

論文

J. of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences 44(12), 1043-1053(2016)

DOI:http://dx.doi.org/10.5139/JKSAS.2016.44.12.1043

ISSN 1225-1348(print), 2287-6871(online)

회전익 시스템의 시간지연 종속 병렬분산보상제어기 적용과 검증

유영진*, 최윤성*, 정진석*, 송우진**, 강범수***

Application and Validation of Delay Dependent Parallel Distributed Compensation Controller for Rotary Wing System

Young-Jin You*, Yun-Sung Choi*, Jin-Seok Jeong*, Woo-Jin Song** and Beom-Soo Kang***

Department of Aerospace Engineering, Pusan National University*,***

Graduate School of Convergence Science, Pusan National University**

ABSTRACT

In this paper, the application of Parallel Distributed Compensation (PDC) controller for fixed pitch rotary wing system was studied. For nonlinear modeling, T-S fuzzy model was utilized to advance system control including the tilt type UAV. PDC controller was designed through the Linear Matrix Inequality (LMI). Experiments for determining the applicability and feasibility of PDC were performed using the 1 axis attitude control equipment and simulation. To verify the performance and characteristics of the controller, Mathworks Co. Simulink was used. After then, the PDC controller performance was verified and the results with developed controller using a 1 axis attitude control equipment were compared. Verification of the feasibility of PDC controller for the fixed pitch rotary wing system and identification of the overall performance and improvement analysis was conducted based on the experimental results.

초 록

본 논문에서는 비선형성을 가지는 고정피치 프로펠러를 사용하는 회전익 시스템의 병렬분산보상제어기 적용에 대한 연구 내용을 다루고 있다. 틸트 형 무인기 등 발전된 시스템의 제어기 설계 시 요구되는 비선형 모델링을 위해 T-S 퍼지모델을 사용하였다. 병렬분산보상 제어기는 선형행렬부등식을 이용해 설계하였다. 병렬분산보상제어기 적용가능성 판단을 위한 실험은 시뮬레이션과 1축 자세제어장비를 이용해 수행하였다. Mathworks의 Simulink를 사용해 시뮬레이션을 진행하고 설계한 제어기의 전반적인 성능과 특성을 파악하였다. 이후 1축 자세제어장비와 기 개발된 제어기를 이용해 병렬분산보상기법을 적용한 제어기와 결과를 비교하고 성능을 검증하였다. 시뮬레이션 및 실험 결과를 토대로 고정피치 프로펠러를 사용하는 회전익 시스템에서 설계한 병렬분산보상제어기 적용가능성과 개선사항을 분석하였다.

Key Words : T-S Fuzzy Model(T-S 퍼지 모델), Parallel Distributed Compensation(병렬분산보상), 1 Axis Control System(1축 자세제어), Delay-dependent Control(시간지연 종속 제어), Unmanned Aerial Vehicle(무인항공기)

† Received : July 4, 2016 Revised : November 17, 2016 Accepted : November 30, 2016

*** Corresponding author, E-mail : bskang@pusan.ac.kr

I. 서 론

무인항공기는 그 형태에 따라 크게 고정익형 무인항공기와 회전익형 무인항공기로 분류되며, 이 중에서도 회전익형 무인항공기는 수직이착륙 및 제자리비행을 통해 다양한 임무 수행이 가능해 활용성이 증시되는 민수 시장에서 인기가 높다. 회전익형 무인항공기의 종류로는 각기 하나의 주 로터와 꼬리 로터를 지니는 싱글로터 형, 두 개의 주 로터가 동일한 축을 중심으로 반대로 회전하는 동축반전로터 형, 다수의 모터와 프로펠러를 이용한 멀티로터 형이 대표적이다. 이 중에서도 멀티로터 형 무인항공기의 경우 제작 및 운용이 간편하고 비용면에서도 저렴한 장점이 있어 근래 가장 각광받고 있다. 이외에도 고정익과 회전익을 결합하여 각각의 장점을 모두 살릴 수 있는 새로운 형태의 무인항공기 역시 많은 관심을 받고 있으며, 로터 혹은 날개 축을 기울여 비행 형태를 전환할 수 있는 틸트형 무인항공기의 개발 역시 활발하게 진행 중이다.

한편, 무인항공기의 활용 분야가 다양해지고 새로운 형태의 무인항공기가 속속 등장함에 따라 시스템의 복잡성이 증가하면서 비선형 시스템에 대한 제어가 중요시되고 있다. 예를 들어, 물류수송 무인항공기는 탑재된 화물의 중량 및 형태, 화물탑재 상태와 분리 상태 등 다양한 조건 하에서 시스템의 특성이 변화된다. 또한, 고속, 장거리 비행을 고려한 틸트형 무인항공기의 경우 고정익과 회전익 형태의 전환을 위한 천이구간에서의 안정적인 비행을 위해 비선형 시스템 제어가 필수적이다.

퍼지 모델은 비선형 시스템을 모델링하는 방법 중 하나로 퍼지 규칙을 이용해 선형 모델의 연속으로 비선형 시스템을 표현한다. 그 중 T-S 퍼지 모델은 모델링에 익숙하지 않은 설계자도 퍼지모델링을 시도하는데 접근이 용이한 방법이다[1]. 또한, Wang등에 의해 제안된 T-S 퍼지 모델 기반 병렬분산보상기법은 각 퍼지규칙에 해당하는 이득 값을 Linear Matrix Inequality (LMI)를 이용해 구할 수 있고, 이때의 시스템 안정도는 Lyapunov 함수에 의해 판단 가능하다[2-3].

본 논문에서는 비선형성을 가지는 무인기의 T-S 퍼지모델 기반 시간지연 종속 병렬분산보상기법의 적용가능성에 대한 연구를 수행하였다. 이를 위해 향후 고정피치방식의 무인기 자세제어에 적용하고자하는 제어기 설계과정을 실험에

적용하였다. 시간지연을 고려한 T-S 퍼지 모델을 이용해 모델링을 수행하고, 병렬분산보상제어기를 설계하였다. 제어기 성능검증을 위해 시뮬레이션과 자체 제작한 1축자세제어장비를 사용해 실험을 진행하였다. 실험결과를 바탕으로 고정피치형 회전익 무인기의 T-S 퍼지모델 기반 병렬분산보상기법의 적용가능성을 판단하였으며 개선점을 분석하였다.

