교 분석을 하였다. 본 연구의 목적은 최적 일정계획 수립을 위한 SPT 규칙의 작업 처리시간의 불확실성에 따른 성능변화 특성을 분석하고, 이를 통해 SPT 규칙을 이용하는 과정에서 고려할 점을 밝혀서 효과적인 일정계획 수립을 할 수 있도록 하는데 목적을 둔다. 본 연구에서는 분석을 위해 임의로 발생한 난수(random number)를 이용한 다양한 수치 예를 활용하였고, 분석을 통해 처리 시간의 분포 형태와 처리할 작업의 개수, 분산 계수 값의 변화에 따라 복잡성(성능) 변화가 크다는 것을 보였다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 제2장에서는 본 논

문에서 다룬 문제와 문제 해결을 위한 실험 방법을 기술하였고, 제3장에는 다양한 시물레이션 조건 하에서의 성능분석 결과를 기술하였다. 마지막으로 제4장에서는 복잡성 개선을 위한 방안을 모색하고, 추후 연구 과제를 제안하였다.

2. 복잡성 분석 방법

2.1 최적 일정 계획 규칙

단일설비를 필요로 하는 작업의 수를 n 이라 하고, 이들 각 작업 i 의 처리시간(processing time)을 P_i 라 할 때, 일정계획 시점에 모든 n 개의 작업이 도착해 있지만, 이들 작업에 필요한 시간 P_i 는 임의의 확률 분포 $f_i(p_i)$ 를 따른다고 하자. 각 작업 i 의 실제 처리 시간은 작업 처리 전에는 알 수 없지만 이의 평균은 $E(P_i)$ 로 알려져 있다고 가정한다. 따라서 평균 처리 시간 $E(P_i)$ 를 이용하여 작업의 처리 순서를 결정할 수 있고, 결정한 순서에 따라 작업이 처리되면서 작업의 실제 소요 시간은 확률분포 $f_i(p_i)$ 에 따라서 결정된다.

작업 i 의 흐름(완료)시간을 F_i 라 하면, 평균 흐름 시간(mean flow time)은 식 (1)과 같이 표현된다.

$$\sum_{i=1}^n F_i/n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i P_{[j]}/n = \sum_{i=1}^n (n-i+1)P_{[i]}/n \quad (1)$$

여기서, $P_{[j]}$ 는 j 번째로 처리되는 작업의 처리시간을 나타내고, 각 작업 간 흐름시간이 서로 통계적으로 독립이면 기대 평균 흐름시간(expected mean flow time)은 식 (2)와 같다.

$$\begin{aligned} E[\sum_{i=1}^n F_i/n] &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i E[P_{[j]}/n] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(n-i+1)}{n} \int_0^{\infty} p_{[i]} f(p_{[i]}) dp_{[i]} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{(n-i+1)}{n} E(P_{[i]}) \end{aligned} \quad (2)$$

따라서 기대 평균흐름시간의 최소화를 위해 기대 처리 시간 $E(P_i)$ 의 SPT 순이 최적임을 알 수 있다 [10, 12].

2.2 실험 방법

본 연구는 작업 처리시간의 평균치를 이용하는 SPT 규칙이 처리시간의 불확실성에 따라서 어떤 특성을 가지는 지 분석하고자 한다. 다음은 문제 데이터 집합을 k 로 표시하여 기술한 시뮬레이션 절차이다.

단계 0 : $k = 1$

단계 1 : 문제 집합 k 에 대해 n 개의 작업을 임의로 생성한다.

단계 2 : 생성한 n 개 작업에 대해, 평균 처리시간 기준의 SPT 일정에 대한 평균 흐름시간을 계산한다.

단계 3 : 단계 2와 동일한 n 개의 작업에 대해 실제 값 기준의 SPT 일정을 찾아서 평균 흐름시간을 계산한다.

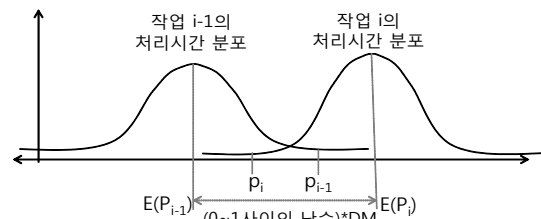
단계 4 : 단계 2와 3에서 계산한 평균 흐름시간을 이용하여 상대오류를 계산한다.

단계 5 : $k = k+1$ 로 하여 $k > \text{'반복 수'}$ 가 아니면 단계 1을 반복한다.

단계 1에서는 평균 처리시간 $E(P_i)$ 를 가지는 처리 시간 분포 $f_i(p_i)$ 를 따르는 작업 i 의 실제 처리시간 p_i 를 무작위로 생성하는데, 이렇게 생성한 총 n 개의 작업에 대해 기댓값 $E(P_i)$ 을 기준으로 한 SPT 순서로 작업 일정계획을 수행한 결과와 실제 처리시간 p_i 을 기준으로 한 SPT 순서의 작업 일정계획의 결과값을 단계 2와 3에서 각각 계산한다.

