대한수학교육학회지 <학교수학> 제 18 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 18, No. 4, 749 ~ 771. Dec 2016

우리나라와 미국 수학 교과서의 과제 비교 : 평행사변형 조건을 중심으로

정 혜 윤* · 이 경 화**

이 논문에서는 우리나라와 미국 수학 교과서에서 다루고 있는 평행사변형이 되기 위한 조건 관련 과제를 과제의 구조, 증명과 추론 유형, 그리고 인지적 노력 수준에 따라 비교 분석하였다. 이를 통해 두 나라 교과서 과제의 공통점과 차이점을 분석하였다. 그 결과는 다음과 같다. 첫째, 과제 구조와 관련하여, 우리나라 교과서에 비해 미국 교과서에 제시된 과제의 구조가 더 다양하다. 둘째, 증명과 추론 유형과 관련하여, 우리나라와 미국 교과서 모두 IC 과제와 DA 과제의 구성 비율이 높으며, 우리나라 교과서에 비해 미국 교과서에 제시된 과제의 유형이 더 다양하다. 셋째, 과제의 인지적 노력 수준과 관련하여, 우리나라와 미국 교과서 모두 PNC 과제와 PWC 과제가 대부분을 차지하며, 우리나라의 경우 미국에 비해 구체적인 알고리즘적 절차를 이용하는 수학 과제를 제시하는 비율이 높다. 차이점을 토대로 우리나라 교과서 재구성에 필요한 다음과 같은 시사점을 얻을 수 있었다. 첫째, 과제의 구조 및 증명과 추론 유형과 관련하여, 구성의 다양성을 높여야 한다. 둘째, 과제의 인지적 노력 수준과 관련하여, PNC 과제에 대한 편중 현상을 완화해야 하며, 과제 유형별 인지적 노력 수준에 대한 재고가 필요하다. 셋째, 과제의 주제 또는 소재와 관련하여, 수학 내적, 외적인 상황과의 연결성이 강화된 과제를 도입할 수 있는 방안의 재고가 필요하다.

Ⅰ. 서 론

유클리드 기하학원론에서 평행사변형이 되기 위한 조건은 평행선에 관한 여러 가지 이론이 평행사변형에 관한 연구로 넘어가도록 연결 짓는 중요한 내용 요소로 소개된다(유클리드, 토마스 히드, 1998, p. 272). 실제로 유클리드 기하학원론 제 1권은 각과 삼각형(명제 1~26), 평행선(명제 27~32), 평행사변형(명제 33~48)으로 구성되는데, 이 중 명제 33에서 평행사변형이 되기 위한 조건을 제시함으로써 각과 삼각형 및 평행선에 대한 내용을 평행사변형의 성질(명제 34)과 연결 짓고 있다. 넓이가 같은 평행사변형을 작도(명제 35~45)하는데 필요한 선행개념이 되기도 하는데, 정의 이외의 조건을 이용하여 작도가 가능함을 알려줌으로써 평행사변형의 작도법에 대한 탐구의 기회를 제공하기도 한다. 또한 정의 이외의 조건을 이용한 작도법은 이후 여러 가지 사각형의 다양한 작도법에 대한 근거가 되기도 한다. 평행사변형이 되기 위한 조건의 이와 같은 역할을 고려할 때, 교과서에서 해당 조건들을 제시하고 이에 대한 탐구의 기회를 제공하는 것은 향후 기하학 학습의 중요한 기반이 된다. 그리고

* 서울대학교 대학원, hy0501@snu.ac.kr (제1 저자)
** 서울대학교, khmath@snu.ac.kr (교신저자)

이와 같은 이유로 인해 우리나라 교과서(강옥기 외, 2015; 고호경 외, 2015; 김서령 외, 2015; 류희찬 외, 2015; 우정호 외, 2015; 이준열 외, 2015)에서 평행사변형이 되기 위한 조건은 사각형의 성질 단원에서 높은 비중을 차지하고 있다.

평행사변형이 되기 위한 조건 관련 선행연구로는 주로 탐구형 기하 소프트웨어를 활용하여 평행사변형이 되기 위한 여러 가지 조건들을 지도할 수 있는 방안에 대한 연구(오호진, 2001; 이연재, 2005; 장유정, 2009)가 이루어져 왔으며, 교과서의 수학 과제에 중점을 두고 분석한 연구는 미흡한 실정이다. 하지만, 과제는 수학 학습을 위한 가장 중요하고 핵심적인 요소로써(김성희, 방정숙, 2005; Simon & Tzur, 2004; Stein, Grove, & Henningsen, 1996), 학생들은 수업 시 교과서에 포함된 수학 과제를 해결하며 수학적인 이해를 발전시킨다(권지현, 김구연, 2013). 과제를 해결함으로써 수학적 개념을 이해하고 학습할 수 있는 기회를 제공받게 되는 것이다. 이에, 교과서 과제분석을 통해 현재 교과서가 평행사변형이 되기 위한 조건에 대한 이해 및 학습의 기회를 어떠한 방식으로 제공하고 있는지 살펴볼 필요가 있다.

수학 교과서 과제 분석을 수행한 선행연구들을 살펴보면, 우리나라 교과서의 과제만을 분석한 연구(권지현, 김구연, 2013; 김동중 외, 2015; 김미희, 김구연, 2013; 홍창준, 김구연, 2012; 황혜정, 김슬비, 2014)와 우리나라와 외국 교과서의 과제를 비교 분석한 연구(이경화, 지은정, 2008; 임재훈, 김수미, 박교식, 2005; 한혜숙, 2010; Son, 2005; Son, 2012; Son & Senk, 2010)가 주로 이루어졌다. 이 중, 우리나라와 외국 교과서의 과제를 비교 분석한 연구는 보다 실질적인 교수, 학습에 대한 아이디어를 제공할 수 있으며(박경미, 임재훈, 2002), 외국 교과서에 수학 과제가 어떻게 구성되어 있는지를 분석함으로써 향후 우리나라 교과서 재구성을 위한 기초 정보로 활용될 수 있다는 점에서 유용하다.

이에, 본 연구에서는 우리나라 중학교 2학년 수학 교과서와 미국의 Geometry 교과서에서 다루고 있는 평행사변형이 되기 위한 조건 관련 수학 과제를 비교 분석하고자 한다[1]. 평행사변형이 되기 위한 조건 관련 수학 과제가 어떠한 구조로 제공되고 있으며, 증명과 추론의 여러 유형이 각각 어느 정도의 비율로 제공되고 있는지, 그리고 어느 정도의 인지적 노력 수준으로 제공되고 있는지에 대해 살펴보고자 한다. 과제 유형의 다양성 및 과제 수준의 분포를 살펴봄으로써 교과서에서 평행사변형이 되기 위한 조건을 이해하고 학습할 수 있는 기회를 제공하는 방식을 살펴보고자 하는 것이다. 그리고 이와 관련하여 두 나라 교과서의 수학 과제에 나타나는 공통점과 차이점을 확인한 뒤, 차이점을 토대로 향후 우리나라 수학 교과서의 과제 재구성 시 추가적으로 고려해야할 사항에 대해 살펴보고자 한다.

Ⅱ. 선행연구

1. 증명과 추론의 유형

증명과 추론의 유형은 연구자에 따라 다양하게 분류되는데, 이종희, 김선희(2002)는 연역, 귀납, 유추, 시각적 추론으로, 김선희, 김기연(2004)은 연역, 귀납, 가추로 분류하였고, Harel과 Sowder (2007)는 전문가에 의한 확신, 경험적 증명, 연역

1) 매 학년마다 대수, 기하 등을 한 교과서에 조금씩 점진적으로 제시하는 우리나라와 달리 미국의 경우 대수와 기하를 분리하여 독립된 교과서에 집중적으로 제시한다는 특징을 갖는다. 이로 인해 평행사변형이 되기 위한 조건의 경우, 우리나라에서는 중학교 2학년 교육과정에 포함되지만 미국의 경우 9학년(우리나라 중학교 3학년에 해당) Geometry 교육과정에 포함된다.

적 증명으로 분류하였으며, Johnson, Thompson과 Senk(2010)는 반례 찾기, 추측하기, 추측 조사하기, 논증 개발하기, 논증 평가하기, 실수 정정하기로 분류하였다. 이들 중 Johnson 외(2010)의 연구는 연습문제에 제시된 증명과 추론을 그 역할에 따라 분류한 것으로, 증명과 추론 활동 시 나타나는 특성이나 수준에 따라 유형을 분류한 다른 연구들(김선희, 김기연, 2004; 이종희, 김선희, 2002; Harel & Sowder, 2007)과 차이점을 갖는다. 이후 Thompson, Senk와 Johnson(2012)은 Johnson 외(2010)의 연구를 토대로 반례 찾기, 추측하기, 추측 조사하기, 논증 개발하기, 논증 평가하기, 실수 정정하기의 여섯 가지 추론 유형에 대한 분석틀을 마련하였다.

반례 찾기(finding a counterexample : FC)는 주어진 문장이 거짓임을 증명하는 수단으로 반례를 찾는 것이다. 예를 들어, "$(x-y)^2 = x^2 + y^2$이 성립하지 않음을 보이는 반례를 찾아라."는 반례 찾기 과제라고 할 수 있다.

추측하기(making a conjecture : MC)는 일반적인 예 혹은 특수한 예를 찾기 위하여 규칙을 사용하는 것이다. 즉, 주어진 사례에 포함되어 있는 규칙을 발견, 통합하고 일반화하는 과정을 의미한다. 예를 들어, "수열 $2, 4, 6, 8, \cdots$의 일반항 a_n을 식으로 나타내고, a_{100}의 값을 구하시오."는 추측하기 과제라고 할 수 있다.

추측 조사하기(investigating a conjecture : IC)는 명시된 추측이나 주장의 참, 거짓을 판별하고 그 이유를 논리적으로 제시하는 것이다. 예를 들어, "'모든 실수 a에 대하여, $(-a)^2 = -a^2$이다.'가 참인지 거짓인지 결정하고 그 이유를 설명하시오."는 추측 조사하기 과제라고 할 수 있다.

논증 개발하기(developing an argument : DA)는 일반적인 사례 혹은 특수한 사례에 대한 증명을 작성하는 것이다. 논증 개발하기 유형의 과제는 주로 '증명하여라.', '보여라.', '설명하여라.'와 같이 표현이 수반된다. 예를 들어, "한 쌍의 대변이 평행하고, 그 길이가 같은 사각형은 평행사변형임을 설명하여라."는 논증 개발하기 과제로 볼 수 있다.

논증 평가하기(evaluating an argument : EA)는 교과서에 주어진 논증이 유효한지 여부를 평가하는 것이다. 예를 들어, "'$x=2$일 때, $3x^2$의 값을 찾아라.'는 질문에 대해 학생 1이 '$3\times 2=6$이고, $6^2=36$입니다.'라는 추론을 하고 학생 2가 '$2^2=4$이고, $3\times 4=12$입니다.'라는 추론을 한 경우, 옳은 추론을 한 학생을 찾고 그 이유에 대해 설명하시오."는 논증평가 문제로 볼 수 있다.