II. 시스템 모델링

2.1 1축 자세제어시스템 모델링

2.1.1 운동 방정식

1축 자세제어시스템은 고정된 단일 축을 중심으로 위치변화 없이 양 끝에 달린 프로펠러의 회전으로 자세변화를 수행하는 시스템을 말한다. 2개의 프로펠러 회전에 의한 양력차를 이용해 자세를 제어하며, 기울어진 각도와 전체 양력의 합을 이용해 원하는 목표점에 도달 하도록 제어가 가능하다[4]. 회전축을 고정시킬 경우 무게중심과 회전중심을 맞춰 설계해야하고 위치변화가 없다는 단점이 있지만, 구조적으로 단순하며 비행실험에 따른 위험부담을 줄이고 응용실험이 가능한 장점이 있다. 따라서 본 연구에서는 1축 자세제어 장비를 통해 추력방향의 변화에 따른 자세제어기 성능을 검증하는 실험방법을 고려하였다. 본 논문에서 다룰 1축 자세제어 시스템은 Fig. 1에 도시하였고, 토크의 영향을 무시 할 때 운동방정식은 식(1) 같다.

$$I_{zz}\ddot{\phi} = (T_1 - T_2)\cos\alpha L \quad (1)$$

제어입력을 $T_1 - T_2 = u_1$ 으로 정의하고, 추력 값 보정상수 Q 를 이용해 $\ddot{\phi}$ 에 대해 정리하면 식(1)은 아래 (2)와 같이 다시 쓸 수 있다.

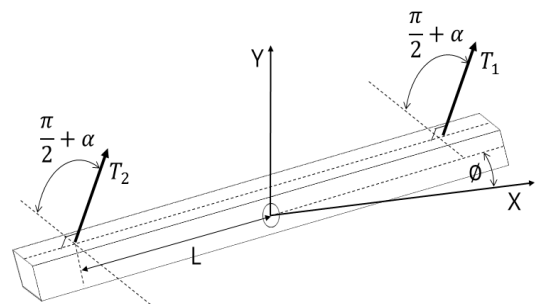


Fig. 1. Concept of 1 axis control system

$$\ddot{\phi} = u_1 \frac{L}{L_{zz}} Q \cos \alpha \quad (2)$$

2.1.2 시간지연을 고려한 T-S 퍼지 모델

주어진 시스템을 모델링하기 위한 방법으로 T-S 퍼지 모델링 기법을 이용하였다. 규칙의 전건부는 퍼지 값을 나타내며 후건부는 함수관계를 나타낸다. 이때, 시간지연을 고려한 T-S 퍼지 모델은

Plant Rule i :

IF $\theta_1(t)$ is M_{i1} and ... and θ_p is M_{ip}
 THEN $\dot{x}(t) = A_i x(t) + A_{di} x(t-\tau)$
 $+ B_i u(t) + B_{wi} \omega(t)$
 $z(t) = C_i x(t) + D_i u(t)$

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad i = 1, 2, 3 \dots, k$$

으로 표현된다. 여기서 k 는 총 규칙의 수, M_{ij} 는 i 번째 규칙에서 j 번째 전건부 변수 θ_j 의 퍼지 집합이며 $x(t) \in R^n$ 는 상태변수, $u(t) \in R^m$ 는 제어입력, $\omega(t) \in R^l$ 는 제한된 크기를 갖는 외란, $\psi(t) \in R^n$ 는 초기 값을 각각 의미하며, $\theta_1 \sim \theta_p$ 는 전건부 변수, $A_i, A_{di}, B_i, B_{wi}, C_i, D_i$ 는 시스템을 나타내는 적절한 차원의 상수행렬, k 는 규칙의 수이다. 또한, τ 는 $0 < \tau$ 조건을 만족하는 시간지연을 나타내는 상수이다. T-S 퍼지 모델 추론방법에 의해 추론된 퍼지 시스템의 최종출력은 다음과 같다.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k h_i(\theta(t)) [A_i x(t) + A_{di} x(t-\tau) + B_i u(t) + B_{wi} \omega(t)] \quad (3)$$

$$z(t) = \sum_{i=1}^k h_i(\theta(t)) [C_i x(t) + D_i u(t)] \quad (4)$$

하중함수 $\varpi_i(\theta(t))$ 와 정규화한 하중함수 $h_i(\theta(t))$ 는 각각 (5), (6)과 같다. 여기서 $M_{ij}(\theta_j(t))$ 는 퍼지집합 M_{ij} 에서 $\theta_j(t)$ 의 소속정도이다.

$$\varpi_i(\theta(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(\theta_j(t)) \quad (5)$$

$$h_i(\theta(t)) = \frac{\varpi_i(\theta(t))}{\sum_{i=1}^k \varpi_i(\theta(t))} \quad (6)$$

이때, 모든 시간 t 에 대해

$$\varpi_i(\theta(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, k \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^k \varpi_i(\theta(t)) > 0 \quad (8)$$

을 가정하면, 아래의 조건은 항상 만족한다.

$$h_i(\theta(t)) \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots, k \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^k h_i(\theta(t)) = 1 \quad (10)$$

2.2 시간지연 종속 강인제어기

일반적으로 시간지연의 크기가 작은 경우 지연 독립적인 방법에 비해 지연 종속적인 방법이 더 나은 제어 성능을 보인다[6]. 또한, 유사한 항전장비와 메카니즘을 적용한 1축 자세제어시스템이 0.3초미만의 시간지연과 2차 시간지연모형을 가진다는 것을 선행연구에서 확인하였다[7]. 따라서 본 논문에서는 시간지연 종속적인 제어기 설계방법을 이용하였다. 이때, 각 플랜트에 해당하는 제어기 설계를 위해 동일한 퍼지 집합을 사용하며, 제어기 설계를 위해 아래와 같은 제어규칙을 정의한다.

Control Rule i :

IF $\theta_1(t)$ is M_{i1} and ... and θ_p is M_{ip}
 THEN $u(t) = K_i x(t), \quad i = 1, 2, 3 \dots, k$

여기서 K_i 는 i 번째 퍼지집합에 해당하는 이득 값 행렬이다. 이때, 정규화한 하중함수 $h_i(\theta(t))$ 를 이용해 제어기의 최종출력 역시 (11)과 같이 추론할 수 있다.

$$u(t) = \sum_{i=1}^k h_i(\theta(t)) K_i x(t) \quad (11)$$

또한, 식(3), (4)의 퍼지 시스템과 식(11)의 퍼지 제어기로부터 폐 루프 시스템은 (12), (13)으로 표현가능하다[8].