작업 i 의 작업처리 시간 P_i 가 평균이 $E(P_i)$ 인 확률 분포 $f_i(p_i)$ 를 따른다고 할 때, $E(P_i) \leq E(P_j)$, $i < j$ 관계에 있는 확률분포를 따르는 난수를 단계 1에서 발생시킨다. 따라서 단계 2의 기대치(평균 처리시간) 기준의 SPT 순서는 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow n$ 의 순서가 된다. 그러나 단계 1에서 발생시킨 실제 작업처리시

간 p_i 는 확률분포에 따라 발생한 값이므로, $p_i \leq p_j$, $i < j$ 의 관계에 있다는 보장을 못한다. 예를 들어, [그림 1]의 작업 $i-1$ 의 평균 처리시간보다 작업 i 의 평균 처리시간은 더 크지만, 실제 처리에 걸리는 시간은 그 반대일 수 있다. 따라서 단계 2에서 구한 SPT 일정과 단계 3에서 구한 SPT 일정에는 차이가 있을 수 있고, 그 차이의 정도 분석과 이를 통한 복잡성 감소 방안 제안에 본 연구의 목적이 있다.



[그림 1] 작업 간 평균 처리시간과 실제 처리시간

평균 흐름시간은 실제 처리 시간인 p_i 을 기준으로 한 SPT 순서가 최적이므로, 단계 4의 두 가지의 성능 변화의 평가 기준으로 식 (3)의 상대 오류(Relative Error) RE를 이용한다.

$$RE = \frac{MFT(E(P)) - MFT(p)}{MFT(p)} \quad (3)$$

여기서, $MFT(E(P))$ 는 단계 2에서 구한 기댓값 $E(P)$ 기준의 SPT 일정의 평균 흐름시간을 나타내고, $MFT(p)$ 는 단계 3에서 계산한 실제 값 기준의 SPT 일정의 평균 흐름시간을 나타낸다. $MFT(E(P))$ 와 $MFT(p)$ 둘 다 평균 흐름시간은 식 (1)을 이용하여 계산하지만, 기댓값 기준의 일정과 실제 처리시간 기준의 일정 간에 차이가 클수록 RE는 큰 값을 가지게 된다. 따라서 본 논문에서는 처리시간의 불확실성에 따른 복잡성을 식 (3)의 RE로 평가하였다.

상대오류 RE에 영향을 줄 수 있는 요소로는 작업의 개수 n , 처리시간 분포, 작업 간 평균 처리시간 $E(P_i)$ 간 차이 및 처리시간의 분산 차이 및 변동계수의 차이가 있을 수 있다. 이러한 요소에 따른 변화

분석을 위해 미리 결정한 ‘반복 수’ 만큼 단계 5를 통해서 반복 수행하였다. 본 논문의 분석 대상 규칙인 SPT에 따른 일정 계획 수립의 계산 복잡성(computational complexity)은 $O(n \log n)$ 이다[9]. 따라서 작업 수 n 에 따라 처리 시간이 증가하기는 하지만 계산시간은 측정이 안 될 정도로 매우 작으므로 본 논문에서는 계산 시간을 복잡성의 척도로 다루지 않았다.

앞의 시뮬레이션 절차는 Microsoft Visual C++ 6.0으로 코딩하여 Intel(R) Core(TM) i7-3770 CPU, 3.4GHz, Windows 7 PC에서 실험하였고, 다음 장에 시뮬레이션 결과를 기술한다.

3. SPT 규칙의 성능 변동 분석

제2.2절의 단계 1의 작업 발생을 위한 처리시간의 분포로 지수분포(exponential distribution), 일양분포(uniform distribution), 정규분포(normal distribution)를 고려하였다. 지수분포와 일양분포는 기존의 문헌에서 임의성을 표현하기 위해 다른 분포로[2], 지수분포는 임의의 시점에 발생하는 설비의 고장과 수리에 따른 처리 시간의 불확실성의 표현에 많이 사용하고, 일양분포는 확정적 시간과의 상대적 비교를 위한 대표적 확률적 분포로서 많이 이용한다. 그리고 처리시간의 불확실성을 유발하는 여러 요인들이 복합적으로 발생하는 상황에서는 중심극한정리(central limit theorem)에 의해 정규분포에 근사하기 때문에 이들 세 가지 분포를 다루었다[11]. 이들 분포를 따르는 난수

발생을 위해 지수분포와 일양분포는 역변환 방식(inverse transform)을 이용하였고, 정규분포를 위해서는 Box and Muller 방법을 이용하였다[6].

실험환경은 <표 1>과 같은데, 처리시간이 지수분포인 경우는 제3.1.1절~제3.1.3절에 기술하였고, 정규분포인 경우는 제3.2절, 마지막으로 일양분포의 처리시간을 가지는 경우의 실험 결과는 제3.3절에 기술하였다. <표 1>에 표시되지 않은 ‘반복 수’는 제 3.1.1절에서는 각 분포별 ‘반복 수’가 100인 경우와 1,000인 경우를 둘 다 하였지만, 나머지 실험 환경에서는 모두 ‘반복 수’를 100으로 하여 실험을 하였다.

3.1 지수분포를 따르는 처리시간

지수분포의 경우, 작업 i 의 평균 처리시간을 위해 식 (4)의 관계식을 이용하였다, $i = 2, 3, \dots, n$.

$$\text{작업 } i \text{의 평균 처리시간} = \text{작업 } i-1 \text{의 평균 처리시간} + (0 \sim 1 \text{사이의 난수}) \times DM \quad (4)$$

여기서 DM은 작업 간 평균치 차이를 반영하는 0보다 큰 상수 값으로, [그림 1]과 같이 DM 값이 클수록 작업 간 평균값에는 차이가 커질 가능성이 크다.