실수 정정하기(correcting a mistake : CM)는 문제의 잘못된 풀이나 타당하지 않는 논증의 오류를 발견하여 수정하는 것이다. 예를 들어, 잘못된 증명 과정을 제시한 뒤, 이 과정에서 오류를 찾도록 요구하는 문제는 실수 정정하기 과제로 볼 수 있다.

Thompson 외(2012)의 분류는 증명과 추론의 수준보다는 각 유형 나름대로의 의미와 역할에 초점을 둔 것으로 볼 수 있다. 이와 같은 분류에 기반 한 수학 과제의 분석은 과제에서 학생에게 요구하는 증명과 추론의 유형을 살펴볼 수 있게 하며, 나아가 학습의 방식을 알 수 있게 한다. 본 연구에서는 Thopmson 외(2012)의 분류 방식을 토대로 우리나라와 미국 교과서의 과제를 분석함으로써, 평행사변형이 되기 위한 조건의 학습 시 학생들에게 요구하는 증명과 추론의 방식을 살펴보고자 한다. 증명과 추론의 각 유형별 구성 비율을 살펴봄으로써 학생들에게 제공되는 학습 기회의 다양성을 살펴보고자 한다.

2. 과제의 인지적 노력 수준

과제의 인지적 노력 수준(levels of cognitive demand)이란 주어진 과제를 성공적으로 해결하

기 위해 학생들에게 요구되는 사고의 수준이다(Stein & Smith, 1998; Stein, Smith, Henningsen, & Silver, 2000, p. 11). Stein 외(2000)는 과제의 인지적 노력 수준을 낮은 수준(low level)과 높은 수준(high level)으로 나누고, 낮은 수준 과제는 Memorization[M] 과제와 Procedures Without Connections[PNC] 과제로, 높은 수준 과제는 Procedures With Connections[PWC] 과제와 Doing Mathematics[DM] 과제로 다시 분류함으로써 총 네 가지 유형의 과제를 제시하였다.

M 과제는 인지적으로 가장 낮은 수준을 요구하는 과제로 공식, 정의, 규칙 등의 이전 지식을 그대로 떠올려 사용하는 과제를 말한다. 과제 해결 시 절차나 과정이 사용되지 않으며, 암기된 지식에 의존하여 짧은 시간에 즉각적인 과제 해결이 가능하다. 예를 들어, 빈칸 채우기, 공식 적기, 개념 연결하기 등의 문제는 M 과제이다.

PNC 과제는 풀이 과정에서 특정 절차를 사용할 필요성이 있거나 특정 절차를 활용한 이전 학습에 기초하지만 개념과 의미의 관련성은 없는 과제이다. 정답 산출에 중점을 두며, 추가적인 설명은 필요하지 않다. 예를 들어, 공식 대입을 통한 단순 계산과 예제 내용을 그대로 따라하는 등의 방법으로 해결 가능한 문제는 PNC 과제이다.

PWC 과제는 수학적 개념과 해결 방법 사이에 연계성이 필요한 과제이다. 과제 해결을 위해 결과보다는 절차의 활용에 중점을 두게 되므로, 학생들에게 과정에 기초한 개념적 사고를 요구하게 된다. 예를 들어, '10×10 모눈종이를 이용하여 분수 $\frac{3}{5}$을 소수와 퍼센트 표현으로 나타내어라.'는 PWC 과제이다(김미희, 김구연, 2013).

DM 과제는 인지적으로 가장 높은 수준을 요구하는 과제로, 문제 해결 전략이 분명히 제시되지 않고, 복잡한 사고와 비알고리즘적인 사고를 필요로 한다. 예를 들어, '4×10 직사각형에서 6개의 정사각형에 빗금을 그린다. 그 직사각형을 사용하여 다음 문제를 어떻게 해결할지 설명하여라. a) 빗금 친 면적을 퍼센트로 나타내어라. b) 빗금 친 면적을 소수로 나타내어라. c) 빗금 친 면적을 분수로 나타내어라.'는 DM 과제이다(김미희, 김구연, 2013).

Stein 외(2000)의 과제의 인지적 노력 수준은 과제 해결 시 요구되는 사고의 수준을 분석한다는 점에서 사고의 유형을 분석하는 Thompson 외(2012)와 차이점을 갖는다. Thompson 외(2012)가 과제 해결 시 요구되는 지식과 기술의 종류를 분석한다면, Stein 외(2000)는 과제 해결 과정의 복잡성과 깊이를 분석하고 있는 것이다. 이때, 과제 해결에 필요한 지식과 기술의 종류가 복잡하게 얽혀있다면 과제의 수준이 높다고 평가할 수 있다. 하지만 특정 유형의 지식이 반드시 특정 수준에 해당한다고는 볼 수 없다. 예컨대, 동일한 논증 개발하기 과제일지라도 해결 과정이 알고리즘적인지 아닌지 여부에 따라 PNC 과제와 PWC 과제로 나누어질 수 있기 때문이다.

이에, 본 연구에서는 Thompson 외(2012)에 근거한 분석과 더불어 Stein 외(2000)의 분류 방식에 근거한 과제 분석을 진행하고자 한다. 각 나라 교과서의 과제가 학생들에게 요구하는 사고의 깊이가 어떠한지, 다양한 수준의 학습 기회를 제공하고 있는지 여부를 살펴보고자 한다.

3. 과제분석연구

수학 교과서 과제분석연구는 교과서에 제시된 과제의 특성을 분석한 연구이다. 이들 연구는 연구대상에 따라 우리나라 교과서 과제만을 분석한 연구(권지현, 김구연, 2013; 김동중 외, 2015; 김미희, 김구연, 2013; 홍창준, 김구연, 2012; 황혜정, 김슬비, 2014)와 우리나라와 외국 교과서

과제를 비교 분석한 연구(이경화, 지은성, 2008; 임재훈 외, 2005; 한혜숙, 2010; Son, 2005; Son, 2012; Son & Senk, 2010)로 나누어진다.

우리나라 교과서의 과제만을 분석한 연구는 연구방법에 따라 다시 과제의 인지적 노력 수준을 분석한 연구와 과제의 유형을 분석한 연구로 나누어진다. 먼저, 과제의 인지적 노력 수준을 분석한 연구로는 권지현, 김구연(2013), 김동중 외(2015), 김미희, 김구연(2013), 홍창준, 김구연 (2012) 등의 연구가 있다. 이들은 수학 과제를 인지적 노력 수준에 따라 가장 낮은 수준의 Memorization[M] 과제부터 Procedures Without Connections[PNC] 과제, Procedures With Connections [PWC] 과제, 그리고 가장 높은 수준의 Doing Mathematics[DM] 과제까지 총 4수준으로 분류한 뒤, 각 수준에 해당하는 과제의 구성 비율과 특징을 분석하였다. 권지현, 김구연(2013), 김미희, 김구연(2013), 홍창준, 김구연(2012)의 경우 기하, 함수 등 일반 교과서의 특정 영역에 속한 수학 과제를 각각 분석하였다. 분석 결과 과제의 인지적 노력 수준별 구성 비율이 유사하게 나타났는데, M 과제, PNC 과제, PWC 과제, DM 과제의 구성 비율이 각각 5~7%, 88~89%, 2~3%, 1~2%라는 연구결과가 제시되었다. 이들 연구는 우리나라 교과서 수학 과제의 인지적 노력 수준의 분포가 균등하지 못하며, PNC 과제에 집중되어 있음을 보여준다. 일반 교과서를 분석한 이들 연구와는 달리, 김동중 외(2015)는 스토리텔링 교과서의 각 영역별 수학 과제를 인지적 노력 수준에 따라 분석하였다. 연구 결과, PNC 과제의 비율이 40~50% 정도로 일반 교과서보다 낮게 나타났으며, M 과제, PWC 과제, DM 과제의 비율은 일반 교과서보다 모두 높게 나타나는 등 스토리텔링 교과서의 경우 과제의 인지적 노력 수준별 구성 비율이 일반 교과서와 차이가 있음을 보여주었다.

우리나라 교과서 수학 과제의 유형을 분석한 연구로는 황혜정, 김슬비(2014)의 연구가 있다. 황혜정, 김슬비(2014)는 집합과 명제 및 수열 단원에 제시된 증명 및 추론 과제를 추측하기, 추측 조사하기, 논증 개발하기, 논증 평가하기의 네 가지 유형으로 분류한 뒤, 각 유형별 구성 비율과 해당 과제의 특징을 분석하였다. 분석 결과, 추측하기, 추측 조사하기, 논증 개발하기, 논증 평가하기 유형의 비율이 집합과 명제 단원의 경우 각각 0~3%, 30~40%, 50~60%, 3~5%로, 수열 단원의 경우 각각 60~65%, 0~3%, 30%, 2~3%로 나타났다. 이와 같은 연구 결과는 수학 영역에 따라 선호되는 증명 및 추론 유형에 차이가 있음을 알려준다.

우리나라와 외국 교과서의 수학 과제를 비교, 분석한 연구로는 이경화, 지은정(2008), 임재훈 외(2005), 한혜숙(2010), Son(2005), Son(2012), Son과 Senk(2010)의 연구가 있다. 이들 연구는 모두 우리나라와 미국 수학 교과서의 과제를 비교하였는데, Son(2005), Son(2012), Son과 Senk(2010)의 경우 과제 분석 기준을 인지적 기대 수준, 응답 유형, 문제 해결 단계 등 다각도로 선정한 뒤, 선정된 기준에 따라 두 나라 교과서의 수학 과제를 양적인 측면에서 비교, 분석하였다. 이경화, 지은정(2008), 임재훈 외(2005)와 한혜숙(2010)은 과제분석을 통해 각각 그래프의 교수학적 변환 방식과 분수 나눗셈 알고리즘의 도입 방법, 그리고 의사소통의 특징을 질적인 측면에서 비교, 분석하였다. 이들 연구는 우리나라와 미국 교과서의 과제에 나타나는 공통점과 차이점을 함께 제시해 주었으며, 차이점들을 토대로 몇 가지 제언을 함으로써 향후 우리나라 교과서 재구성 시의 시사점을 제시해주었다는 의의를 갖는다.

Ⅲ. 연구방법

본 연구에서는 우리나라 중학교 2학년 수학 교과서와 미국 Geometry 교과서에 제시된 수학 과제를 과제의 구조와 Thompson 외(2012)의 증명과 추론 유형 및 Stein 외(2000)의 인지적 노력 수준에 따라 분석하고자 한다. 이를 위한 자세한 연구대상과 연구방법은 다음과 같다.

1. 연구대상

우리나라 중학교 2학년 수학 교과서에서 다루고 있는 평행사변형이 되기 위한 조건 관련 수학 과제를 분석하기 위하여 중학교 검정교과서 6종을 선정하였다. 선정된 6종의 교과서는 강옥기 외(2015), 고호경 외(2015), 김서령 외(2015), 류희찬 외(2015), 우정호 외(2015), 이준열 외(2015)로, 인터넷 상에서 쉽게 다운받아 문서화하여 사용할 수 있는 교과서를 임의로 선정하였다. 미국의 경우에는 해당 내용을 Geometry 교과서에서 다루고 있으므로, Geometry 교과서 2종을 임의로 선정하였다. 선정된 교과서는 Holt Mcdougal 출판사의 Burger 외(2013)와 Pearson 출판사의 Charles 외(2015)이다. 본 연구에서는 교과서의 장단점 분석이 아닌 수학 과제의 특징 확인에 분석의 초점을 맞출 것이다. 이에, 분석의 대상이 되는 우리나라 교과서를 편의상 각각 A, B, C, D, E, F교과서로 지칭하며, 미국 교과서를 각각 X, Y교과서로 지칭한다. 지칭 순서는 임의로 선정하였다.