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i(\theta(t)) h_j(\theta(t)) [(A_i + B_i K_j) x(t) + B_{wi} \omega(t) + A_{di} x(t-\tau)] \quad (12)$$

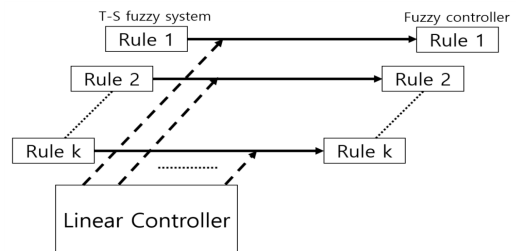


Fig. 2. Design concept of PDC

$$z(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i(\theta(t)) h_j(\theta(t)) [C_i + D_i K_j] x(t) \quad (13)$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad i = 1, 2, 3, \dots, k$$

이때의 시스템 안정도는 Lyapunov 함수를 이용해 판단할 수 있다. 또한, 이 과정에서 H_∞ 성능지수함수를 도입해 LMI상에서 구현하면 H_∞ 성능을 만족하는 제어를 설계할 수 있다.

정리1 : (12), (13)의 퍼지시스템과 주어진 $\tau^* > 0$ 인 시간지연을 고려한다. 이때, (14), (15)의 LMI를 만족하는 양한정행렬 X , Z , M 와 행렬 N_i 가 존재한다면 시간지연종속 퍼지 피드백시스템은 점근적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix} A_{ii} & 0 & \Pi_{1ii} \\ * & -Z & \Pi_{2ii} \\ * & * & \Pi_{3ii} \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{A_{ij} + A_{ji}}{2} & 0 & \Pi_{1ij} \\ * & -Z & \Pi_{2ij} \\ * & * & \Pi_{3ij} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (15)$$

$$A_{ij} = A_i X + A_{di} X + X A_i^T + X A_{di}^T + B_i N_j + N_j^T B_i^T$$

$$\Pi_{1ij} = \left[\frac{X A_i^T + X A_j^T + N_i^T B_j^T + N_j B_i^T}{2} \quad \frac{A_{di} M + A_{dj} M}{2} X \right]$$

$$\Pi_{2ij} = \left[\frac{Z A_{di}^T + Z A_{dj}^T}{2} \quad 0 \quad 0 \right]$$

$$\Pi_{3ij} = \text{diag} \left[-\frac{M}{\tau^*} \quad -\frac{M}{\tau^*} \quad -Z \right]$$

증명 : 부록 A.1

정리2 : (12), (13)의 퍼지시스템과 주어진 $\tau^* > 0$ 와 $\gamma > 0$ 을 고려한다. 이때, (16), (17) LMI를 만족하는 양한정행렬 X , Z , M 와 행렬 N_i 가 존재한다면 시간지연종속 퍼지 피드백시스템은 점근적으로 안정하며 H_∞ norm 한계 γ 를 가진다.

$$\begin{bmatrix} A_{ii} & 0 & B_{wi} & \Xi_{1ii} \\ * & -Z & 0 & \Xi_{2ii} \\ * & * & -\gamma^2 I & \Xi_{3ii} \\ * & * & * & \Xi_{4ii} \end{bmatrix} < 0 \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{A_{ij} + A_{ji}}{2} & 0 & \frac{B_{wi} + B_{wj}}{2} & \Xi_{1ij} \\ * & -Z & 0 & \Xi_{2ij} \\ * & * & -\gamma^2 I & \Xi_{3ij} \\ * & * & * & \Xi_{4ij} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (17)$$

$$\Xi_{1ij} = \left[\frac{X A_i^T + X A_j^T + N_i^T B_j^T + N_j B_i^T}{2} \quad \frac{A_{di} M + A_{dj} M}{2} X \Delta_j \right]$$

$$- \Delta_j = \frac{X C_i^T + X C_j^T + N_i^T D_i^T + N_j^T D_j^T}{2}$$

$$\Xi_{2ij} = \left[\frac{Z A_{di}^T + Z A_{dj}^T}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]$$

$$\Xi_{3ij} = \left[\frac{B_{wi}^T + B_{wj}^T}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]$$

$$\Xi_{4ij} = \text{diag} \left[-\frac{M}{\tau^*} \quad -\frac{M}{\tau^*} \quad -Z \quad I \right]$$

증명 : 부록 A.2

각 퍼지 규칙에 해당하는 이득 값 행렬은 부록 A.2의 $N_i = K_i X$ 로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$K_i = N_i X^{-1} \quad (X^{-1} = P) \quad (18)$$

III. Parameter 설정

3.1 퍼지 규칙 및 모델 설정

3.1.1 퍼지 규칙 설정

퍼지규칙 구성은 선형독립함수의 곱의 합을 이용하는 방법을 이용하였다[5]. 퍼지규칙을 구성하기 위해 (2)에서 아래 (19)와 같은 함수를 선정한다.

$$q_1 = \cos \alpha \quad (19)$$

또한, 두 모터의 추력 조절만 이용하여 자세제어를 수행하는 추력방향 변화 구간을 $[0^\circ \ 30^\circ]$ 라 가정하면 해당구간에서 함수 q_1 은 아래의 값을 가진다.

$$\min(q_1) = 0.866$$

$$\max(q_1) = 1$$

이를 이용해 아래 (20), (21)의 과정을 거쳐

$$h_{10}(\alpha) = \frac{\max(q_1) - q_1}{\max(q_1) - \min(q_1)} \quad (20)$$

$$h_{11}(\alpha) = \frac{q_1 - \min(q_1)}{\max(q_1) - \min(q_1)} \quad (21)$$

퍼지규칙을

$$h_1 = h_{10}$$

$$h_2 = h_{11}$$

으로 구성할 수 있다.