3.1.1 작업 수에 따른 변동

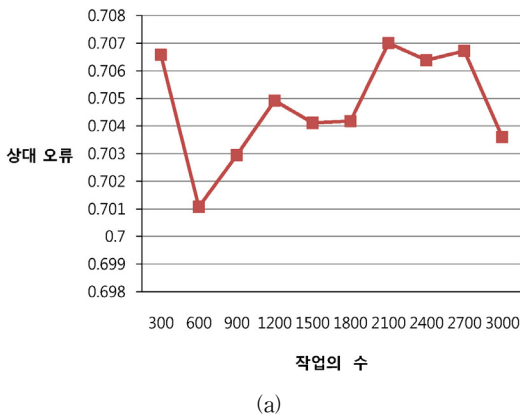
작업의 개수에 따른 상대오류 RE 값의 변화를 확인하기 위해 $DM = 1$ 로 두고, 작업 1의 평균 처리시간을 10으로 하여 식 (4)의 평균시간을 갖는 지수분포에서

<표 1> 성능 분석을 위한 실험 환경

처리시간 분포	작업 수	평균치 차이	첫째작업 평균 시간	변동계수	관련 장
지수분포	300~30,000	1	10	1	3.1.1
	1,500	1~19	10	1	3.1.2
	1,500	1	5~50, 5~140	1	3.1.3
정규분포	300~2,100	1	10	0.3	3.2.1
	1,500	1~19	10	0.3	3.2.2
	1,500	1	5~50	0.3	3.2.3
	1,500	1	10~50	0.05~0.50	3.2.4
일양분포	300~2,100	1	10	식 (6)과 식 (7)	3.3.1
	1,500	1~19	10	식 (6)과 식 (7)	3.3.2
	1,500	1	5~50	식 (6)과 식 (7)	3.3.3
	1,500	1	식 (7)	0.05~0.55	3.3.4

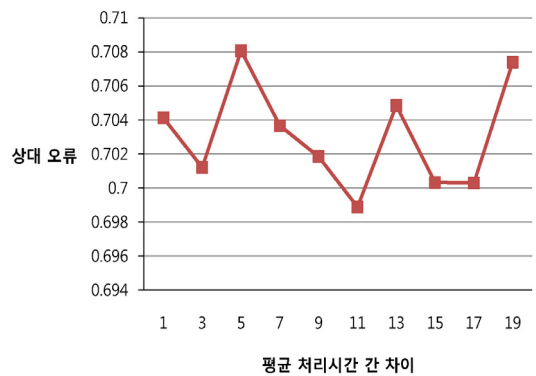
작업을 생성하였는데, $n = 300, 600, 900, 1,200, 1,500, 1,800, 2,100, 2,400, 2,700, 3,000$ 으로 변경하면서 실행한 결과는 [그림 2]이다. 여기서 [그림 2(a)]는 표본 수(반복 수)를 100개로 한 실행 결과이고, [그림 2(b)]는 n 개의 작업을 1,000번 반복 생성하여 수행한 결과이다.

[그림 2]에서 보는 바와 같이, 작업 수 n 에 따라 다르지만, [그림 2(a)] 경우는 상대오류 RE의 정도가 70.11%~70.70%이고, [그림 2(b)]에서는 70.36%~70.68%에 이를 정도로 오류정도가 상당히 크다. 이는 지수분포를 따르는 처리시간의 경우, 평균값 기준의 SPT 규칙의 적용에 상당한 주의를 기울여야 한다는 것을 의미한다. 더군다나 작업 수가 증가함에 따라 오류도 전반적으로 증가하는데, 이는 식 (4)와 같이 작업 별 증가하는 평균을 갖는 분포에서 난수를 발생하는 방식에 따른 것으로 보인다. 즉, 작업 수 n 이 클수록 작업 간 실제 처리시간 간 차이가 커지게 되므로 변동성이 증가하게 되어 발생하는 현상으로 보인다. 표본의 수(반복 수)에 따라 약간 차이는 있지만, [그림 2]는 SPT 규칙의 적용에서 작업 수가 주요한 고려사항이 되고, 작업 수 n 값은 $n \leq 1,500$ 에서의 결과가 $n > 1,500$ 경우보다 기댓값 기준의 SPT 규칙의 상대오류가 크지 않은 것으로 보인다. 따라서 이후의 시뮬레이션에서는 작업 수가 1,500개, $n = 1,500$, 인 문제 데이터를 임의로 100개, 즉 제2.2절 단계 5에서의 반복 수 = 100씩 발생시켜서 실험하기로 한다.



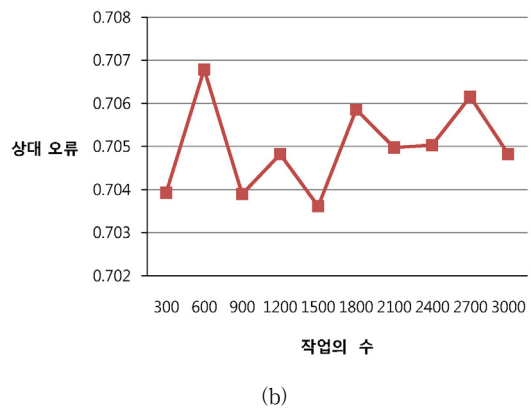
3.1.2 평균치 차이에 따른 변동

식 (4)의 평균치 간 차이 값 DM이 클수록 기댓값 기준의 SPT 일정계획과 실제 값 기준의 SPT 계획의 차이가 작아져서 상대 오류가 작을 것으로 예상되는데, DM의 변화에 따른 상대오류의 변화 분석을 위해서 작업 수 $n = 1,500$ 개로 고정하고, 작업 1의 평균 처리시간이 10이지만, 다음 작업의 평균 처리시간은 $DM = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$ 로 변화하면서 수행한 결과는 [그림 3]과 같다.