연구대상으로서의 수학 과제를 명확하게 선정하기 위하여 각각의 교과서를 구성하고 있는 내용체계를 확인하였다(<표 III-1> 참고).

내용체계를 바탕으로 수학 과제와 수학 과제가 아닌 것을 구분하고 수학 과제를 선정하기 위하여 다음과 같은 기준을 설정하였다. 기준 설정을 위해 수학 과제 분석 연구를 수행한 권지현, 김구연(2013)과 김미희, 김구연(2013)의 연구를 참고하였다.

첫째, 교과서 본문의 개념을 설명하기 위해 도입 부분에서 제시되는 '활동하기', '생각 열기' 등의 문제는 수학 과제로 선정하지 않는다.

<표 III-3> 교과서의 내용 구성 체계

교과서	도입	전개	마무리
A	생각 펼치기	생각, 예제, 문제, 개념 정리	생각을 다지는 의사소통, 머릿속 수학 집짓기
B	활동 하기	문제, 개념 정리, 함께 풀기	가까운 수학
C	생각 열기	예제, 문제, 개념 정리	생각나누기 의사소통
D	탐구 하기	문제, 개념 정리	추론하기
E	생각해 봅시다	예제, 문제, 개념정리	모둠활동
F	탐구	활동, 문제, 설명하기, 예제, 개념 정리	생각담기
X	Who uses this?	Theorems, example, check it out	think and discuss
Y	Getting ready!	theorem, problem, got it?	take note

둘째, 교과서 본문에 개념 설명을 위해 풀이가 바로 제시되는 예제와 정답이 제시된 문제는 모두 수학 과제로 선정하지 않는다. 연구 대상이 되는 수학 과제는 교과서에 풀이가 제시되지 않은 문항, 즉 학생에게 설명이나 답을 요구하는 문항에 한정하도록 한다.

셋째, 하나의 문제가 여러 개의 소문제로 구성되는 경우, 문제 성격에 따라 한 가지 혹은 그 이상의 과제로 선정한다. 전체 문항 속에 소문제들이 같은 풀이법으로 해결되면 하나의 과제로, 다른 풀이가 요구되면 두 가지 이상의 과제로 간주하는 것이다.

넷째, 평행사변형이 되기 위한 조건의 본문에

제시된 문제가 아닌, 연습문제 등 여러 주제들이 포함된 문제는 수학 과제로 선정하지 않는다. 여러 주제가 함께 제시되는 연습문제 혹은 종합문제의 경우 하나의 문제에 여러 가지 내용 영역이 포함되기 때문에 앞의 기준들을 적용하였을 때 정확한 과제의 개수를 산출하기 어렵다는 문제점이 발생한다. 이에 본 연구에서는 종합문제 등을 제외하고 평행사변형이 되기 위한 조건의 본문에 제시된 문제만을 수학과제로 선정한다. 다만, 우리나라의 A교과서와 미국 교과서의 경우에는 평행사변형이 되기 위한 조건을 하나의 독립된 소단원으로 구성한 뒤 이와 관련한 연습문제만을 본문과 바로 연결하여 제시하였는데, 이 경우에는 해당 연습문제에 포함된 문제들을 앞의 기준에 맞추어 수학 과제로 선정한다.

위의 기준을 토대로 우리나라의 6종 교과서와 미국의 2종 교과서에 제시된 수학 과제를 선정한 결과, 연구대상으로 선정된 수학 과제의 개수는 <표 III-2>와 같다[2].

<표 III-2> 교과서의 수학 과제 개수

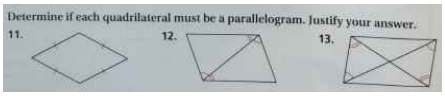
교과서	우리나라						미국	
	A	B	C	D	E	F	X	Y
과제 개수	21	10	12	10	6	13	50	37
소계	72						87	
총계	159							

2. 연구방법

가. 문제의 구조에 따른 과제 분류 기준

연구대상으로 선정된 <표 III-2>의 159개 수학 과제를 과제의 구조에 따라 분류한다. 수학 과제에서 요구하는 과제해결방법에 따라 개념 확인 과제, 평행사변형인지 여부 결정 과제, 평행사변형임을 증명하는 과제, 수치 계산 과제, 반례 찾기 과제, 조건 찾기 과제, 평행사변형 성질과의 연결 과제, 작도 과제, 그리고 기타 과제(틀린 부분 찾기, 확률 등)로 분류하는 것이다. 연구대상으로 선정된 각 교과서 과제에는 공통된 유형들이 있지만, 평행사변형인지 여부 결정 과제와 평행사변형임을 증명하는 과제, 그리고 수치 계산 과제의 경우 각 교과서별로 다양한 형태와 표현 방법으로 구성되어 있다. 이에, 각 유형에 해당하는 과제를 선정하기 위한 명확한 과제 분류 기준이 필요하다고 판단되어 다음과 같은 기준을 적용하였다.

첫째, 주어진 조건의 사각형이 평행사변형인지 여부를 결정하고 그 이유를 제시하는 과제([그림 III-1] 참고)와 평행사변형인 것을 찾는 과제([그림 III-2] 참고)는 평행사변형인지 여부 결정 과제로 분류한다. 그리고 이들 과제는 주어진 조건이 교과서 본문에 제시되었는지 여부에 따라 교과서 본문에 제시된 조건이 주어진 과제와 제시되지 않은 조건이 주어진 과제로 다시 분류된다.



[그림 III-1] X교과서(p. 414)

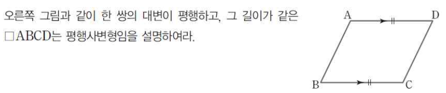
다음 □ABCD에서 평행사변형인 것을 모두 찾아라. (단, 점 O는 두 대각선 AC와 BD의 교점이다.)
(1) $\overline{AB} /\!/ \overline{DC}$, $\overline{AB}=\overline{DC}=8cm$
(2) $\overline{AB}=\overline{BC}=6cm$, $\overline{CD}=\overline{DA}=8cm$
(3) $\overline{OA}=4cm$, $\overline{OB}=6cm$, $\overline{OC}=4cm$, $\overline{OD}=6cm$
(4) $\overline{AB} /\!/ \overline{DC}$, $\overline{AD}=\overline{BC}=7cm$

[그림 III-2] A교과서(p. 253)

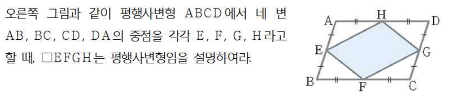
2) 미국의 경우 하나의 주제를 독립된 소단원으로 구성하고 이에 대한 연습문제만을 본문과 바로 연결하여 제시함으로써, 우리나라에 비해 각 주제 관련 과제를 많이 제공하고 있다. 과제 개수의 차이는 과제 유형별 비율 계산에 영향을 미치게 되어, 과제 개수가 적음에도 더 높은 비율을 제시할 수 있다. 본 연구에서는 이를 보완하기 위해 연구결과에서 유형별 과제의 비율과 개수를 모두 제시하였다.

예를 들어, [그림 III-2] (1)번 과제의 ‘한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같다.’는 교과서 본문에 제시된 조건이며, [그림 III-1] 12번 과제의 ‘대각선으로 생긴 두 쌍의 엇각의 크기가 각각 같다.’는 교과서 본문에 제시되지 않은 조건이다.

둘째, 주어진 조건을 만족하는 사각형이 평행사변형인 이유를 ‘설명하시오.’ 혹은 ‘보이시오.’라고 명시한 과제의 경우 평행사변형임을 증명하는 과제로 분류한다. 그리고 이들 과제 역시 주어진 조건이 교과서 본문에 제시되었는지 여부에 따라 교과서 본문에 제시된 조건이 주어진 경우와 제시되지 않은 조건이 주어진 과제로 나누어진다. 예를 들어, [그림 III-3] 과제의 ‘한 쌍의 대변이 평행하고 그 길이가 같다.’는 교과서 본문에 제시된 조건이며, [그림 III-4] 과제의 ‘평행사변형의 네 변의 중점을 연결한다.’는 교과서 본문에 제시되지 않은 조건이다.

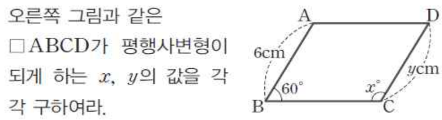


[그림 III-3] A교과서(p. 253)



[그림 III-4] C교과서(p. 254)

셋째, 평행사변형이 되기 위한 조건을 만족시키기 위한 변의 길이 혹은 각의 크기를 직접 구하는 과제는 수치 계산 과제이다. 수치 계산 과제는 문장형 답을 요구하는 다른 유형의 과제들과 달리 구체적인 값을 답으로 요구한다. 예를 들어, [그림 III-5] 과제의 경우, 학생들은 평행사변형이 되기 위한 조건 중 ‘한 쌍의 대변의 길이가 같고 평행하다.’라는 조건을 만족시키기 위하여 $x=120$, $y=6$이라는 구체적인 값을 답으로 제시해야 한다. 이 과제는 평행사변형이라는 사실이 주어졌다는 점에서 평행사변형인지 여부 결정 과제와 차이를 가지며, 증명을 요구하지 않는다는 점에서 평행사변형임을 증명하는 과제와도 차이를 갖는다.



[그림 III-5] A교과서(p. 255)

마지막으로, 반례를 요구하는 과제는 반례 찾기 과제로, 평행사변형이 되기 위한 추가적인 조건을 요구하는 과제는 조건 찾기 과제로, 평행사변형 성질과 결합된 쌍조건문의 작성을 요구하는 과제는 평행사변형 성질과의 연결 과제로, 자와 컴퍼스를 이용한 도형의 작도를 요구하는 고제는 작도 과제로 분류한다. 그 외의 과제는 기타 과제로 분류한다.

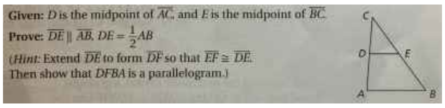
나. 증명과 추론 유형에 따른 과제 분류 기준

<표 III-2>의 159개 수학 과제 중 120개(75%) 과제가 증명과 추론으로, 평행사변형이 되기 위한 조건에서 증명과 추론은 큰 비중을 차지한다. 이들 과제를 Thompson 외(2012)가 제시한 반례 찾기(FC), 추측하기(MC), 추측 조사하기(IC), 논증 개발하기(DA), 논증 평가하기(EA), 실수 정정하기(CM)의 여섯 가지 유형으로 분류한다. 앞서, 연구대상으로 선정된 과제는 그 구조에 따라 아홉 가지 유형으로 분류되었다. 이때 동일한 구조의 수학 과제를 동일한 증명과 추론 유형으로 분류하기 위한 명확한 과제 분류 기준이 필요하다고 판단되어 다음과 같은 기준을 설정하였다. 이 기준은 수학 교과서에 제시된 증명과 추론의 유형을 분석한 황혜정, 김슬비(2104)의 연구를

토대로 설정되었다.