3.1.2 모델 세부구성

각 퍼지규칙에 해당하는 시스템행렬과 입력행렬은 아래 식(22), (23)을 이용해 구할 수 있다.

$$[\hat{A}_1|B_1] = F_0 + \min(q_1)F_1 \quad (22)$$

$$[\hat{A}_2|B_2] = F_0 + \max(q_1)F_1 \quad (23)$$

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, F_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{I_{zz}}Q \end{bmatrix}$$

이때, 시간지연이 시스템에 미치는 영향을 표현하기 위해 시간지연의 영향을 나타내는 행렬 A_{di} 와 시스템 행렬 A_i 를 다음과 같이 정의한다.

$$A_{di} = (1 - \alpha)\hat{A}_i, A_i = \alpha\hat{A}_i$$

기타 실험에 사용한 값은 아래와 같다.

$$\alpha = 0.9, \tau^* = 0.3, \gamma = 4, C_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_i = 0, B_{wi} = [0 \ 0.1]^T$$

3.2 회전체 Parameter 구성

관성모멘트의 경우 3차원모델에 각 파트의 측정 물성치를 대입해 얻은 값이며, 사용한 프로그램은 Dassault Systemes社의 SolidWorks이다. 모델에 대한 세부정보를 얻기 위해 파트별 실제 측정된 중량을 3차원모델의 각 파트에 대입하였다. 추력보정 값인 Q 는 실험을 통해 50%와 40%에서 추력 값을 구한 뒤 추정된 값이다. 도출한 모델의 물성치는 Table 1에 정리하였다. 여

Table 1. Rotatable body parameters

Parameter	Character	value
Moment of inertia	$I_{zz}(kg \cdot m^2)$	0.036429
Arm length	$L(m)$	0.25
Thrust/percentat 45% throttle level	$Q(N\%)$	0.09

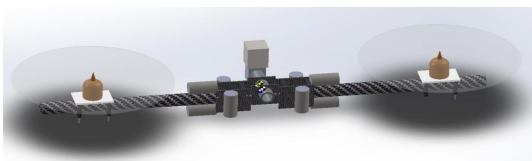


Fig. 3. 3D model of rotatable body

기서 Arm length는 프로펠러 회전에 의해 발생한 양력의 작용점과 회전중심사이의 거리를 의미하며, 회전관성모멘트는 배터리와 전자장비 등의 무게를 모사하기 위해 100g 추 6개를 회전 중심에 변화를 주지 않도록 추가했을 때의 값이다. 도출한 모든 값들을 식(16), (17)의 LMI에 대입하면 이득 값 행렬은 다음과 같이 구해진다.

$$K_1 = [-1.189666 \quad -0.686753]$$

$$K_2 = [-1.031463 \quad -0.595433]$$

IV. 하드웨어 구성 및 실험 환경

4.1 개발 환경 및 실험장비 구성

실험장비에 탑재한 MCU(Micro Controller Unit)는 Texas Instrument社의 DSP28346 이며, 개발용 소프트웨어로 CCS(Code Composer Studio)를 사용하였다. C 프로그래밍 언어를 사용해 소스코드를 작성했고, 상태정보 모니터링은 기 개발된 GCS(Ground Control System)프로그램을 활용하였다[9]. 실험에 사용한 하드웨어 주요 제원은 Table 3에 정리하였다.

실험장비는 얇은 원통형 프레임에 사용함에 따라 프로펠러직경, 프로펠러와 프레임 사이의 거리에 따른 효과는 무시하였다. 실험장비는 비행 상황을 모사하기 위해 회전중심과 무게중심이 일치하도록 설계했으며, 배선의 위치를 회전

Table 2. Specification of equipment

Height	Width	Operating angle
350mm	600mm	$[-35^\circ \quad 35^\circ]$

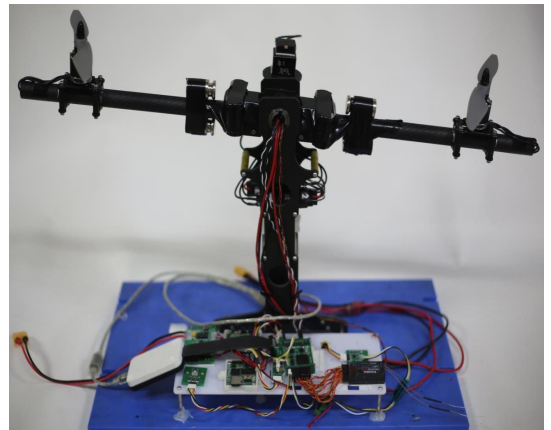


Fig. 4. 1-axis control experiment equipment

Table 3. Specification of installed parts

Hardware	Specification
Processor	DSP28346 (Texas Instrument)
Motors	MT2216 KV900 (T-Motor)
Propellers	9X4.5 MR/MRP (APC)
GPS/INS	SPATIAL (Advance Navigation)

Table 4. PD-PI controller parameters

Items	ϕ	$\dot{\phi}$
P	-2.364755	-0.230986
I	0	-0.158769
D	-0.386969	0

측 안을 통과하도록 구성해 배선이 실험장비의 회전운동에 주는 영향을 줄이고자 하였다. 동력은 4cell 리튬폴리머 배터리를 사용하였으며, 이외 기타 제원은 Table 2와 같다[10]. 최종적으로 제작한 실험장비는 Fig. 4와 같다.

4.2 SIMC PD-PI 제어기

비교 실험대상 제어기는 이전 실험에서 1축제어장비에 적용했던 Simple Internal Model Control (SIMC)이득조정기법을 적용한 PD-PI제어기를 사용하였다[7]. 시스템모델 추정을 위한 데이터는 틸트 각 0° 를 기준으로 하였으며, 시간 지연과 관련된 상수 $\tau_c = 0.3$ 으로 두었을 때 도출한 이득 값은 Table 4에 정리하였다. 해당 이득 값을 적용한 후 별도의 세부 이득조정은 진행하지 않았다.

4.3 실험 조건 및 목적

실험의 목적은 설계된 제어기의 고정피치 형 회전익시스템 적용가능성 검토이다. 이를 위해 설계범위 내에서 실험장비 양쪽에 동일한 틸트 각 변화를 주고 수직방향 추력 값이 바뀐 상황을 구현하였다. 이후 PD-PI 형태의 제어기와 병렬분산보상기법을 적용한 제어기의 결과를 비교하고 제어성능을 검증하였다.

실험은 설계한 제어기를 적용한 MCU가 자세 제어를 수행하도록 하였다. 이때, 모터가 낼 수 있는 성능은 0~100%로 환산해 사용하였으며, 45%의 구동점을 기준으로 자세제어를 수행하였다. 또한, 실험장비 구동 시 퍼지 규칙과 연관된 틸트 각도는 알고 있는 값으로 가정하였다.

V. 결과 및 분석

5.1 시뮬레이션 결과

병렬분산보상기법을 적용한 제어기의 경우 퍼지 규칙을 기반으로 여러 이득 값과 상태변수 값이 복합적으로 계산된다. 이런 경우 상황별 시스템의 거동을 예측하기 쉽지 않다. 따라서 장비적용에 앞서 시뮬레이션을 통해 설계된 제어기를 적용한 시스템의 반응특성을 확인하였다. 추력방향의 변화를 의미하는 틸트 각 α 에 따른 각도, 각속도 제어결과와 제어기 출력 값을 Fig. 5 ~ Fig. 7에 각각 도시하였다. 이때, 시뮬레이션은 Mathworks社의 Simulink를 사용했으며, 회전체의 운동방정식을 이용해 시뮬레이션을 수행하였다. 이때, 실제 모터 구동성능의 한계를 고려해 saturation block을 사용, 각속도($\dot{\phi}$) 제한을 $-80^\circ/s^2 \leq \dot{\phi} \leq 80^\circ/s^2$ 으로 설정하였다. 시뮬레이션 설정은 variable step, max step size 0.03, ode45 solver를 사용하였다.