[그림 3] 평균 처리시간 차이 값(DM) 증가에 따른 상대오류 변동

DM의 변화에 따른 상대오류는 69.88%~70.81% 범위 내에서 변동하지만, 예측한 바와 다르게 [그림 3]에서는 DM의 증가에 따라 상대오류가 선형적인



[그림 2] 작업 수(n) 증가에 따른 상대오류 변동

증가나 감소를 보이지 않는다. 이는 DM의 증가가 기대평균 값 간 차이를 크게 하지만, 지수분포의 경우, 변동계수는 항상 1이므로 평균값의 증가가 변동성을 증가시키지 않아서인 것으로 보인다.

3.1.3 첫째 작업의 평균 처리시간에 따른 변동

첫째 작업의 기대 흐름시간 값에 영향을 받는 지의 분석을 위해, 작업 1의 평균 처리시간을 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50으로 변동하면서 시험을 한 결과는 [그림 4(a)]와 같다. [그림 4(a)]는 작업 수 $n = 1,500$ 개로 고정하고, 식 (4)에서의 다음 작업의 평균 처리시간 간 평균적인 차이를 $DM = 1$ 로 고정하지만, 작업 1의 기대 처리시간을 5~50 범위 내에서 변동하며, 그에 따른 변화를 보여준다.

첫째 작업의 평균 처리시간 값이 증가함에 따라 상대 오류가 증가하는 경향을 보인다. 이러한 증가 현상은 작업 1의 기대 처리 시간(초기값)의 범위를 5~140 범위에서 15간격으로 변경하면서 5~50 범위보다 넓은 범위에서 시뮬레이션을 수행한 결과인 [그림 4(b)]에서 더욱 잘 나타난다. 이는 지수분포의 평균과 표준편차가 동일한 값을 가지므로, 처리 시간이 긴 작업일수록 처리시간의 변동성은 커지기 되어, 평균값 기준의 SPT 일정이 실제로 SPT 일정과 차이가 발생할 가능성이 커지기 때문에 발생하는 것으로 보인다. [그림 3]에서는 작업들 간 처리에 걸리는 시간 차이가 커진다 해도 오류가 크게 작아지지 않음을 보이는데 반해, [그림 4]는 처리시간이 긴 작업들이 많은 경우,

그렇지 않은 작업들에 비해 오류가 커질 수 있다는 것을 보인다. 따라서 처리시간이 긴 확률적 시간을 가지는 작업의 경우에는 기대값 기준의 SPT 일정 계획 사용에 유의할 필요가 있다.

3.2 정규분포를 따르는 처리시간

정규분포의 경우, 0보다 큰 값을 가지는 처리시간이 대부분 결정되게 하기 위해 제2.2절의 단계 1에서 식 (4)와 식 (5)의 관계식을 이용하였다.

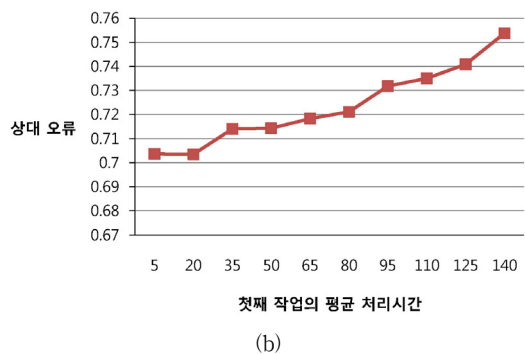
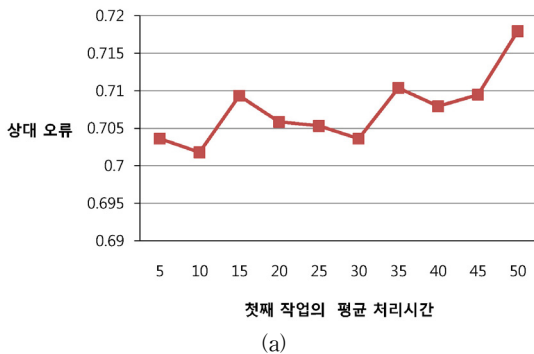
작업 i 의 처리시간의 표준편차

$$= \lfloor (\text{작업 } i \text{의 평균 처리시간}/3) \rfloor \quad (5)$$

식 (4)에서 DM은 작업 간 평균치 차이를 반영하는 0보다 큰 상수 값으로, 평균치의 변동성을 관리하기 위한 제어변수이다. 그리고 $\lfloor a \rfloor$ 는 a 보다 작은 정수 중 가장 큰 수를 의미하는데, 이를 통해 ± 3 (표준편차) 범위 밖의 처리시간도 일부 발생될 수 있도록 하기 위해 식 (5)를 이용하였다.

3.2.1 작업 수에 따른 변동

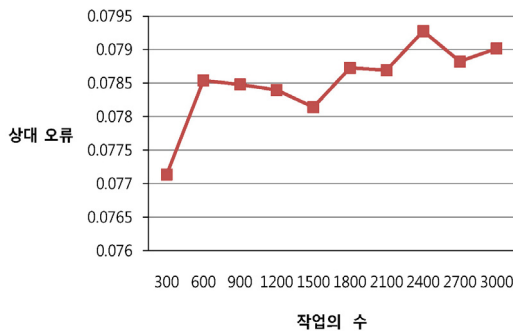
작업의 개수에 따른 RE 값의 변화를 확인 위해 $DM = 1$ 로 두고, 작업 1의 평균 처리시간을 10으로 하여 $n = 300, 600, 900, 1,200, 1,500, 1,800, 2,100$ 로 변경하면서 실행하였다. 여기서 처리시간이 0보다 큰 값을 가져야 하므로 작업 1의 표준편차는 $\lfloor 10/3 \rfloor$



[그림 4] 첫째 작업의 평균 처리시간 증가에 따른 상대오류 변동

= 3으로 설정하였고, 다른 작업들의 표준편차는 첫 번째 작업과 동일하게 변동계수는 0.3을 가지도록 표준편차 값을 설정하였다. 정규분포의 정의역(domain)이 $-\infty \sim +\infty$ 인데 반해, 처리시간은 0보다 큰 값을 가져야 하고, 컴퓨터는 처리할 수 있는 수치에 한계가 있으므로, 시뮬레이션을 위한 C++ 코드에서는 과도하게 큰 값을 가지는 경우와 음의 값을 가지는 난수는 제거하고, 대신 0보다 큰 값과 컴퓨터가 수용가능한 수를 발생시켜 사용하였다.