첫째, 평행사변형인지 여부 결정 과제는 IC 과제로 분류한다. 이들 과제의 경우 주어진 조건을 만족하는 사각형이 평행사변형인지 여부에 대한 추측을 해야 하며, 결론이 참인지 거짓인지 확인하는데 필요한 이론적인 근거를 추론해야 하기 때문이다.

둘째, 평행사변형임을 증명하는 과제는 DA 과제로 분류한다. 이들 과제는 표현 방법은 다르지만, 궁극적인 목적은 모두 주어진 사각형이 평행사변형임을 논리적으로 증명하는 것이기 때문이다. 또한, [그림 III-6]과 같이 평행사변형이 되기 위한 조건을 응용하여 새로운 문장을 증명해야 하는 과제도 DA 과제로 분류한다.


Given: D is the midpoint of $\overline{AC}$, and E is the midpoint of $\overline{BC}$.
Prove: $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$, $DE = \frac{1}{2}AB$
(*Hint:* Extend $\overline{DE}$ to form $\overline{DF}$ so that $\overline{EF} \cong \overline{DE}$.
Then show that $DFBA$ is a parallelogram.)

[그림 III-6] X교과서(p. 417)

셋째, 반례 찾기 과제와 주어진 문장에서 틀린 부분을 찾아 수정하는 과제는 각각 FC 과제와 CM 과제로 분류한다.

다. 인지적 노력 수준에 따른 과제 분류 기준

<표 III-2>의 159개 수학 과제를 Stein 외(2000)가 제안한 수학 과제 분석틀에 따라 M 과제, PNC 과제, PWC 과제, DM 과제의 네 가지 수준으로 분류한다. 앞서 연구대상으로 선정된 과제를 아홉 가지 구조 및 여섯 가지 증명과 추론의 유형으로 분류하였다. 이에, 동일한 유형의 과제를 동일한 수준의 과제로 분류하기 위한 명확한 기준이 필요하다고 판단되어 다음과 같은 기준을 설정하였다. 기준 설정을 위하여 기하 영역 수학 과제의 인지적 노력 수준을 분석한 권지현, 김구연(2013)의 연구를 참고하였다.

첫째, 평행사변형인지 여부 결정 과제는 과제에 주어진 조건이 본문에 제시되었는지 여부에 따라 PNC 과제 혹은 PWC 과제로 분류한다. 주어진 조건이 교과서 본문에 제시된 경우 PNC 과제로 분류한다. 해당 과제의 경우 주로 본문의 개념 정리가 끝난 후 바로 제시되는데, 학습한 개념을 공식처럼 적용하여 즉각적으로 답을 구하게 되므로 PNC 과제로 분류한다. 반면, 본문에 제시되지 않은 조건이 주어진 경우 PWC 과제로 분류한다. 이 경우에는 본문에 제시된 개념적 아이디어를 활용하기는 하나, PNC 과제와 달리 학습한 개념을 즉각적으로 적용하여 답을 구할 수 없기 때문이다.

둘째, 평행사변형임을 증명하는 과제는 증명의 절차가 제시되었는지 여부에 따라 PNC 과제 혹은 PWC 과제로 분류한다. 과제 해결 과정이 소문제로 나누어 제시되거나 빈칸 넣기를 통해 제시된 경우에는 학습 개념을 절차적 과정을 통해 간단히 유추할 수 있다고 판단하여 PNC 과제로 분류한다. 반면, 해결 과정이 주어지지 않은 경우에는 학생 스스로 학습한 개념의 성질과 의미를 고려하여 과제를 증명해야 하고, 주어진 조건의 활용 방법에 따라 해결 과정이 달라지기 때문에 PWC 과제로 분류한다.

셋째, 수치 계산 과제는 PNC 과제로 분류한다. 수치 계산 과제의 해결은 정답 산출에 중점을 두며, 추가적인 설명을 필요로 하지 않기 때문이다.

넷째, 조건 찾기와 반례 찾기 과제는 DM 과제로 분류한다. 이들 과제의 경우, 알고리즘적 절차가 있는 것이 아니므로 과제 해결 과정에서 창의력을 향상시키고 수학적 사고에 도움을 주는 등 학생들의 수학적 이해를 발전시킬 수 있다. 특히, 반례 찾기 과제는 학생들 스스로 가졌던 생각에 대한 오류를 인지할 수 있는 과정을

제공하는데, 이를 통해 자신의 인지적 과정을 스스로 점검하고 조절할 수 있다는 점에서 DM 과제의 의미(김미희, 김구연, 2013)를 갖는다. 또한 과제 해결 절차가 어느 정도 제시되는 다른 증명 과제들과 달리 반례 찾기의 경우 과제 해결의 과정을 전혀 제시하지 않고 있다. 이와 같은 이유로 인하여 반례 찾기 과제는 증명 및 추론 방법의 일부임(Johnson et al., 2010)에도 불구하고 PNC와 PWC 과제로 분류되는 다른 증명 과제들과 달리 DM 과제로 분류된다.

다섯째, 개념 확인 과제는 M 과제로 분류한다. 개념 확인 과제는 평행사변형이 되기 위한 다섯 가지 조건(미국 교과서의 경우 여섯 가지 조건)의 제시를 요구한다. 이때, 정리를 단순히 암기하여 빈칸 채우기로 확인해보는 과제라는 점에서 M 과제라고 할 수 있다.

여섯째, 위에서 제시한 유형 이외의 과제들의 경우, Stein 외(2000)가 제시한 수학 과제 분석틀에 맞추어 분류하도록 한다.

위의 기준들을 바탕으로, 선정된 수학 과제 옆에 분류된 과제 유형과 수준 및 그 이유, 과제의 특징 등을 기입하여 정리하였다. 또한 연구 과정과 결과에 대한 신뢰도와 타당도를 높이기 위해 연구가 진행되는 동안 저자들 간의 계속적인 협의 과정을 거쳤다.

Ⅳ. 연구결과

본 연구의 목적은 우리나라와 미국 수학 교과서에서 다루고 있는 평행사변형이 되기 위한 조건 관련 과제들이 갖는 특징을 분석한 뒤, 두 나라 교과서의 수학 과제에 공통적으로 나타나는 특징과 차별화되는 특징을 살펴보는 것이다. 그리고 차이점을 토대로 우리나라 교과서 재구성에 대한 시사점을 도출하고자 하는 것이다. 아래에서는 연구대상으로 선정된 우리나라와 미국 교과서의 159개 수학 과제를 구조에 따라 나누고, 각 구조의 과제를 Thompson 외(2012)의 여섯 가지 증명과 추론 유형 및 Stein 외(2000)의 과제의 인지적 노력 수준에 따라 다시 분류함으로써 제시되는 과제에서 요구하는 지식과 기술의 종류 및 제시되는 과제의 복잡성과 깊이를 좀 더 세부적으로 살펴보고자 한다.

1. 수학 과제의 구조와 그 특징

가. 수학 과제의 구조

이 부분에서는 두 나라 교과서 수학 과제의 구조별 구성 비율과 그 특징을 살펴보고자 한다. 특히, 과제 구조의 구성 비율과 관련한 공통점과 차이점을 살펴보고자 한다.

우리나라 교과서의 72개 수학 과제와 미국 교과서의 87개 수학 과제의 구조를 분석한 결과, 유형이 크게 아홉 가지로 나타났다(<표 IV-1> 참고). 기타 유형을 제외한 여덟 가지 유형 중, 우리나라 교과서에 제시된 유형은 개념 확인, 평행사변형인지 여부 결정, 평행사변형임을 증명, 수치 계산, 조건 찾기의 다섯 가지이다. 미국 교과서에 제시된 유형은 개념 확인, 평행사변형인지 여부 결정, 평행사변형임을 증명, 수치 계산, 반례 찾기, 평행사변형 성질과의 연결, 작도의 일곱 가지이다. 우리나라 교과서에 비해 미국 교과서에 제시된 과제의 구조가 더 다양함을 알 수 있다.

<표 IV-1>을 좀 더 자세히 분석하면 다음과 같다. 먼저, 우리나라 교과서의 수학 과제 중 평행사변형인지 여부 결정 과제와 평행사변형임을 증명하는 과제 비율의 총합은 76%로, 과제의 대부분을 차지하고 있다. 또한 미국 교과서의 수학 과제 중 평행사변형인지 여부 결정 과제와 평행

<표 IV-1> 교과서별 수학 과제의 구조 단위 : %(개)

교과서		우리나라							미국		
		A[3]	B	C	D	E	F	합계	X	Y	합계
개념 확인		5(1)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	1(1)	4(2)	0(0)	2(2)
평행사변형 여부 결정	본문 제시 조건	27 (6)	20 (2)	25 (3)	0 (0)	0 (0)	15 (2)	18 (13)	10 (5)	5 (2)	8 (7)
	본문 미제시 조건	14 (3)	20 (2)	17 (2)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	10 (7)	24 (12)	5 (2)	16 (14)
평행사변형임을 증명	본문 제시 조건	27 (6)	20 (2)	17 (2)	40 (4)	83 (5)	38 (5)	33 (24)	32 (16)	16 (6)	25 (22)
	본문 미제시 조건	9 (2)	20 (2)	8 (1)	20 (2)	17 (1)	23 (3)	15 (11)	8 (4)	16 (6)	11 (10)
수치 계산		14 (3)	0 (0)	0 (0)	20 (2)	0 (0)	0 (0)	7 (5)	8 (4)	35 (13)	20 (17)
조건 찾기		5 (1)	10 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	3 (2)	0 (0)	0 (0)	0 (0)
반례 찾기		0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	2(1)	3(1)	2(2)
평행사변형성질과 연결		0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	4(2)	8(3)	6(5)
작도		0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	2(1)	3(1)	2(2)
기타		0 (0)	10 (1)	33 (4)	20 (2)	0 (0)	23 (3)	14 (10)	6 (3)	8 (3)	7 (6)

사변형임을 증명하는 과제, 수치 계산 과제 비율의 총합은 80%로, 미국 교과서 과제의 대부분을 차지하고 있다. 이들 세 가지 유형과 관련하여 좀 더 자세히 분석하면 다음과 같다.

평행사변형임을 증명하는 과제의 경우, 우리나라와 미국 교과서에서 각각 48%, 36%의 비율을 차지한다. 우리나라 교과서의 경우 전체 과제의 절반 가까운 비율이 평행사변형임을 증명하는 과제에 해당한다. 미국 교과서 역시 평행사변형임을 증명하는 과제의 비율이 가장 높음을 알 수 있다.

평행사변형인지 여부 결정 과제의 구성 비율은 우리나라와 미국 교과서에서 각각 28%, 24%를 차지한다. 해당 유형 과제가 차지하는 전체적인 비율의 차이가 크지 않음을 알 수 있다.

수치 계산 과제는 우리나라 교과서에서 7%의 비율로 구성된다. A와 D교과서에서만 제시되고 있는 유형으로, 다른 교과서에서는 찾아보기 힘들다. 반면, 미국 교과서에서의 구성 비율은 20%이고 모든 교과서에서 제시되는 등, 우리나라에 비해 높은 비율로 제시되고 있음을 알 수 있다. 또한 미국 교과서의 경우 평행사변형임을 증명하는 과제 36%, 평행사변형인지 여부 결정 과제 24%에 이어 수치 계산 과제가 20%를 차지하는 등, 앞의 두 과제와 비교하였을 때 그 비중이 적지 않음을 알 수 있다.