Figure 5, Fig. 6의 결과에서 틸트 각 변화에도 동일한 제어성능을 보임을 확인할 수 있다. 이는 Fig. 7에 도시한 제어기 출력결과로 설명가능하며, 틸트 각이 변화함에 따라 제어기 출력 결과가 달라진데 따른 결과이다. 즉, 지면 수직 방향의 추력 값이 상대적으로 줄어든 $\alpha = 30^\circ$ 인 경우 이를 보상하기 위해 제어기 출력으로 상대적으로 큰 값을 가진다. 따라서 추력방향의

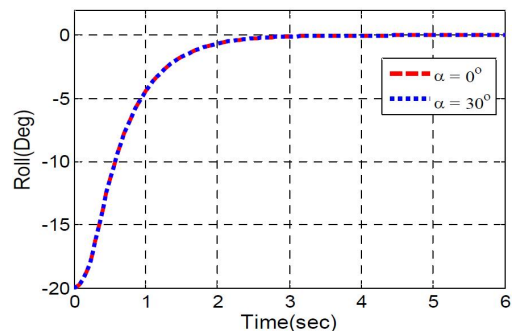


Fig. 5. Roll response along the tilt angle(Sim. PDC)

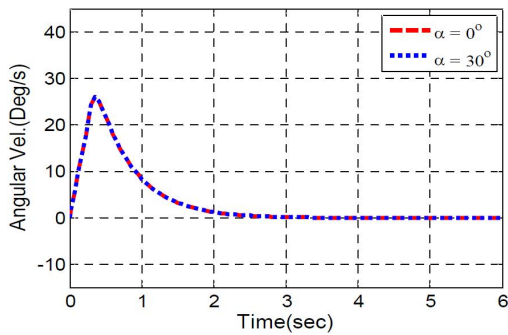


Fig. 6. Angular velocity response along the tilt angle(Sim. PDC)

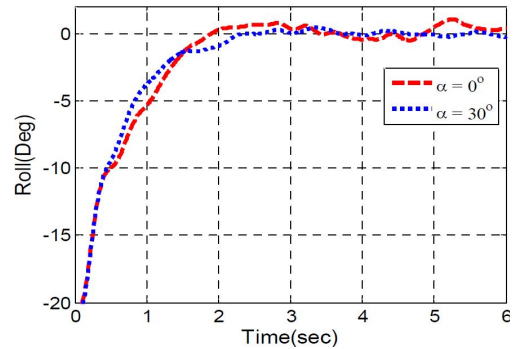


Fig. 8. Roll response along the tilt angle(PDC)

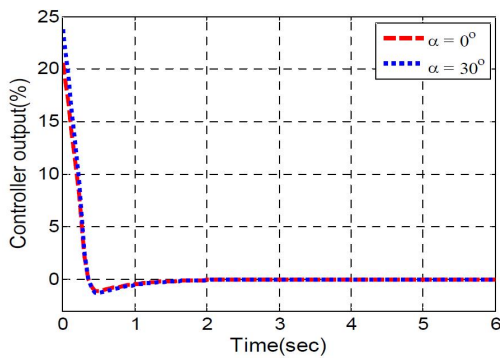


Fig. 7. Controller output values(Sim. PDC)

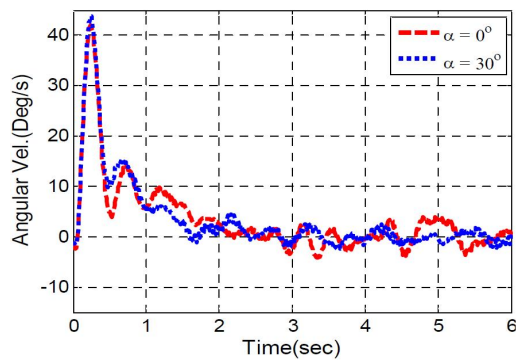


Fig. 9. Angular velocity response along the tilt angle(PDC)

변화에도 불구하고 동일한 제어성능을 보이며, 시뮬레이션 상에서 제어기 설계 목적에 부합하는 제어가 설계되었음을 확인할 수 있다.

5.2 실험결과

Figure 4의 실험장비에 본 논문의 병렬분산보상기법을 적용한 제어결과는 Fig. 8, Fig. 9에, SIMC 이득조정기법을 따른 PD-PI제어기의 결과는 Fig. 10, Fig. 11에 그 결과를 각각 도시하였다.

먼저, 병렬분산보상기법을 적용한 제어기 결과를 보면 Fig. 8의 각도 제어결과와 Fig. 9의 각속도 제어결과에서 추력방향 변화에도 불구하고 시뮬레이션 결과와 유사하게 거의 동일한 제어성능을 보임을 알 수 있다. 반면, PD-PI제어기의 경우 Fig. 10의 각도 제어결과에서 추력방향이 변함에 따라 제어성능이 변함을 알 수 있다. 이는 Fig. 11의 결과를 통해 설명할 수 있는데, 각속도 반응에서 추력방향 변화에 따른 모델오차로 인해 오버슈트가 발생하였다. 이와 같은 각속도 제어에서 발생한 수렴성 문제가 Fig. 10의 각도반응에 영향을 주어 전반적인 플랫폼제어성

능에 변화가 생겼음을 알 수 있다.

