대한수학교육학회지 <학교수학> 제 18 권 제 4 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 18, No. 4, 793 ~ 818. Dec 2016

이분모분수 덧셈의 핵심 아이디어에 대한 초등학교 5학년 학생들의 이해

이 지 영* · 방 정 숙**

본 연구의 목적은 2009 개정 교육과정에 의한 초등학교 수학 교과서로 이분모분수의 덧셈을 학습한 학생들이 이분모분수의 덧셈에서 전체 단위의 고정성, 통분의 필요성, 재귀적 분할 및 이분모분수 덧셈의 알고리즘에 대해 어떻게 이해하고 있는지를 구체적으로 살펴보는 것이다. 이를 위해, 15명의 5학년 학생들을 대상으로 교수 실험을 진행하였다. 연구 결과 대부분의 학생들은 이분모분수 덧셈의 핵심 아이디어에 절차적으로 접근하는 경향을 보였다. 그러나 일부 학생들은 이분모분수의 덧셈 상황에 양적으로 접근하고 단위의 구조에 초점을 맞추면서 이분모분수의 의미 및 알고리즘을 개념적으로 이해할 수 있었다. 이에 대한 논의를 바탕으로 이분모분수의 덧셈 지도 방안에 구체적인 시사점을 제공하고자 한다.

I. 서 론

이분모분수의 덧셈과 뺄셈은 학생들이 학습한 분수 관련 내용을 복합적으로 사용한다는 점에서 중요하다. 이분모분수의 덧셈과 뺄셈을 하기 위해서는 두 분모의 곱을 공통분모로 하여 통분하고, 분수의 성질을 이용하여 동치분수를 만들고, 동분모분수의 덧셈과 뺄셈을 해야 한다.

일련의 계산 절차만 강조할 경우에 학생들은 이분모분수의 덧셈과 뺄셈이 공식을 암기하여 해결할 수 있는 간단한 주제라고 여기기 쉽지만 이분모분수의 덧셈과 뺄셈을 하는 과정에서 통분의 의미나 계산 원리 등에 개념적으로 접근하면 어려움을 겪는다. 학생들이 겪는 어려움은 이분모분수의 덧셈식과 뺄셈식을 문장제나 그림으로 나타내도록 한 여러 연구에서 이미 보고된 바 있다(예, 김미영, 백석윤, 2010; 이지영, 2009).

학생들이 이분모분수의 덧셈과 뺄셈을 개념적으로 이해하는 것을 어려워하는 이유 중 하나는 덧셈과 뺄셈, 통분, 동치분수, 동분모분수의 덧셈과 뺄셈 등과 같은 다양한 내용이 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 어떠한 의미를 갖는지 개념적으로 연결하여 탐색해볼 경험이 부족하기 때문이다(변희현, 2009). 이분모분수의 덧셈 및 뺄셈과 관련하여 제4차~2009 개정 교육과정에 의한 교과용 도서를 분석한 이지영과 방정숙(2016)은 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 교육이 개념적인 의미나 원리를 이해하도록 하기보다는 절차적인 측면을 강조하고 있다는 것을 지적하였다. 또한 연구자들은 선행 연구를 바탕으로 이분모분수의 덧셈과 뺄셈을 보다 개념적으로 이해하기 위한 하나의 방안으로 점차 복잡해지는 단위의 구조에 따라 1) 두 분수의 전체 단위가 서로 같다는

* 팔달초등학교, ez038@naver.com (제1 저자)
** 한국교원대학교, jeongsuk@knue.ac.kr (교신저자)

아이디어를 통해 연산의 의미를 파악하고, 2) 전체 단위를 등분할하여 구성된 단위의 단위 구조로는 두 분수를 더한 값을 측정할 수 없으므로 새로운 공통 단위를 만드는 통분이 필요하다는 것을 이해하고, 3) 재귀적 분할을 이용하여 단위의 단위의 단위 구조로 재구성하는 과정을 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 알고리즘과 연결할 것을 제안하였다. 이 연구는 학생들이 이분모분수의 덧셈과 뺄셈을 개념적으로 이해하도록 돕기 위해서 '무엇을' 강조하여야 하는지를 구체적으로 탐색하였다는 데에 의미가 있다. 그러나 학생들이 위의 세 가지 아이디어를 '어떻게' 이해하고 있는지에 대한 보다 실제적인 연구가 필요하다.

이에 본 연구는 이지영과 방정숙(2016)이 제안한 이분모분수의 덧셈과 뺄셈의 핵심 아이디어와 관련하여 2009 개정 교육과정에 의한 초등학교 수학 교과서(이하 2009 개정 교과서)로 이분모분수의 덧셈을 학습한 초등학교 5학년 학생들이 이분모분수의 덧셈의 의미, 통분의 필요성, 이분모분수의 덧셈의 알고리즘 등을 어떻게 이해하고 있는지를 밝히고자 한다. 또한 이유나 원리에 대해 탐색하도록 충분한 기회를 제공하였을 때 학생들의 이해가 어떻게 발달하는지도 분석의 초점으로 두고자 한다. 이를 통해 이분모분수의 덧셈에 대한 학생들의 개념적 이해를 돕기 위한 구체적인 지도 방안을 탐색하고자 한다.