개념 확인 과제의 경우 그 구성 비율이 높진 않지만 두 나라 교과서에 모두 제시된 과제 유형이다. 다만, 그 구성 비율이 교과서에 제시된 다른 유형에 비해 가장 낮으며, 우리나라 교과서의 경우 A교과서에만, 미국 교과서의 경우 X교과서에만 제시되고 있다.

우리나라 혹은 미국 교과서에만 제시된 수학 과제에 대해 살펴보면 다음과 같다. 먼저, 우리나라 교과서에만 제시된 수학 과제로는 조건 찾기 과제가 있다. 조건 찾기 과제가 차지하는 비

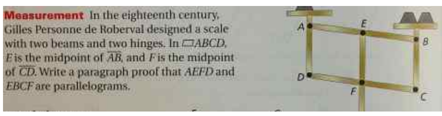
3) 한 문항에서 수치 구하기 문제와 평행사변형임을 증명하는 문제가 동시에 제시되었다.

율은 3%의 작은 수준이지만, 미국 교과서에 제시되지 않는 유형의 과제라는 점에서 우리나라 교과서가 갖는 차별화되는 특징이라고 할 수 있다. 반면에, 미국 교과서에만 제시된 수학 과제는 반례 찾기 과제, 평행사변형의 성질과 연결하기 과제, 작도 과제이다. 이들은 각각 2%, 6%, 2%의 비율로 제시되고 있다. 이들은 다른 유형의 과제에 비해 그 비율이 낮지만, 우리나라 교과서에 제시되지 않는 유형의 과제라는 점에서 미국 교과서가 갖는 차별화되는 특징이다.

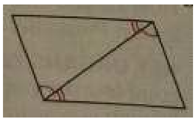
나. 수학 과제의 구조와 관련한 특징

이 부분에서는 수학 과제의 구조와 관련하여 두 나라 교과서 과제에서 나타나는 공통적인 특징과 차별화 되는 특징을 구체적인 예와 함께 세부적으로 비교, 분석하고자 한다. 특히, 차별화되는 특징에 중점을 두고 분석하고자 한다.

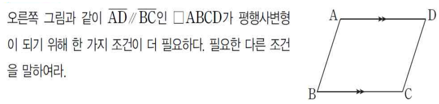
먼저, 두 나라 교과서에 공통으로 제시되는 평행사변형임을 증명하는 과제와 평행사변형인지 여부 결정 과제에 본문에 제시되지 않은 조건이 주어지는 경우, 평행사변형을 작도할 수 있는 여러 가지 방법에 대한 학습기회를 제공하게 된다. 예를 들어, 평행사변형임을 증명하는 [그림 IV-1]의 과제는 평행사변형의 한 쌍의 대변의 중점을 연결하여 새로운 평행사변형을 만들 수 있다는 사실을 알게 한다. 또한 평행사변형인지 여부를 결정하는 [그림 IV-2]의 과제는 대각선으로 만들어지는 두 쌍의 엇각의 크기가 같은 경우 평행사변형이 된다는 사실을 알게 한다.



[그림 IV-1] X교과서(p. 416)


[그림 IV-2] X교과서(p. 414)

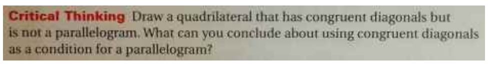
조건 찾기 과제는 우리나라 교과서에만 제시되는 차별화된 과제로, 교과서 본문에 제시된 평행사변형이 되기 위한 조건 외에 추가적인 조건을 학생 스스로 탐구할 수 있는 기회를 제공한다. 실제로, B교과서는 [그림 IV-3]의 과제 '$\overline{AD}//\overline{BC}$인 $\square ABCD$가 평행사변형이 되기 위해 필요한 조건을 말하라.'에 대한 답으로 $\overline{AB}//\overline{CD}$, $\overline{AD}=\overline{BC}$, $\angle A=\angle C$, $\angle BAC=\angle DCA$의 네 가지를 제시하였다. 이때 $\overline{AB}//\overline{CD}$와 $\overline{AD}=\overline{BC}$는 각각 '두 쌍의 대변이 각각 평행하다.'와 '한 쌍의 대변의 길이가 같고 평행하다.'라는 본문에 제시된 조건을 만족시키는 답이지만, $\angle A=\angle C$와 $\angle BAC=\angle DCA$는 각각 '한 쌍의 대변이 평행하고 한 쌍의 대각의 크기가 같다.'와 '한 쌍의 대변이 평행하고 대각선에 의해 만들어진 엇각의 크기가 같다.'라는 본문에 제시되지 않은 조건을 만족시키는 답이다. 해당 과제를 통해 학생들에게 새로운 조건 발견의 기회를 제공하고 있는 것이다.



[그림 IV-3] B교과서(p. 263)

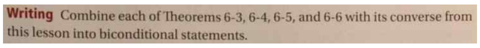
반례 찾기 과제는 미국 교과서에만 제시되는 차별화된 과제로, 교과서에 제시된 평행사변형이 되기 위한 조건의 제거 시 평행사변형이 작도되지 않음을 보이는 반례를 찾는 과제이다. 예를 들어, [그림 IV-4]의 과제는 교과서에 제시된 '두

대각선의 길이가 같고 서로 다른 것을 이등분하는 사각형은 평행사변형이다.'라는 조건에서 '서로 다른 것을 이등분한다.'를 제거한 경우 하나의 평행사변형이 작도되지 않을 수 있음을 보이는 반례를 찾게 한다. 교과서 본문에 제시된 조건을 만족하지 않는 경우 반례가 생성됨을 보이는 것이다. 이와 같은 반례 찾기 과제는 기존에 주어진 조건의 필요성을 확인하게 하고, 교과서에 제시된 조건의 의미를 확인하게 한다(정혜윤, 2012). 조건 찾기 과제가 새로운 조건을 찾는 데 중점을 둔다면, 반례 찾기 과제는 본문에 제시된 조건들을 정확하게 이해하는 데 중점을 둔 것이다. [그림 IV-4]의 과제를 통해 학생들은 사각형의 두 대각선의 길이가 같다는 조건만으로는 평행사변형을 작도할 수 없으며, 대각선을 이용해 평행사변형을 작도하기 위해서는 '두 대각선이 서로 다른 것을 이등분한다.'라는 조건이 필요함을 인식하게 된다. 곧, 미국 교과서는 반례 찾기 과제를 제시함으로써 학생들에게 각 조건들의 역할과 필요성을 확인시켜 주고 있음을 알 수 있다.


Critical Thinking Draw a quadrilateral that has congruent diagonals but is not a parallelogram. What can you conclude about using congruent diagonals as a condition for a parallelogram?

[그림 IV-4] X교과서(p. 415)

평행사변형이 되기 위한 조건을 평행사변형의 성질과 연결 짓는 과제 역시 미국 교과서에만 제시되는 차별화된 과제이다([그림 IV-5] 참고). 이들 과제는 평행사변형의 성질과 평행사변형이 되기 위한 조건을 결합하여 쌍조건문(biconditional statement)을 제시하도록 한다. 이를 통해 교과서 본문에 제시되는 평행사변형이 되기 위한 조건의 역이 평행사변형의 성질임을 발견하고 서로 역의 관계에 있음을 확인하게 한다.


Writing Combine each of Theorems 6-3, 6-4, 6-5, and 6-6 with its converse from this lesson into biconditional statements.

[그림 IV-5] Y교과서(p. 373)

2. 증명과 추론의 유형과 그 특징

이 부분에서는 우리나라와 미국 교과서의 증명 및 추론 과제를 여섯 가지 유형으로 분류한 뒤, 구성 비율과 그 특징을 살펴보고자 한다.

우리나라와 미국 교과서에 제시된 과제의 증명과 추론 형식을 분석한 결과, 우리나라 교과서의 경우 DA 과제 68%, IC 과제 31%, CM 과제 2%의 비율로 구성되었으며, 미국 교과서의 경우 DA 과제 58%, IC 과제 36%, FC 과제 4%, CM 과제 2%의 비율로 구성되었음을 확인할 수 있었다(<표 IV-2> 참고). IC 과제와 DA 과제를 합한 비율이 우리나라와 미국 교과서에서 각각 99%, 91%를 차지하는 등 두 나라 모두 IC와 DA 과제가 대부분을 차지함을 알 수 있다. 반면, MC 과제와 EA 과제는 두 나라 교과서에서 모두 다루어지지 않고 있다.

<표 IV-2>를 좀 더 자세히 분석하면 다음과

<표 IV-2> 교과서별 수학 과제의 증명 및 추론 형식 단위 : %(개)

	우리나라 교과서							미국 교과서		
	A	B	C	D	E	F	소계	X	Y	소계
FC	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	3(1)	6(1)	4(2)
MC	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)
IC	53(9)	44(4)	42(5)	0(0)	0(0)	15(2)	31(20)	45(17)	22(4)	36(20)
DA	47(8)	56(5)	50(6)	100(8)	100(6)	85(11)	68(44)	53(20)	67(12)	58(32)
EA	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)	0(0)
CM	0(0)	0(0)	8(1)	0(0)	0(0)	0(0)	2(1)	0(0)	6(1)	2(1)

같은 특징들을 알 수 있다. 먼저, 우리나라와 미국의 교과서 모두 전체 과제 중 DA 과제가 각각 68%, 58%로 가장 높은 비율을 차지하고 있다. 특히, 우리나라 교과서에서 구성 비율이 더 높게 나타나고 있으며, D와 E교과서에는 DA 과제만 제시되어 있음을 알 수 있다.

IC 과제의 경우 그 비율이 우리나라 교과서 31%, 미국 교과서 36%로, 두 나라에서 DA 과제 다음으로 높은 비율을 차지하는 과제 유형이다. 다만, DA 과제와 달리 미국 교과서에서 구성 비율이 더 높게 나타나고 우리나라의 D와 E교과서에는 제시되지 않고 있음을 알 수 있다.

CM 과제는 두 나라의 교과서에서 모두 2%의 동일한 비율을 차지한다. 하지만, 우리나라의 경우 C교과서에서 유일하게 제시되고, 미국의 경우 Y교과서에만 제시되는 등 모든 교과서에서 다루는 유형은 아님을 알 수 있다.

FC 과제는 미국 교과서에서 4%의 비율을 차지하며, 우리나라 교과서에는 제시되지 않았다. 우리나라 교과서에서는 CM 과제보다 낮은 비율을 차지하며, 미국 교과서에서는 CM 과제보다 높은 비율을 차지한다. 나아가, CM 과제가 미국 교과서 중 Y교과서에만 제시된 것과 달리 FC 과제는 X와 Y교과서에서 모두 제시되고 있다.

3. 수학 과제의 인지적 노력 수준과 그 특징

가. 인지적 노력 수준

우리나라와 미국 교과서 수학 과제의 인지적 노력 수준을 분석한 결과, 낮은 수준과 높은 수준의 과제가 각각 67%와 33%, 63%와 37%의 비율로 나타났다(<표 IV-3> 참고).