한편, Fig. 9의 각속도 반응은 시뮬레이션의 Fig. 6과 비교해 상당한 오차가 존재하며 이는 몇 가지 이유가 복합적으로 작용해 발생한 오차로 생각된다. 첫 번째로, 시뮬레이션에서 모터의 구동한계를 고려한 saturation block 설정이 실험장비의 구동한계 값보다 작은 점이다. 이런 경우 시뮬레이션에서 각속도 최대값이 감소하게 된다. 두 번째로, 회전관성모멘트의 오차이다. 3D 캐드프로그램으로 물성치를 얻을 당시, 실제 파트 값을 대입했지만, 프로펠러의 회전과 베어링 계수, 설치오차 등은 고려하지 않았다. 세 번째로, 고정피치 프로펠러의 추력 값이다. 주로 전기추진방식의 무인기에서 많이 사용하는 고정피치 프로펠러의 추력은 모터의 회전수 함께 표현했을 때 4차식 형태로 나타난다. 본 실험에서는 각 모터의 구동 기준점에서 제어기 출력 값 1%당 추력 값을 0.09N으로 선형화해 사용하였다. 따라서 제어기 출력 값이 클수록 추력 오차는 점점 커지게 된다. 이외 모델링하지 않은 모터와 프로펠러의 등의 복합적인 영향으로 Fig. 6

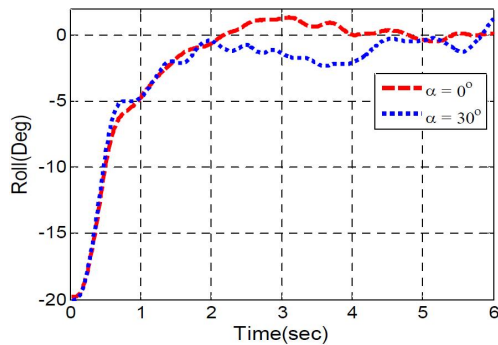


Fig. 10. Roll response along the tilt angle(PD-PI)

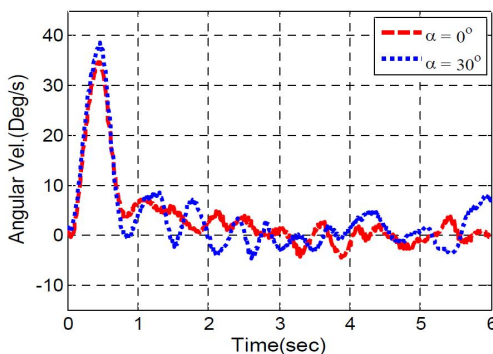


Fig. 11. Angular velocity response along the tilt angle(PD-PI)

과 Fig. 9간의 오차가 발생했다고 추정된다.

VI. 결 론

본 논문에서는 비선형성을 가지는 회전익 시스템의 지상실험을 위한 장비제작과 시스템 모델링 기법, 제어기설계기법의 적용가능성 검증에 대한 내용을 다루었다.

장비를 이용한 실험에서 병렬분산보상기법을 적용한 경우 추력방향의 변화에도 불구하고 일정한 제어성능을 보임을 확인하였다. 이는 모델링 단계부터 추력변화를 고려한데 따른 결과로 병렬분산보상기법이 고정피치형 회전익 시스템에 적용가능하다는 의미로 볼 수 있다. 또한, 별도의 이득조정과정을 거치지 않고 동일한 시간지연의 설계조건을 갖는 선형제어기의 결과와 비교 할 때, 비선형 플랜트 제어에서 병렬분산보상기법과 해당 제어기 설계기법이 설계 소요 시간 단축과 제어성능에서 그 장점을 확인할 수 있었다. 하지만 시뮬레이션과 실험의 각속도 결과가 상당한 차이를 보였는데, 비행체에 해당

설계과정을 적용하기 위해서는 모델의 불확실성을 추가하거나 모델충실도를 높이는 방법 등으로 개선이 필요하다고 판단된다. 이를 바탕으로 모델링이 적절히 수행될 경우 틸트형 무인항공기의 천이구간 안정화제어기 설계 등에 활용 가능할 것으로 기대된다.

후 기

이 논문은 2015년 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원(No. NRF-2015R1A2A2A01005494)과 2015년 교육부와 한국연구재단의 지역혁신창의인력양성사업의 지원(NRF-2015H1C1A1035499)을 받아 수행된 연구임.

Reference

- 1) T. Takagi and M. Sugeno, "Fuzzy Identification of Systems and Its Applications to Modeling and Control", IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 1, No.1, Jan. 1985, pp.116~132.
- 2) H. O. Wang, K. Tanaka and M. F. Griffin, "Parallel Distributed Compensation of Nonlinear Systems by Takagi-Sugeno Fuzzy Model", IEEE International Conference on Fuzzy Systems and Fuzzy Engineering Symposium, Vol. 2, Mar. 1995, pp.531~538.
- 3) H. O. Wang, K. Tanaka and M.F. Griffin, "An approach to fuzzy control of nonlinear systems: Stability and design issues", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 4, No.1, Feb. 1996, pp.14~23.
- 4) M. G. Shon, "Design of stabilizing controller based on T-S Fuzzy Model for Two-Rotor System", M. S. Dissertation, Changwon National University, Republic of Korea, 2008
- 5) H. G. Min, E. T. Jeung and S. H. Kwon, "An Improved Method to Construct T-S Fuzzy Model", ICCAS2003 Fall Conference, pp.2264~2269.
- 6) K. R. Lee, J. H. Kim, and E. T. Jeung, "Delay-dependent Fuzzy H_2/H_∞ Controller Design for Delayed Fuzzy Dynamic Systems", Journal of Institute of Electronics and Information Engineers, Vol. 41, No.5, Sep. 2004, pp.19~27.

7) Y. S. Choi, Y. J. You, J. S. Jeong and B. S. Kang, "Application of SIMC based Quad-rotor Cascade Control by using 1-axis Attitude Control Test-bench", Journal of Advanced Navigation Technology, Vol 19, No.6, Dec. 2015, pp.473~483.

8) B. Chen and X. Liu, "Delay-Dependent Robust H_∞ Control for T-S Fuzzy Systems With Time Delay", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 13, No.4, Aug. 2005, pp.544~556.

9) S. H. Park, J. B. Song, M. S. Roh, W. J. Song and B. S. Kang, "Aviation Communication Technique: Design and Implementation of Mobile Network Based Long-Range UAV Operational System for Multiple Clients", Journal of Advanced Navigation Technology, Vol. 19, No.3, Jun. 2015, pp.217~223.

10) J. S. Jeong, Y. S. Byun, W. J. Song and B. S. Kang, "Study on Performance Prediction of Electric Propulsion System for Multicopter UAVs", Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 33, No.5, May. 2016, pp.1~10.

11) S. K. Nguang, " H_∞ Fuzzy Output Feedback Control Design for Nonlinear Systems: An LMI Approach", IEEE Transactions on Fuzzy Systems, Vol. 11, No.3, Jun. 2003, pp.190~194.

12) J. H. Jang, E. T. Jeung and S. H. Kwon, "A study on Control for the Two-Rotor System Using Inertial Sensors", Journal of Institute of Control, Robotics and Systems, Vol. 19, No.3., Mar. 2013, pp.190~194.