시뮬레이션 수행 결과, [그림 5]에서 보는 바와 같이 상대 오류 값이 7.71%~7.93%로 [그림 2]보다 훨씬 작고 작업 수 1,500개에서 약간 상대오류가 감소하지만, [그림 2]와 유사하게 작업 수의 증가에 따라 상대오류가 증가한다. [그림 2]의 지수 분포 경우보다 상대오류가 작은 것은 정규분포의 변동계수 값이 지수분포보다 일반적으로 작은데서 오는 현상으로 보인다.



[그림 5] 작업 수 증가에 따른 상대오류 변동

3.2.2 평균치 차이에 따른 변동

변동계수를 0.3으로 고정시킨 상황에서도 평균치 간 차이 DM이 클수록 기댓값 기준의 SPT 일정계획과 실제 값 기준의 SPT 계획의 차이가 작아져서 상대오류가 작을 것으로 예상된다. 이를 위해 제3.2.1절과 마찬가지로 작업 수 $n = 1,500$ 개로 고정하고, 작업 1의 평균 처리시간을 10으로 하였지만, 다음 작업의 평균 처리시간은 DM = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19로 변화하면서 식 (4)를 이용하여 발생시킨 수치 예에 대해 수행하였는데, 그 결과는 [그림 3]과 유사하게

나왔다. 그 결과를 본 논문에 기재하지는 않았으나, DM의 변화에 따른 상대 오류의 변화는 7.8%~7.95% 내에서 변동하는 형태를 보였다.

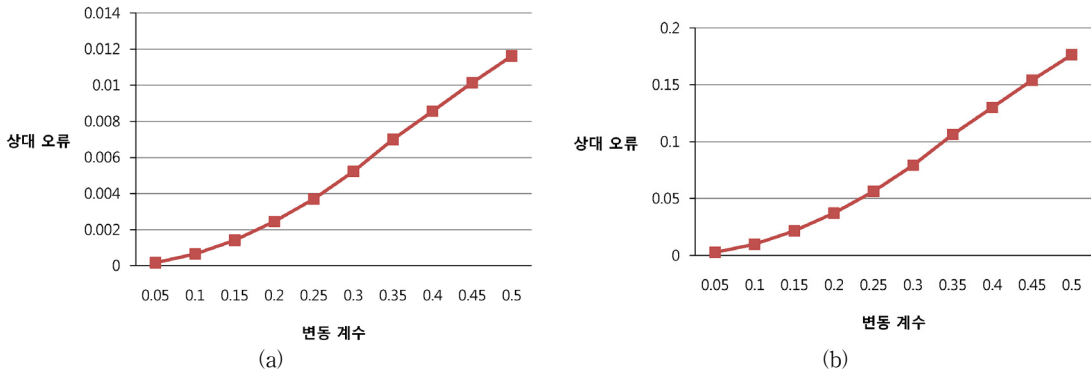
3.2.3 첫째 작업의 평균 처리시간에 따른 변동

앞서 지수분포에서와 마찬가지로 방식 1의 평균 처리시간의 변동에 따른 상대오류의 변화를 분석하였다. 작업 수 $n = 1,500$ 개로 고정하고, 다음 작업의 평균 처리시간 간 평균적인 차이를 DM = 1로 고정하지만, 작업 1의 평균 처리시간을 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50으로 변동하면서 추가 실험을 하였다. 여기에서도 변동계수는 앞에서와 같이 모두 동일하게 0.3으로 설정하였는데, 분석 결과는 [그림 4]와 유사하게 작업 1의 평균의 증가에 따라 상대오류가 증가하는 형태를 보였으므로, 본 논문에서는 분석 결과 그래프를 생략하였다. 따라서 처리시간의 평균이 증가함에 따라서 분산도 증가하는 상황에서는 기댓값 기준의 SPT 규칙 적용에 주의를 할 필요가 있다.

3.2.4 변동계수에 따른 변동

지금까지는 변동계수 값을 모두 0.3으로 고정시킨 상태에서의 실험 결과인데, 변동계수 값의 변화에 따른 상대오류의 변화를 분석하기 위해 표준편차를 변동하면서 실험을 추가로 하였다. 작업 수 $n = 1,500$ 개로 고정하고, 작업 1의 평균 처리시간이 10일 때, 변동계수가 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50로 변하는 경우를 고려하였다. 여기서 변동계수 0.05는 평균이 10인 경우 표준편차는 0.5가 되어 변동성이 매우 작은 경우가 되고, 변동계수 0.50인 경우를 위해서는 표준편차가 5로 매우 변동성이 큰 상황을 나타낸다. 따라서 정규분포의 경우 0.05~0.50의 변동계수는 현실적인 범위이고, [그림 6(a)]와 [그림 6(b)]는 식 (4)에서의 첫째 작업(작업 1)의 평균 시간이 각각 10과 50인 경우의 변동계수 변화에 따른 상대오류의 변화를 보여준다.