<표 IV-3>을 좀 더 자세히 분석하면 다음과 같은 특징들을 알 수 있다. 먼저, 우리나라 교과서의 경우 전체 과제 중 PNC 과제가 65%로 가장 높은 비율을 차지하며, PWC 과제 31%, DM 과제 3%, M 과제 1%의 순으로 제시되고 있다. 미국 교과서의 경우에는 전체 과제 중 PNC 과제가 57%로 가장 높은 비율을 차지하며, PWC 과제 33%, M 과제 6%, DM 과제 3%의 순으로 제시되고 있다.

PNC 과제와 PWC 과제의 높은 구성 비율은 평행사변형이 되기 위한 조건과 관련하여 두 나라 모두 일정한 절차를 이용하여 답을 구하는 유형의 과제를 가장 많이 제시하고 있음을 알려준다. PNC 과제와 PWC 과제 모두 절차가 요구되는 과제 유형으로, 일정한 절차를 거쳐 과제를 해결하도록 유도하고 있기 때문이다. 다만, 학생들로 하여금 수학적 개념과 아이디어의 이해를 더 높은 수준으로 발전시킬 수 있는 절차를 사용하게 하는 PWC 과제와 달리, PNC 과제의 경우에는 그 절차가 학생 스스로의 수학적인 이해를 바탕으로 한 풀이가 아닌 주어진 절차를 이

<표 IV-3> 교과서별 수학 과제의 인지적 노력 수준 단위 : % (개)

		우리나라 교과서								미국 교과서			
		A	B	C	D	E	F	합계		X	Y	합계	
낮은 수준	M	5 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	1 (1)	67 (48)	8 (4)	3 (1)	6 (5)	63 (55)
	PNC	57 (12)	50 (5)	75 (9)	80 (8)	50 (3)	77 (10)	65 (47)		56 (28)	59 (22)	57 (50)	
높은 수준	PWC	33 (7)	40 (4)	25 (3)	20 (2)	50 (3)	23 (3)	31 (22)	33 (24)	32 (16)	35 (13)	33 (29)	37 (32)
	DM	5 (1)	10 (1)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	0 (0)	3 (2)		4 (2)	3 (1)	3 (3)	

용할 경우 쉽게 해결이 가능한 유형이라는 특징을 갖는다(김미희, 김구연, 2013). 이는 우리나라와 미국 모두 주어진 절차를 이용하여 즉각적으로 해결 가능한 과제와 알고리즘적 절차를 사용하여 정확한 답을 구하는 과제를 가장 높은 비율로 제시하고 있음을 의미한다.

우리나라와 미국 교과서에 제시된 PNC 과제와 PWC 과제의 구성 비율을 비교해보면, PNC 과제의 경우 우리나라 교과서 65%, 미국 교과서 57%이고, PWC 과제의 경우 우리나라 교과서 31%, 미국 교과서 33%이다. 미국 교과서에 비해 우리나라 교과서에서 PNC 과제의 비율이 더 높으며, PWC 과제는 이와 반대됨을 알 수 있다. 이와 같은 결과는 절차가 요구되는 과제와 관련하여 우리나라가 미국에 비해 구체적인 알고리즘적 절차를 이용하여 정확한 답을 구할 수 있는 수학 과제나 절차를 좀 더 명시적으로 제시하는 수학 과제를 더 높은 비율로 제시하고 있음을 알려준다.

M 과제의 경우 우리나라와 미국 교과서에서 모두 낮은 비율을 차지하지만, 우리나라 교과서에 비해 미국 교과서에서 더 높은 비율로 제시되고 있다. 우리나라의 경우 A교과서를 제외한 나머지 모든 교과서에서 M 과제를 다루지 않고 있기 때문이다. 우리나라 교과서에서 낮은 수준의 과제 비율이 높음에도 M 과제가 거의 다루어지지 않고 있다는 분석 결과는, 우리나라가 단순 암기보다는 최소한의 절차를 이용한 과제를 주로 제공하고 있음을 알려준다.

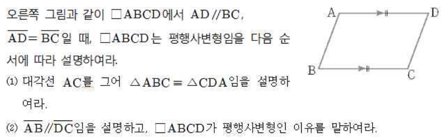
DM 과제의 경우 우리나라와 미국 교과서에서 모두 3%의 비율을 차지한다. 다만, 미국의 경우 모든 교과서에서 DM 과제를 제시하고 있지만, 우리나라의 경우 A, B교과서를 제외한 나머지 교과서는 DM 과제를 제시하지 않고 있다. 낮은 비율일지라도 각 교과서마다 DM 과제를 제공하고 있는 미국에 비해 우리나라는 많은 교과서에서 DM 과제를 제공하지 않고 있는 것이다. 이와 같은 과제 구성의 결과는 우리나라가 비알고리즘적 과제보다는 과제 해결 과정에 좀 더 제약이 있는 과제를 주로 제시하고 있음을 의미한다.

나. 인지적 노력 수준과 관련한 과제의 특징

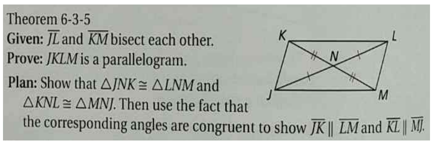
이 부분에서는 앞에서 분석한 결과를 토대로 두 나라의 각 인지적 노력 수준별 수학 과제에서 나타나는 공통적인 특징 및 차별화 되는 특징을 구체적인 예와 함께 세부적으로 비교, 분석하고자 한다.

1) PNC 과제와 관련한 특징

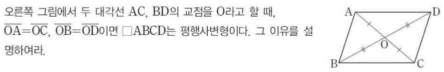
평행사변형임을 증명하는 과제는 두 나라의 교과서에 공통적으로 제시되는 과제이다. 증명과제는 증명하는 수학적 활동 자체가 갖는 특성 때문에 인지적으로 상당한 노력이 요구된다고 알려져 있다(권지현, 김구연, 2013). 하지만 분석 결과 모든 증명 과제가 높은 수준 혹은 동일한 수준의 인지적 노력을 요구하는 것은 아닌 것으로 밝혀졌다. 모든 교과서에는 평행사변형임을 증명하는 과제가 제시되어 있는데, 해결과정의 제시여부에 따라 과제에 절차를 제시하여 주어진 절차를 그대로 이용할 경우 쉽게 증명이 가능한 경우([그림 IV-6], [그림 IV-7] 참고)와 주어진 절차 없이 학생 스스로 증명을 해야 하는 경우([그림 IV-8] 참고)로 나누어진다.


오른쪽 그림과 같이 □ABCD에서 $AD /\!/ BC$, $\overline{AD} = \overline{BC}$일 때, □ABCD는 평행사변형임을 다음 순서에 따라 설명하여라.
(1) 대각선 AC를 그어 $\triangle ABC \equiv \triangle CDA$임을 설명하여라.
(2) $\overline{AB} /\!/ \overline{DC}$임을 설명하고, □ABCD가 평행사변형인 이유를 말하여라.

[그림 IV-6] C교과서 PNC 과제(p. 253)



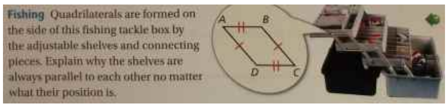
[그림 IV-7] X교과서 PNC 과제(p. 416)



[그림 IV-8] E교과서 PWC 과제(p. 261)

[그림 IV-6]의 과제는 주어진 사각형이 평행사변형임을 쉽게 설명할 수 있도록 몇 가지 절차를 제공하고 있으며, 제공한 절차를 따라 쉽게 과제를 해결할 수 있도록 하고 있다. 문제 해결에 있어 중요한 단서가 될 수 있는 풀이 과정을 단계별로 제시하고 있는 것이다. [그림 IV-7]의 과제의 경우, 전반적인 계획을 제시해 줌으로써 학생들이 증명 계획에 따라 쉽게 과제를 해결할 수 있도록 하고 있다. [그림 IV-6], [그림 IV-7]의 과제는 증명이라는 어려운 과정을 포함하고 있지만, 과제의 전반적인 해결 과정을 제시함으로써 문제의 증명 과정에 대한 절차적 정보를 제시하고 있는 것이다. 이러한 특징으로 인해 [그림 IV-6]과 [그림 IV-7]의 과제는 PNC 과제로 분류된다. 반면, [그림 IV-8]과 같이 평행사변형임을 설명하기 위한 절차를 따로 제공하지 않고 있는 과제의 경우, 학생들은 증명 절차를 스스로 찾아야하며, 이러한 이유로 PWC 과제로 분류된다. 이와 같은 분석의 결과는 비록 과제의 내용이 같은 수학적 의미를 가지고 있을 지라도, 과제를 구성하는 방법에 따라 서로 다른 수준의 인지적 노력이 요구될 수 있음을 시사한다.

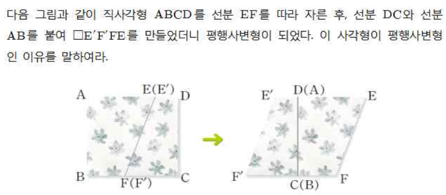
평행사변형임을 증명하는 과제는 두 나라의 교과서에 공통적으로 제시되는 과제이나 분석의 대상과 관련하여 차이점을 갖기도 한다. 우리나라 교과서에 제시되는 증명 과제의 경우 [그림 IV-6]과 [그림 IV-8]의 과제와 같이 주로 도형이 분석의 대상이 된다. 반면, 미국 교과서에 제시되는 증명 과제의 경우 아래의 [그림 IV-9]에서 볼 수 있듯이 실생활 속 도구가 분석의 대상으로 제시되기도 한다. 해당 과제는 '두 쌍의 대변의 길이가 각각 같다.'라는 조건을 만족하는 사각형이 평행사변형임을 증명하는 과제로, 두 쌍의 대변의 길이가 같은 사각형을 공구정리함이라는 실생활의 사례를 활용하여 제시되었다.



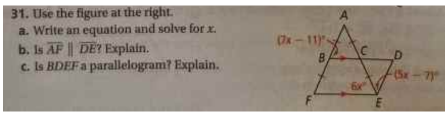
[그림 IV-9] Y교과서(p. 372)

2) PWC 과제와 관련한 특징

우리나라 교과서에는 본문에 제시된 조건 외에 새로운 조건을 만족하는 사각형이 평행사변형임을 증명하는 유형의 과제가 제시되어 있다. 이때, 해당 유형의 과제는 우리나라 모든 교과서에서 구체적인 절차가 제시되지 않은 PWC 과제로 제시된다. ([그림 IV-10] 참고).



[그림 IV-10] D교과서(p. 270)

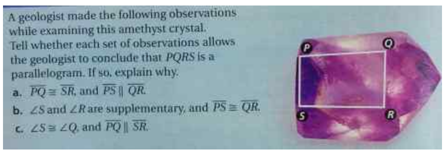


[그림 IV-11] Y교과서(p. 374)

해당 유형의 과제는 미국 교과서에도 공통적으로 제시된다. 하지만 미국 교과서에는 해당 유형

의 과제가 PNC 과제로도 제시된다는 점과 실생활과 연계되어 제시된다는 점에서 우리나라 과제와 차별화된 특징을 지닌다. 예를 들어, 미국 교과서의 경우 [그림 IV-11]과 같이 증명의 각 단계를 소문제로 제시하여 증명의 절차를 쉽게 파악할 수 있도록 한다. 이와 같은 PNC 과제의 제시는 학생들로 하여금 새로운 조건이 주어진 사각형이 평행사변형임을 증명하는 과제를 좀 더 쉽게 이해하고 해결할 수 있도록 도와줄 수 있다.