13) E. T. Jeung, S. H. Kwon and K. R. Lee, "Construction of T-S fuzzy model for nonlinear systems", Journal of Control, Automation and System Engineering, Vol. 8, No.11, Nov. 2002, pp.941~947.

14) PinkWink : <http://pinkwink.kr>

15) P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali, LMI Control Toolbox, The Math Works Ins., 1995.

16) Mathworks, Using Simulink[®] v8.2

17) Dassault Systemes, Using SolidWorks 2014

18) Texas Instruments , Using Code ComposerTM Studio 5.5.0

(부록 A.1)

다음과 같은 Lyapunov 함수를 고려한다.

$$V(x(t), t) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(s)Sx(s)ds + \int_{-\tau}^0 \int_{t+a}^t \dot{x}^T(s)Hx(s)ds da \tag{A.1-1}$$

여기서

$$x(t - \tau) = x(t) - \int_{-\tau}^0 \dot{x}(t+a)da \tag{A.1-2}$$

이며, 지면상 아래부터 $h_i(\theta(t)) = h_i$, $\omega(t) = \omega$ $x(t) = x$, $x(t - \tau) = x_\tau$, $x(t + a) = x_a$ 로 표기한다. $\omega(t) = 0$ 인 조건에서 (12)의 페루프 시스템은

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i h_j [(A_i + B_i K_j + A_{di})x - \int_{-\tau}^0 \frac{(A_{di} + A_{dj})}{2} x_a da] \tag{A.1-3}$$

와 등가이다. 따라서 Lyapunov 함수의 미분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i h_j [2x^T P(A_i + B_i K_j + A_{di})x - 2x^T P \\ &\times \int_{-\tau}^0 \frac{(A_{di} + A_{dj})}{2} \dot{x}_a da] + x^T Sx + \tau x^T H \dot{x} - x_\tau^T S x_\tau \\ &- \int_{-\tau}^0 \dot{x}_a^T H x_a da \end{aligned} \tag{A.1-4}$$

여기서

$$\begin{aligned} &- \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i h_j 2x^T P \int_{-\tau}^0 \frac{(A_{di} + A_{dj})}{2} \dot{x}_a da \\ &- \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i h_j \tau x^T P \frac{(A_{di} + A_{dj})}{2} H^{-1} \frac{(A_{di} + A_{dj})^T}{2} P x \\ &+ \int_{-\tau}^0 \dot{x}_a^T H x_a da \end{aligned} \tag{A.1-5}$$

임을 이용해 다음과 같이 변형 가능하다.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i h_j 2x^T P(A_i + B_i K_j + A_{di})x \\ &+ \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i h_j \tau x^T P \frac{(A_{di} + A_{dj})}{2} H^{-1} \frac{(A_{di} + A_{dj})^T}{2} \\ &\times P x + x^T Sx + \tau x^T H \dot{x} - x_\tau^T S x_\tau \end{aligned} \tag{A.1-6}$$

또한, (A.1-7)은 항상 성립하므로

$$\sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^k h_i h_j h_l h_m X_{ij}^T S X_{lm} \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i h_j X_{ij}^T S X_{ij} \tag{A.1-7}$$

아래 (A.1-8)과 같이 표현가능하다.

$$\begin{aligned} \dot{x}^T H \dot{x} &= \sum_i^k \sum_j^k \sum_l^k \sum_m^k h_i h_j h_l h_m [(A_i + B_i K_j)x + A_{di} x_\tau]^T H \\ &\times [(A_i + B_i K_m) + A_{di} x_\tau] = \frac{1}{4} \sum_i^k \sum_j^k \sum_l^k \sum_m^k h_i h_j h_l h_m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \begin{bmatrix} x \\ x_\tau \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (A_i + B_i K_j)^T + (A_j + B_j K_i)^T \\ A_{di}^T + A_{dj}^T \end{bmatrix} H \\
& \times \begin{bmatrix} (A_l + B_l K_m) + (A_m + B_m K_l) & A_{dl} + A_{dm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_\tau \end{bmatrix} \\
& \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i h_j \begin{bmatrix} x \\ x_\tau \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (A_i + B_i K_j)^T + (A_j + B_j K_i)^T \\ A_{di}^T + A_{dj}^T \end{bmatrix} \\
& \times H \begin{bmatrix} (A_i + B_i K_j) + (A_j + B_j K_i) & A_{di} + A_{dj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_\tau \end{bmatrix} \quad (\text{A.1-8})
\end{aligned}$$

(A.1-8)을 이용하면 (A.1-6)은 아래와 같이 표현 가능하다.

$$\begin{aligned}
\dot{V} & \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i h_j \begin{bmatrix} x \\ x_\tau \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Gamma_{ij} & \tau \bar{A}_{ij}^T H \bar{A}_{dij} \\ * & -S + \tau \bar{A}_{dij}^T H \bar{A}_{dij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_\tau \end{bmatrix} \\
& = \sum_{i=1}^k h_i^2 \begin{bmatrix} x \\ x_\tau \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Gamma_{ii} & \tau \bar{A}_{ii}^T H \bar{A}_{di} \\ * & -S + \tau \bar{A}_{di}^T H \bar{A}_{di} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_\tau \end{bmatrix} \\
& + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j>i}^k h_i h_j \begin{bmatrix} x \\ x_\tau \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}}{2} & \tau \bar{A}_{ij}^T H \bar{A}_{dij} \\ * & -S + \tau \bar{A}_{dij}^T H \bar{A}_{dij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_\tau \end{bmatrix} \quad (\text{A.1-9})
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{ij} = P(A_i + B_i K_j + A_{di}) + (A_i + B_i K_j + A_{di})^T P + S + \tau \bar{A}_{ij}^T H \bar{A}_{dij} + \tau P \bar{A}_{dij} H^{-1} \bar{A}_{dij}^T P$$

여기서 $\bar{A}_{ij} = \frac{A_i + B_i K_j + A_j + B_j K_i}{2}$, $\bar{A}_{dij} = \frac{A_{di} + A_{dj}}{2}$ 이며, (A.1-10), (A.1-11)을 만족하는 양한정행렬 P , S , H 와 행렬 N_i 가 존재한다면 $\dot{V} \leq 0$ 이므로 Lyapunov-Krasovkii 정리로부터 시스템은 점근적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{ii} & \tau \bar{A}_{ii}^T H \bar{A}_{di} \\ * & -S + \tau \bar{A}_{di}^T H \bar{A}_{di} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.1-10})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}}{2} & \tau \bar{A}_{ij}^T H \bar{A}_{dij} \\ * & -S + \tau \bar{A}_{dij}^T H \bar{A}_{dij} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{A.1-11})$$