[그림 6]에서 보는 바와 같이 변동계수의 증가에 따라 상대오류는 증가하는데, 확인하지는 않지만, 0.3 부근에서 상승 속도가 더 증가하는 형태를 보인다.



[그림 6] 변동계수 증가에 따른 상대오류 변동

그리고 [그림 6(a)]는 0.25%~17.42%, [그림 6(b)]는 0.26%~17.63%의 범위 내에서 상대오류가 발생한다. 비록 작업 1의 평균 시간이 20, 30, 40인 경우의 분석 결과를 논문에 기재하지는 않았지만, 작업 1의 평균치가 클수록 상대오류가 더 커진다는 것은 여기에서도 확인할 수 있었다. 따라서 변동계수 값이 0.3 이상인 정규분포의 처리시간을 가지는 환경과 작업 1의 평균 시간이 긴 경우에는 SPT 규칙의 적용에 유의할 필요가 있다.

[그림 3]과 [그림 6]을 비교해보면, [그림 3]의 상대오류가 [그림 6]보다 더 크다는 것을 알 수 있다. 이는 지수 분포는 변동계수는 항상 1이고, 여기에서 고려한 정규분포의 변동계수의 범위는 0.05~0.50이므로 [그림 6]의 변동계수가 [그림 3]의 변동계수보다 작아서 발생한 현상으로 보인다. 즉 처리시간이 지수분포를 하는 경우가 정규분포를 따르는 경우에 비해 SPT 규칙을 적용하는데서 오는 오류가 더 커질 가능성이 많다고 판단된다.

3.3 일양분포를 따르는 처리시간

정의구역 a~b 구간에서의 일양분포의 평균은 $(b+a)/2$ 이고 분산은 $(b-a)^2/12$ 이므로, 변동계수는 $(b-a)/(\sqrt{3}(b+a))$ 이다. 따라서 만약 정의역의 시작점 a가 고정되어 있다면, 정의구역 끝점인 b가 증가함에 따라 변동계수는 증가한다. 여기에서는 a=1로 고정하고, b를 변동하면서, 구간 [1, b]의 일양분포를 따르

는 난수를 이용하였다.

3.3.1 작업 수에 따른 변동

작업의 개수에 따른 RE 값의 변화를 확인 위해 DM = 1로 두고, 작업 1의 평균 처리시간을 10으로 하여 n = 300, 600, 900, 1,200, 1,500, 1,800, 2,100로 변경하면서 실행하였다. 여기서 처리시간은 구간 [1, b]의 일양분포를 따르고, 앞의 지수분포와 정규분포와 같은 구조의 평균치 변화를 위해 작업 1의 b는 19이지만, 작업 2에서 작업 n까지는 식 (6)의 b값을 가지는 난수를 발생하였다.

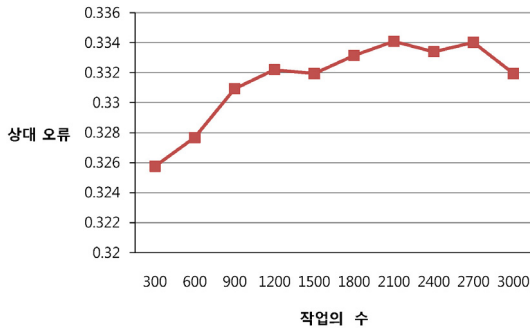
$$\text{작업 } i \text{의 } b \text{ 값} = 2 \times (\text{작업 } i \text{의 평균 처리시간}) - 1 \quad (6)$$

여기서 작업 i의 평균 처리시간은 식 (4)와 같이 정한다.

일양분포는 b값이 정해지면 자연히 표준편차와 변동계수가 정해지므로, 앞에서 수행한 지수분포나 정규분포와는 달리 작업의 수 n이 증가할수록, 식 (4)와 (6)에 의해 b 값이 증가하게 되어 변동계수가 큰 분포에서 난수를 발생하게 된다.

이러한 실험 환경 하에서의 분석 결과는 [그림 7]과 같이 상대오류가 32.56%~34.41%로 지수분포의 [그림 2]보다는 작지만 그 형태는 유사하게 나왔는데, 이 결과에 따르면 처리시간 분포가 지수분포, 정규분포, 일양분포 중 어느 분포를 따른다하더라도, 작업의 개수 n이 증가함에 따라 상대오류가 증가하는 경향이 있으므로, 기대시간 기준의 SPT 규칙을

사용하는 경우, 처리할 작업의 개수가 작아야 (여기에서는 1,500개 이하여야) 좋다고 판단할 수 있다. 그리고 작업 수에 대한 상대 오류는 [그림 5]의 정규분포, 일양분포, [그림 2]의 지수분포의 순으로 큰 값을 보였다.



[그림 7] 작업 수 증가에 따른 상대오류 변동

3.3.2 평균치 차이에 따른 변동

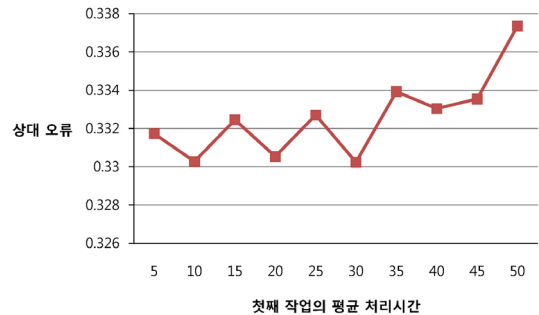
평균치간 차이 DM이 클수록 기댓값 기준의 SPT 일정계획과 실제 값 기준의 SPT 계획의 차이가 작아져서 상대오류가 작을 것으로 예상되는데, DM의 변화에 따른 상대오류의 변화 분석을 위해서 작업 수 $n = 1,500$ 개로 고정하고, 작업 1의 평균 처리시간이 10이지만, 다음 작업의 평균 처리시간은 $DM = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$ 로 변화하면서 수행한 결과는 [그림 3]과 유사하게 나왔다. 그 결과를 본 논문에 기재하지는 않았으나, DM의 변화에 따른 상대 오류의 변화는 33.01%~33.48%내에서 변동하는 형태를 보였다.