한편, 우리나라 교과서의 경우 해당 유형 과제의 소재로 평행사변형을 직접 제시하며, 실생활 사례 등을 제시하지 않는다. 반면, 미국 교과서의 경우 실생활 사례를 과제의 소재로 제시한다. 예를 들어, [그림 IV-12]의 과제는 평행사변형이 되기 위한 조건이 지질학자의 연구에 활용되는 사례를 소재로 활용하고 있다. 최근 수학교육에서 수학의 실용성을 강조함에 따라 우리나라 교과서에도 실생활과 연계된 과제가 많이 제공되고 있으며(김미희, 김구연, 2013), 특히 기하 영역의 경우 다른 영역에 비해 실생활과의 연계에 대한 중요성이 더욱 강조됨에 따라 교과서에서도 기하 영역과 실생활을 연결시키고자 하고 있다(송온기, 2009). 하지만 평행사변형이 되기 위한 조건 관련 과제들의 경우 실생활과의 연결을 찾아보기 힘든 것으로 분석되었다.



[그림 IV-12] X교과서(p. 416)

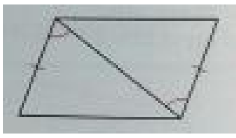
3) DM 과제와 관련한 특징

우리나라와 미국 교과서에서 제시하고 있는 DM 과제의 유형은 서로 다르다. 우리나라 교과서의 경우 DM 과제를 통해 평행사변형이 되기 위한 추가 조건 탐구의 기회를 제공하고 있으며, 미국 교과서의 경우에는 반례 찾기를 통해 교과서에 이미 제시된 조건의 필요성을 사고할 기회를 제공하고 있다.

우리나라 교과서 중에서 DM 과제를 제시하고 있는 교과서는 A와 B교과서이다. 이들 교과서에 제시된 DM 과제는 모두 평행사변형이 되기 위한 추가 조건을 학생 스스로 탐구해 볼 수 있는 기회를 제공한다는 특징을 지닌다. 학생들에게 본문에 제시된 개념을 확장하여 사고할 수 있는 기회를 제공하는 것이다. 비알고리즘적인 절차를 통해 학생 스스로 다양한 답을 추론할 수 있는데, 이는 DM 과제가 갖는 특징이기도 하다.

하지만, 본문에 제시되지 않은 조건을 제시했다고 하여 모두 DM 과제로 분류되는 것은 아니다. 예를 들어, PWC 과제로 분류된 앞의 [그림 IV-12]에 제시된 c과제의 경우, '한 쌍의 대변이 평행하고 한 쌍의 대각이 크기가 같다.'라는 조건을 만족하는 사각형이 평행사변형인지 여부를 판단하는 문제를 통해 평행사변형이 되기 위한 새로운 조건을 생각해보도록 유도하고 있다. [그림 IV-13]의 과제 역시 새롭게 주어진 조건을 만족하는 사각형이 평행사변형임을 증명하는 PWC 과제로, 평행사변형이 되기 위한 조건으로 '한 쌍의 대변의 길이가 같고 대각선에 의해 만들어진 엇각의 크기가 같다.'라는 새로운 조건을 생각해보도록 유도하고 있다. 다만, DM 과제가 학생 스스로 조건을 발견할 수 있는 기회를 제공한다면, PWC 과제는 학생들 스스로 추가 조건을 발견하는 기회를 제공하지 않으며, 과제에 제시된 조건에 대해서만 판단하게 하는 제한적인 사고를 하게 한다. 이와 같은 분석의 결과는 비록 과제의 내용이 같은 수학적 의미를 갖고 있을지라도 과제를 구성하는 방법에 따라 서로 다른 다양한 수준의 인지적인 노력이 요구될 수

있음을 시사한다.



[그림 IV-13] X교과서(p. 414)

한편, DM 과제와 관련하여 미국 교과서의 경우에는 반례 찾기를 통해 교과서에 제시된 평행사변형이 되기 위한 각 조건들의 필요성을 사고할 수 있는 기회를 제공한다. 학생들은 비알고리즘적인 방법으로 다양한 형태의 반례를 제시할 수 있다. 반례를 찾고 오류를 확인하는 과정에서 학생 스스로 자신의 인지 과정을 점검하고 조절할 수 있게 되는 것이다.

Ⅴ. 결 론

본 연구에서는 우리나라와 미국의 수학 교과서에서 다루고 있는 평행사변형이 되기 위한 조건 관련 과제를 비교, 분석함으로써 우리나라 교과서 재구성에 대한 시사점을 도출하고자 하였다. 이를 위하여 우리나라와 미국 수학 교과서에 제시된 과제를 과제의 구조, 증명과 추론 유형, 그리고 인지적 노력 수준에 따라 분류한 뒤, 이들에게서 나타나는 공통점과 차이점을 살펴보았다. 그 결과, 다음과 같은 공통점과 차이점을 알 수 있었다.

첫째, 과제 구조와 관련하여, 우리나라 교과서에 비해 미국 교과서에 제시된 과제의 구조가 더 다양하다. 우리나라의 경우 다섯 가지 유형의 과제가 주로 제시되었지만, 미국의 경우 일곱 가지 유형의 과제가 제시되었다. 이때, 두 나라 교과서에 공통적으로 제시된 유형은 개념 확인 평행사변형 여부 결정, 평행사변형임을 증명, 수치계산의 총 네 가지이며, 우리나라 교과서에만 제시된 유형은 조건 찾기 한 가지이고, 미국 교과서에만 제시된 유형은 반례 찾기, 평행사변형 성질과 연결, 작도 등 총 세 가지이다.

둘째, 증명과 추론 유형 관련하여, 우리나라와 미국 교과서 모두 DA 과제, IC 과제의 순서로 구성 비율이 높다. 우리나라 교과서에 비해 미국 교과서에는 FC 과제가 추가적으로 제시되는 등 미국 교과서에 제시된 과제의 유형이 더 다양하다.

셋째, 과제의 인지적 노력 수준과 관련하여, 우리나라와 미국 교과서 모두 PNC 과제와 PWC 과제가 대부분을 차지하며, 우리나라의 경우 미국에 비해 구체적인 알고리즘을 이용하는 수학 과제를 제시하는 비율이 높다. 이와 같은 연구 결과는 권지현, 김구연(2013)의 연구와 일치하는 것으로, 우리나라 수학 교과서에서는 과제 해결 시 정해진 절차에 따르도록 하는 과제가 많이 제시되고 있음을 확인할 수 있다.

분석 결과 발견된 이와 같은 차이점은 우리나라 교과서 재구성에 관한 몇 가지 시사점을 제공한다. 이는 다음과 같다.

첫째, 과제의 구조 및 증명과 추론 유형 관련하여, 구성의 다양성을 높이는 방안을 고려해야 한다. 우리나라 교과서의 경우 미국 교과서에 비해 과제 구성의 다양성이 부족하다. 과제 구조의 경우, 미국 교과서에 제시된 구조 유형의 개수에 비해 우리나라 교과서에 제시된 구조 유형의 개수가 적다. 또한, 증명 및 추론 유형에서 반례 찾기 등 미국 교과서에 제시되어 있는 유형이 우리나라 교과서에는 제시되지 않고 있다. 과제의 기본 특성은 학생들의 사고에 영향을 미치기도 하는 등(Henningsen & Stein, 1997), 과제를 통한 학습의 기회는 과제의 유형과 그 특성에 따라 다르게 나타난다. 이를 볼 때, 몇몇 구조에 한정된 과제는 학생들의 다양한 사고의 기회를 제한하게 되며, 나아가 학습의 기회를 제한하게

된다. 이와 같은 한계점을 극복하기 위하여 미국 교과서에 제시되어 있는 과제 중 우리나라 교과서 재구성에 시사점이 될 만한 과제 유형을 몇 가지 소개하면 다음과 같다.

평행사변형이 되기 위한 조건을 평행사변형의 성질과 연계하는 과제의 도입을 재고해야 한다. 우리나라 교과서의 과제는 대부분 평행사변형이 되기 위한 조건의 활용에 초점을 맞추고 있다. 반면, 미국 교과서의 경우 평행사변형이 되기 위한 조건의 활용 뿐 아니라, 평행사변형이 되기 위한 조건과 성질과의 관계를 묻는 과제를 제공함으로써 평행사변형의 성질에서 평행사변형이 되기 위한 조건으로 이어지는 학습 과정을 연결시키고자 한다. 특히, 평행사변형이 되기 위한 조건이 평행사변형의 성질의 역이라는 사실을 통해 각 조건이 생성된 과정을 확인할 수 있게 한다. 하지만 우리나라 교과서의 경우 성질과 조건의 연계성을 다루지 않고 있어 학생들은 평행사변형이 되기 위한 조건과 성질과의 관계 및 각 조건이 제시된 이유를 파악하기 힘들다. 이에, 평행사변형이 되기 위한 조건과 평행사변형의 성질을 연결하는 과제의 도입이 필요하다.

반례 찾기 과제의 도입을 재고해야 한다. 우리나라 교과서의 과제는 교과서에 제시된 평행사변형이 되기 위한 조건들을 적용하는데 편중되어 있으며, 각 조건들의 필요성을 확인하게 하는 과제는 제공하지 않고 있다. 반면 미국 교과서의 경우 기존의 조건이 제거되는 경우 발생되는 반례를 학생들 스스로 확인하게 함으로써 각 조건의 필요성을 보여주고자 한다. 각 조건의 구성의 이유 및 그 필요성에 대한 학습이 이루어지지 않는다면, 교과서에 제시된 조건의 활용은 암기에 바탕 한 사용일 뿐이다(정혜윤, 2012).

둘째, 과제의 인지적 노력 수준과 관련하여, PNC 과제에 대한 편중현상을 완화해야 하며, 과제 유형별 인지적 노력 수준에 대한 재고가 필요하다. Stein과 Smith(1998)는 과제의 수준에 따라 학생들에게 서로 다른 수준의 사고의 기회가 제공된다고 하였으며, Hiebert와 Vearne(1993)는 서로 다른 인지과정이 요구되는 과제는 학생들의 다양한 학습을 유도할 가능성이 있다고 하였다. 이에 따르면, 평행사변형이 되기 위한 조건 역시 각각 다른 수준의 과제를 통해 학생들에게 다양한 수준에서 사고하고 학습할 수 있는 기회를 제공할 수 있다. 하지만 우리나라의 경우 PNC 과제가 65%의 비율로 전체 과제의 $\frac{2}{3}$ 가까이 차지하고 있다. 57%를 차지하는 미국 교과서와 비교해도 높은 비율임을 알 수 있다. PNC 과제에 대한 편중현상을 완화하고 다양한 수준의 과제를 접할 기회를 제공해야 할 것이다.