(부록 A.2)

초기조건이 0일 때, H_∞ 성능지수를 다음과 같이 정의한다.

$$J = \int_0^\infty (z^T z - \gamma^2 w^T w) dt \quad (\text{A.2-1})$$

$V > 0$ 이므로,

$$J \leq \int_0^\infty (z^T z - \gamma^2 w^T w + \dot{V}) dt \quad (\text{A.2-2})$$

(A.2-2)은 항상 성립한다. 이때 (13)을 이용하면

$$z^T z = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \sum_{m=1}^k h_i h_j h_l h_m x^T [C_i + D_i K_j]^T [C_l + D_l K_m] x$$

이므로, (A.1-7)을 이용해

$$\begin{aligned}
z^T z & \leq \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i h_j x^T [C_i + D_i K_j + C_j + D_j K_i]^T \\
& \times [C_i + D_i K_j + C_j + D_j K_i] x \quad (\text{A.2-3})
\end{aligned}$$

임을 알 수 있고 (A.2-4)와 같이 표현 가능하다.

$$\begin{aligned}
z^T z - \gamma^2 w^T w & \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i h_j \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{C}_{ij}^T \bar{C}_{ij} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} \\
& = \sum_{i=1}^k h_i^2 (\theta(t)) \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{C}_{ii}^T \bar{C}_{ii} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} \\
& + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j>i}^k h_i h_j \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{C}_{ij}^T \bar{C}_{ij} & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \omega \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-4})
\end{aligned}$$

여기서 $\bar{C}_{ij} = \frac{C_i + D_i K_j + C_j + D_j K_i}{2}$ 이다. 한편, Lyapunov 함수 미분은

$$\begin{aligned}
\dot{V} & = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i h_j [2x^T P(A_i + B_i K_j + A_{di})x + 2x^T P B_{wi} \omega \\
& - 2x^T P \int_{-\tau}^0 \bar{A}_{dij} \dot{x}_a da] + x^T S x + \tau x^T H \dot{x} - x_\tau^T S x_\tau \\
& - \int_{-\tau}^0 x_a^T H x_a da \quad (\text{A.2-5})
\end{aligned}$$

이때 $\bar{B}_{wij} = \frac{B_{wi} + B_{wj}}{2}$ 라 할 때, (A.1-8)과 유사하게

$$x^T H \dot{x} \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i h_j \begin{bmatrix} x \\ x_\tau \\ \omega \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}_{ij}^T \\ \bar{A}_{dij}^T \\ \bar{B}_{wij}^T \end{bmatrix} H \begin{bmatrix} \bar{A}_{ij} & \bar{A}_{dij} & \bar{B}_{wij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_\tau \\ \omega \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-6})$$

임을 알 수 있다. (A.1-5)와 (A.2-6), (A.2-4)을 이용해 (A.2-5)를 정리하면

$$\begin{aligned}
\dot{V} & \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k h_i h_j \begin{bmatrix} x \\ x_\tau \\ \omega \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Gamma_{ij} & \tau \bar{A}_{ij}^T H \bar{A}_{dij} & P B_{wi} + \tau \bar{A}_{ij}^T H \bar{B}_{wij} \\ * & -S + \tau \bar{A}_{dij}^T H \bar{A}_{dij} & \tau \bar{A}_{dij}^T H \bar{B}_{wij} \\ * & * & \bar{B}_{wij}^T H \bar{B}_{wij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_\tau \\ \omega \end{bmatrix} \\
& = \sum_{i=1}^k h_i^2 \begin{bmatrix} x \\ x_\tau \\ \omega \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Gamma_{ii} & \tau \bar{A}_{ii}^T H \bar{A}_{di} & P B_{wi} + \tau \bar{A}_{ii}^T H \bar{B}_{wi} \\ * & -S + \tau \bar{A}_{di}^T H \bar{A}_{di} & \tau \bar{A}_{di}^T H \bar{B}_{wi} \\ * & * & \bar{B}_{wi}^T H \bar{B}_{wi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_\tau \\ \omega \end{bmatrix} \\
& + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j>i}^k h_i h_j \begin{bmatrix} x \\ x_\tau \\ \omega \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}}{2} & \tau \bar{A}_{ij}^T H \bar{A}_{dij} & P \bar{B}_{wij} + \tau \bar{A}_{ij}^T H \bar{B}_{wij} \\ * & -S + \tau \bar{A}_{dij}^T H \bar{A}_{dij} & \tau \bar{A}_{dij}^T H \bar{B}_{wij} \\ * & * & \bar{B}_{wij}^T H \bar{B}_{wij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_\tau \\ \omega \end{bmatrix} \quad (\text{A.2-7})
\end{aligned}$$

와 같다. 위 식을 만족하기 위한 조건을 정리하면

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{ii} + \bar{C}_{ii}^T \bar{C}_{ii} & \tau \bar{A}_{ii}^T H \bar{A}_{di} & P B_{wi} + \tau \bar{A}_{ii}^T H \bar{B}_{wi} \\ * & -S + \tau \bar{A}_{di}^T H \bar{A}_{di} & \tau \bar{A}_{di}^T H \bar{B}_{wi} \\ * & * & -\gamma^2 I + \bar{B}_{wi}^T H \bar{B}_{wi} \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{A.2-8})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}}{2} + \bar{C}_{ij}^T \bar{C}_{ij} & \tau \bar{A}_{ij}^T H \bar{A}_{dij} & P \bar{B}_{wij} + \tau \bar{A}_{ij}^T H \bar{B}_{wij} \\ * & -S + \tau \bar{A}_{dij}^T H \bar{A}_{dij} & \tau \bar{A}_{dij}^T H \bar{B}_{wij} \\ * & * & -\gamma^2 I + \bar{B}_{wij}^T H \bar{B}_{wij} \end{bmatrix} \leq 0 \quad (\text{A.2-9})$$

이며 (A.2-8), (A.2-9)를 만족하는 양한정행렬 P , S , H 와 행렬 N_i 가 존재한다면 퍼지 피드백시스템은 점근적으로 안정하며, H_∞ norm 한계 γ 를 가진다. 한편, $P = X^{-1}$, $S = Z^{-1}$, $H = M^{-1}$,

$N_i = K_i X$ 와 슈어 여수정리(Schur Complement)를 이용하면 (A.1-10), (A.1-11)와 (14), (15) 그리고 (A.2-8), (A.2-9)와 (16), (17)은 동가임을 알 수 있다.