3.3.3 첫째 작업의 평균 처리시간에 따른 변동

작업 1의 평균 처리시간의 변동에 따른 상대오류의 변화를 분석하였다. 작업 수 $n = 1,500$ 개로 고정하고, 다음 작업의 평균 처리시간 간 평균적인 차이를 $DM = 1$ 로 고정하지만, 작업 1의 평균 처리시간을 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50으로 변동하면서 실험을 하였다.

분석 결과는 [그림 4]와 유사하게 작업 1(첫째 작

업)의 평균 처리시간의 증가에 따라 상대오류가 증가하는 형태를 [그림 8]과 같이 보였는데, 이러한 증가추세는 작업 1의 평균 처리시간이 30보다 커지면 오류가 더 커지는 경향을 보이고 있다. [그림 8]에서 보는 바와 같이, [그림 4]나 정규분포의 경우와는 달리, 일양분포 $U[1, b]$ 에서 평균값이 증가하면 b 값과 변동계수 값이 증가하므로, 평균값이 증가함에 따라 상대오류의 증가폭이 더 커지는 형태를 보인다. 즉 일양분포의 처리시간 경우에는 기댓값 기준의 SPT 규칙 적용에 더욱 주의가 필요하다.



[그림 8] 첫째 작업의 평균 처리시간 증가에 따른 상대오류 변동

3.3.4 변동계수에 따른 변동

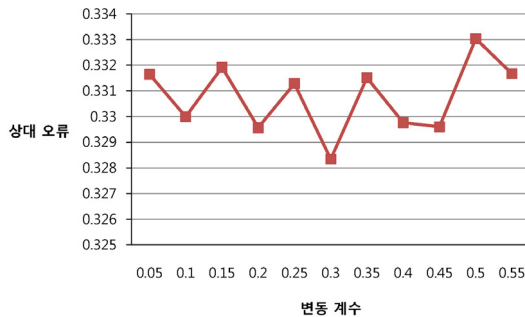
일양분포 $U[1, b]$ 의 변동계수는 $(b-1)/(\sqrt{3}(b+1))$ 이고, 이 변동계수 값을 CV라 표기하면, b 와 CV간에는 식 (7)의 관계가 있다.

$$b = (1 + CV\sqrt{3}) / (1 - CV\sqrt{3}) \quad (7)$$

여기서 $b \geq 1$ 이므로 $CV < 1/\sqrt{3}$ 여야 한다. 따라서 변동계수 CV에 따른 상대오류의 변화 분석을 위해 $CV = 0.05, 0.10, 0.15, 0.20, 0.25, 0.30, 0.35, 0.40, 0.45, 0.50, 0.55$ 로 변화함에 따른 분석을 하고자 한다.

이를 위해 앞에서와 마찬가지로 일양분포 $U[1, b]$ 의 처리시간을 따르는 작업을 1,500개를 임의 발생시켰는데, 여기서 b 는 변동계수 CV값의 변동에 따라서 식 (7)과 같이 결정하였다. 작업 1의 평균 처리시간도 CV 값에 따라서 결정하였고, 다음 작업의 평

균 처리시간은 DM = 1로 고정하여 100번씩 시물레이션 수행하였다. 그 결과는 [그림 9]와 같은데, CV가 증가함에 따라 상대오류가 증가하기는 하지만 증가 정도가 크지 않음을 보인다. 이는 정규분포의 경우를 나타내는 [그림 6]과 다른 양상을 보이는데, [그림 9]는 32.83%~33.30%의 오류 범주에서 CV 값에 따라서 변동한다.



[그림 9] 변동계수 증가에 따른 상대오류 변동

4. 결 론

본 연구는 확률적 일정 계획 문제의 최적해가 불확실성에 따라서 어떠한 변동을 하는 지에 대한 분석에 대한 것이다. 단일설비로 이미 도착해 있는 작업들에 대한 기대 평균 흐름시간을 최소화하는 일정계획은 각 작업의 처리시간 분포에 관계없이 평균 처리시간 기준의 SPT 규칙이 최선임이 알려져 있다. 그러나 불확실성이 존재하는 상황에서는 평균 처리시간이 긴 작업의 실제 처리시간이 길다는 보장이 없으므로, 작업을 실제 처리하는 시점에서 평균 처리시간 기준으로 미리 결정한 SPT 일정이 최적해가 되지 않을 가능성이 있다. 본 연구에서는 작업의 수, 처리 시간의 분포 형태, 처리시간의 대소 및 처리시간의 변동성에 따른 평균 처리시간 기반의 SPT 규칙의 성능을 분석하기 위해 다양한 수치 예를 임의 발생하여 활용하였다.