교과서 본문에 제시되지 않은 조건이 주어진 사각형이 평행사변형임을 증명하는 과제의 인지적 노력 수준에 대한 재고도 필요하다. 좀 더 구체적으로는, 해당 유형 과제의 인지적 노력 수준과 관련하여, 현재 교과서에 제시된 PWC 과제의 도입 전에 그보다 낮은 수준인 PNC 과제의 선행 도입이 고려되어야 한다. 우리나라 교과서에서 본문에 제시되지 않은 조건이 주어진 사각형이 평행사변형임을 증명하는 과제는 모두 PWC 과제로 제시되고 있다. 반면, 미국 교과서의 경우 PWC 과제 뿐 아니라 PNC 과제가 함께 제시되어 있다. 소문제로 나누어 과제해결의 절차를 제시함으로써 본문에 제시되지 않은 조건이 주어진 사각형이 평행사변형임을 증명하는데 학생들이 어려움을 느끼지 않도록 도움을 제공하는 것이다. 새로운 조건이 주어진 과제는 본문에 제시된 조건이 주어진 사각형이 평행사변형임을 증명하는 과제와 동일한 PWC 과제일지라도 그 난이도가 좀 더 높게 느껴질 수 있다. 이에, 해당 유형 과제의 인지적 노력 수준을 PWC 과제만으로 제시하기 보다는 PNC 과제를 통해 과제 해결의 아이디어를 접하게 하는 것이 바람

직하다고 판단되어 진다.

셋째, 과제의 주제 또는 소재와 관련하여, 수학 내적, 외적인 상황과의 연결성이 강화된 과제를 도입할 수 있는 방안의 검토가 요구된다. 수학 내적으로는 확률, 작도 등 다른 수학 단원과의 연계가, 수학 외적으로는 실생활과의 연계가 필요한 것이다. 우리나라 교과서의 과제에는 주제 또는 소재로 평행사변형만이 주어졌으며, 수학의 다른 영역이나 실생활과의 내적, 외적인 연계는 이루어지지 않았다. 반면, 미국의 교과서에는 확률이나 작도 등 수학의 다른 영역 및 지리, 기술 등 실생활과 연계된 소재를 이용하여 학생들이 흥미를 갖고 해결할 수 있는 다양한 과제가 제시되어 있다. 수학의 내적, 외적으로 다른 영역과 연계된 과제는 학생들에게 수학의 연결성과 실용성을 학습할 수 있는 기회를 제공한다. 특히, 실용성은 최근 수학교육에서 강조하고 있는 수학의 가치임을 고려할 때, 실생활과 연계된 과제의 도입이 필요하다고 판단되어 진다.

우리나라의 수학 수업에서 수학교과서는 가장 중요한 교수, 학습 자료로 사용되고 있으며, 수학 과제는 수학교과서에서 가장 큰 비중을 차지하고 있다. 이에, 수학 학습 시 수학 과제에 대한 높은 의존도가 예상되는 바, 질 높은 수학 과제의 제공은 교과서 재구성 시 중요한 관심사가 될 수밖에 없다. 본 연구의 결과가 수학 과제 재구성에 미약하나마 유용한 정보를 제공할 수 있기를 기대한다.

참고문헌

김동중, 배성철, 김원, 이다희, 최상호(2015). 중학교 2학년 수학 교과서의 수학 과제 분석: 스토리텔링 유형을 고려하여. **수학교육논문집, 29**(3), 281-300.

강옥기, 권언근, 이형주, 우희정, 윤상혁, 김태희, 김수철, 유승연, 윤혜미(2015). **중학교 수학 2**. 서울: 두산동아.

고호경, 김응환, 양순열, 권세화, 권순학, 정낙영, 장인선, 임유원, 최수영, 이성재, 노솔, 백형윤, 홍창섭(2015). **중학교 수학 2**. 서울: 교학사.

권지현, 김구연(2013). 중학교 수학 교과서에 제시된 기하영역의 수학 과제 분석. **수학교육, 52**(1), 111-128.

김미희, 김구연(2013). 고등학교 교과서의 수학과제 분석. **학교수학, 15**(1), 37-59.

김서령, 이정례, 선우하식, 이진호, 김양수, 김원, 김윤희, 신지영, 노창균, 정혜윤, 주우진(2015). **중학교 수학2**. 서울: 천재교육.

김선희, 김기연(2004). 수학적 모델링 과정에 포함된 추론의 유형 및 역할 분석. **학교수학, 6**(3), 283-299.

김성희, 방정숙(2005). 수학 교수 학습 과정에서 과제의 인지적 수준 분석: 초등학교 '비와 비율' 단원을 중심으로. **수학교육학연구, 15**(3), 251-272.

류희찬, 류성림, 이경화, 신보미, 강순모, 윤옥교, 김명수, 조성오, 천태선, 김철호(2015). **중학교 수학 2**. 서울: 천재교과서.

박경미, 임재훈(2002). 한국, 일본과 미국, 영국의 수학 교과서 비교. **학교수학, 4**(2), 317-331.

송온기(2009). **2007 개정 교육과정에 따른 고등학교 수학 교과서 비교 연구: 고1 기하 영역 중심으로**. 서울시립대학교 석사학위 논문.

오호진(2001). **작도를 통한 평면도형 지도에 관한 연구 : 탐구형 소프트웨어를 사용하여**. 이화여자대학교 석사학위논문.

우정호, 박교식, 이종희, 박경미, 김남희, 임재훈, 권석일, 남진영, 김진환, 강현영, 이형주, 박재희, 전철, 오혜미, 김상철, 설은선, 황수영, 김민경, 최인선, 고현주, 이정연, 최은자, 김

기연, 윤혜미, 천화정(2015). **중학교 수학 2**. 서울: 두산동아.

유클리드, 토마스 히드(1998). **기하학원론 마: 가권 해설서**. (이무현 역), 서울: 교우사.

이경화, 지은정(2008). 그래프의 교수학적 변환 방식 비교: 우리나라 교과서와 Mic 교과서의 초등 통계 내용을 중심으로. **수학교육학연구, 18**(3).

이연재(2005). **사각형의 성질을 활용한 작도문제 해결에 관한 연구: 중학교 2학년 내용을 중심으로**. 한국교원대학교 석사학위논문.

이종희, 김선희(2002). 학교 현장에서 수학적 추론에 대한 실태 조사. **수학교육, 41**(3), 273-289.

이준열, 최부림, 김동재, 송영준, 윤상호, 황선미(2015). **중학교 수학 2**. 서울: 천재문화.

임재훈, 김수미, 박교식(2005). 분수 나눗셈 알고리즘 도입 방법 연구: 남북한, 중국, 일본의 초등학교 수학 교과서의 내용 비교를 중심으로. **학교수학, 7**(2), 103-121.

장유정(2009). **탐구형 기하 소프트웨어를 활용한 평행사변형 학습에 관한 사례연구**. 건국대학교 석사학위논문.

정혜윤(2012). **수학적 문장의 조건 조작에 따른 반례 찾기에 관한 연구**. 서울대학교 석사학위논문.

한혜숙(2010). 현행 중학교 수학 교과서와 MathThematics 교과서의 비교 분석: 수학적 의사소통 측면을 중심으로. **수학교육, 49**(4), 523-540.

홍창준, 김구연(2012). 중학교 함수 단원의 수학 과제 분석. **학교수학, 14**(2), 213-232.

황혜정, 김슬비(2014). 수학 교과에서의 추론 유형의 문제에 관한 탐색: 집합과 명제, 수열 영역을 중심으로. **수학교육논문집, 28**(4), 529-552.

Burger, E. B., Chard, D. J., Kennedy, P. Q., Leinwand, S. J., Renfro, F. L., Roby, T. W., Seymour, D. G., & Waits, B. K.(2013). *Geometry*. Florida: Holt Mcdougal.

Charles, R. I., Hall, B., Kennedy, D., Bass, L. E., Johnso, A., Murphy, S. J., & Wiggins, G.(2015). *Geometry Common Core*. New Jersey: Pearson.

Harel, G. & Sowder, L.(2007). Toward a comprehensive perspective on proof, In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, National Council of Teachers of Mathematics.

Henningsen, M. & Stein, M. K.(1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors That Support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. *Journal for Research in Mathematical Education, 28*(5), 524-549.

Hiebert, J. & Wearne, D.(1993). Instructional Tasks, Classroom Discourse, and Students' Learning in Second-Grade Arithmetic. *American Educational Research Journal, 30*(2).

Johnson, G. J., Thompson, D. R., & Senk, S. L.(2010). Reasoning in High School Textbooks. *Mathematics Teachers, 103*(6), 411-417.

Simon, M. A. & Tzur, R.(2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in Conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 81-104.

Son, J. W.(2005). A Comparison of How Textbooks Teach Multiplication of Fractions and Division of Fractions in Korea and in the U.S.. In Chick, H. L. & Vincent, J. L.(Eds.). *Proceedings of the* 29^{th} *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 201-208.

Son, J. W.(2012). A Cross-national Comparison of Reform Curricula in Korea and the US in terms of Cognitive Complexity: The Case of Fraction Addition and Subtraction. *ZDM Mathematics Education, 44*, 161-174.

Son, J. W. & Senk, S. L.(2010). How Reform Curricula in the USA and Korea Present Multiplication and Division of Fractions. *Educational Studies in Mathematics, 74*(2), 117-142.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M.(1996). Building Student Capacity for Mathematical Thinking and Reasoning: An Analysis of Mathematical Tasks Used in Reform Classrooms. *American Educational Research Journal, 33*(2), 455-488.

Stein, M. K. & Smith, M. S.(1998). Mathematical Tasks as a Framework for Reflection: From Research to Practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. S.(2000). *Implementing Standards-Based Mathematical Instruction: A Casebook for Professional Development*. New York: Teachers College Press.

Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J.(2012). Opportunities to Learn Reasoning and Proof in High School Mathematics Textbooks. *Journal for Reasoning in Mathematics Education, 43*(3), 253-295.

A Comparative Study of the Mathematics Textbooks' Tasks of Korea and the USA : Focused on Conditions for Parallelograms

Jung, Hye Yun (Graduate School, Seoul National University)
Lee, Kyeong Hwa (Seoul National University)

The purpose of this study is to analyze mathematical tasks of Korea and the USA textbooks focused on conditions for parallelograms. In this study, structures of task, types of proof and reasoning, and levels of cognitive demand are investigated.

The conclusion is as follows: First, with respect to structures of task, structures presented in the USA textbooks are more diverse. Second, with respect to types of proof and reasoning, Korea and the USA prefer IC task and DA task. And task types presented in the USA textbooks are more diverse. Third, with respect to levels of cognitive demand, in both Korea and the USA textbooks, PNC task and PWC task account most. And compared to the USA, Korea prefer algorithms.

In addition, we find out implications for reconstruction of Korea textbook. It is as follows: First, with respect to structures of task and types of proof and reasoning, the diversity of composition needs to be raised. Second, with respect to levels of cognitive demand, the concentration in PNC task needs to be declined. And levels of cognitive demand on types of tasks need to be reconsidered. Third, with respect to tasks' topic and material, internal and external connectivities of mathematics need to be strengthened.

* Key Words : mathematics textbook(수학 교과서), mathematical task(수학 과제), conditions for parallelograms(평행사변형이 되기 위한 조건), structures of task(과제 구조), types of proof and reasoning(증명과 추론 유형), levels of cognitive demand(인지적 노력 수준)

논문접수 : 2016. 8. 9
논문수정 : 2016. 9. 12
심사완료 : 2016. 9. 13