분석 결과, 작업의 수 및 변동계수의 증가에 따라 SPT 규칙의 성능이 악화된다는 것을 확인하였다. 또한 첫째 작업(평균 처리시간이 가장 작은 작업)의 평

균값이 클수록 상대오류는 증가하는 형태를 보였다. 그리고 본 논문에서 다룬 세 가지 확률분포 중에는 지수 분포의 오류가 가장 크고, 그 다음이 일양분포이고, 제일 작은 오류를 가져오는 것은 정규분포임을 알 수 있었다. 이 분석 결과는 다음과 같은 시사점들을 준다. 첫째, 평균 처리시간 기준의 SPT 규칙을 적용하기 위해서는 처리할 작업 유형이 많은 주문의 경우, 몇 개의 작은 주문으로 나눠서 작업의 개수를 줄인 후 일정계획을 각 주문 별로 수립하는 것이 좋다는 것이다. 비록 SPT 규칙을 위해서 필요한 정보가 평균 값뿐이고 지수분포의 경우는 변동계수가 1로 항상 일정하지만, 일양분포와 정규분포의 경우는 변동성을 줄이기 위한 노력을 사전에 할 필요가 있다는 점도 하나의 시사점이다. 이를 위해서 처리시간의 표준 편차를 줄이기 위한 유사 작업 들 간 그룹핑을 한 후, SPT 규칙을 적용하는 것이 좋을 것으로 판단된다. 또한 평균 처리시간의 감소를 위해 하나의 큰 작업을 여러 개의 작은 작업으로 나눈 후 처리 하는 방안을 생각할 수 있다.

본 논문은 평균 시간 기준의 SPT 규칙의 처리시간의 불확실성에 대한 효과를 분석하여 이론적인 최적규칙의 오류정도를 실험적으로 보였고, 이를 통해 SPT 규칙을 이용하는 환경에서의 고려할 점을 제안했다는 것에 의의가 있다.

반면에 본 연구의 제한점도 있다. 본 연구의 시물레이션 결과로 지수분포에서의 작업 수 1,500개와 첫째 작업의 평균 처리시간 30 및 정규분포에서의 변동계수 0.3 등은 임계점(critical point) 이후의 창발(emergence) 효과를 규명하기 위한 과정이었지만, 창발효과가 확연한 일정계획 환경을 찾지는 못하였다. 또한 본 연구의 결과가 변동계수 0.05~1을 가지는 다양한 환경에서의 분석 결과이지만, 수치 예를 통한 분석 결과이므로 본 연구의 실험 환경이 아닌 확률 처리시간 분포를 따르는 상황에서도 본 연구의 결과와 유사한 결과가 도출된다는 보장을 할 수 없다는 문제도 있다. 따라서 일정계획 복잡성 평가를 위한 일반적인 지표 개발이 필요한 상태이다. 본 연구에서는 단일 설비를 필요로 하는 작업들이 모두 도착

해 있는 일정 계획 환경을 고려하였다. 그러나 일정 계획 수립에 필요한 설비의 개수가 여러 개일 수 있고, 처리할 작업이 동적(dynamic)으로 도착할 수도 있으며, 각 작업 별로 요구되는 납기(due date)에 제한이 있을 수도 있고, 납기를 맞춰달라는 요구가 있을 수도 있다. 이러한 환경에서 불확실성에 따른 복잡성 분석이 된다면 실제 상황에서의 일정계획 수립 방안을 찾는 데 유용할 것이다.

참 고 문 헌

- [1] Alfaro, M.D. and J.M. Sepulveda, "Chaotic Behavior in Manufacturing Systems," *International Journal of Production Economics*, Vol.101(2006), pp.150-158.
- [2] Chryssolouris, G., N. Giannelos, N., Papkostas, and D. Mourtzis, "Chaos Theory in Production Scheduling," *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, Vol.53(2004), pp.381-383.
- [3] Efthymiou, K., A. Pagoropoulos, N. Papakostas, D. Mourtzis, and G. Chryssolouris, "Manufacturing Systems Complexity Review : Challenges and Outlook," *Procedia CIRP*, Vol.3 (2012), pp.644-649.
- [4] Efthymiou, K., A. Pagoropoulos, N. Papakostas, D. Mourtzis, and G. Chryssolouris, "Manufacturing Systems Complexity : an Assessment of manufacturing Performance Indicators Unpredictability," *CIRP Journal of Manufacturing Science and Technology*, Vol.3 (2014), pp.324-334.
- [5] Elmaraghy, W.H. and R.J. Urbanic, "Modelling of Manufacturing Systems Complexity," *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, Vol.52(2003), pp.363-366.
- [6] Law, A.M. and W.D. Kelton, *Simulation Modeling and Analysis*, McGraw-Hill, Inc., 1982.
- [7] Lawrence, S.R. and E.C. Sewell, "Heuristic, Optimal, Static, and Dynamic Schedules when Processing Times are Uncertain," *Journal of Operations Management*, Vol.15(1997), pp.71-82.
- [8] Papkostas, N., K. Efthymiou, D. Mourtzis, and G. Chryssolouris, "Modeling the Complexity of Manufacturing Systems using Nonlinear Dynamics Approaches," *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, Vol.58(2009), pp.437-440.
- [9] Rinnooy, Kan, A.H.G., *Machine Scheduling Problems : Classification, Complexity and Computations*, Martinus Nijhoff, 1976.
- [10] Rothkopf, M.H., "Scheduling with Random Service Times," *Management Science*, Vol.12 (1966), pp.707-713.
- [11] Wiley Online Library, *Appendix A : Practical Processing Time Distributions, Principles of Sequencing and Scheduling*, <http://online.library.wiley.com/doi/10.1002/9780470451793.app1/pdf>, accessed in 2015.
- [12] Zhou, X. and X. Cai, "General Stochastic Single-machine Scheduling with Regular Cost Functions," *Mathematical and Computer Modelling*, Vol.26(1997), pp.95-108.