II. 이분모분수 덧셈의 핵심 아이디어

본 장에서는 이지영과 방정숙(2016)의 연구에서 제시한 이분모분수 덧셈의 핵심 아이디어를 구체적으로 설명한다. 또한 각각의 아이디어가 2009 개정 교과서에 어떻게 제시되어 있는지를 간략하게 소개한다. 초등학교 이분모분수 덧셈의 핵심 아이디어를 정리하면 <표 II-1>과 같다.

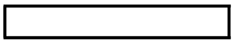
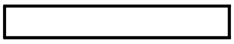
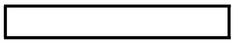
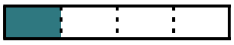
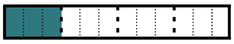
1. 전체 단위의 고정성

<표 II-1>의 (a)를 보면 이분모분수의 덧셈에서 피가수와 가수가 되는 두 분수와 결과값으로 나오는 분수의 단위가 서로 같다는 것을 확인할 수 있다. 이분모분수의 덧셈에서 나타나는 세 가지 양의 단위가 같은 것은 이분모분수의 덧셈의 의미와 밀접하게 관련된다. Schwartz(1988)는 덧셈 및 뺄셈을 곱셈 및 나눗셈과 구분하여 세 가지 양의 단위가 변하지 않고 유지되는 연산으로 제시한 바 있다.

동분모분수의 덧셈에서는 두 분수의 분모의 크기가 수치적으로 같기 때문에 전체 단위를 같게 유지하는 것과 관련하여 학생들의 어려움이 별반 드러나지 않는다. 그러나 이분모분수의 덧셈에서는 두 분수의 분모의 크기가 수치적으로 다르기 때문에 학생들은 전체 단위도 다르다고 생각할 수 있다. 실제로 Izsák과 그 동료들(2008)의 연구에서 한 학생은 이분모분수의 덧셈 상황에 제시된 두 분수를 각각 자연수의 쌍으로 해석하면서 각 분수의 전체 단위를 다르게 설정하였고 이로 인해 지속적인 어려움을 겪었다. 따라서 이분모분수의 덧셈의 의미를 이해하기 위해서는 전체 단위가 고정된다는 것을 이해하는 것이 필요하다. 이와 함께 각각의 분수와 두 분수의 합이 의미하는 양이 무엇인지를 정확하게 알아야 한다. 피가수, 가수, 합이 되는 양은 모두 같은 단위를 기준으로 표현된 양이다.

2009 개정 교과서에는 2차시에서 이분모분수의 덧셈을 밀가루 $\frac{1}{3}$컵과 밀가루 $\frac{1}{2}$컵을 더하는 상황으로 제시하고 있다(교육부, 2015, p. 238). 측정 단위 '1컵'으로 두 분수의 전체 단위를 같게 제시하고 있지만 덧셈의 의미와 관련하여 전체 단위가 같아야 하는 이유는 구체적으로 다루

<표 II-1> $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$을 하는 과정에서 복잡해지는 단위의 구조와 의미(이지영, 방정숙, 2016)

	단위의 구조			의미 (pp. 627-628)
	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$	
(a)	 1	 1	 1	**핵심 아이디어1.** 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 연산에 관여하는 세 가지 양이 가리키는 대상의 단위는 모두 같다.
(b)	 $\frac{1}{3}$이 2개	 $\frac{1}{4}$이 1개	 $\frac{1}{3}$이 2개와 $\frac{1}{4}$이 1개	**핵심 아이디어2.** 이분모분수의 덧셈과 뺄셈에서 결과를 하나의 양으로 표현하기 위해서는 새로운 단위가 필요하다.
(c)	 $\frac{1}{12}$이 4개인 $\frac{1}{3}$이 2개	 $\frac{1}{12}$이 3개인 $\frac{1}{4}$이 1개	 $\frac{1}{12}$이 8개와 3개이므로 $\frac{11}{12}$	**핵심 아이디어3.** 재귀적 분할을 통해 세 번째 수준의 단위를 찾을 수 있고 이러한 과정은 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 알고리즘과 연결된다.

지 않는다. 특히 스토리텔링인 1차시에 제시된 내용은 덧셈의 의미에 대해 생각해볼 수 있는 좋은 소재이지만 이와 관련된 발문은 제시되어 있지 않다. 구체적으로 6쪽에 걸쳐 '계량컵'과 '계량스푼'으로 측정한 양이 다양하게 제시되어 있는데(교육부, 2015, pp. 234-237), 서로 다른 측정 단위로 측정한 두 분수를 더하는 것이 어떠한 의미를 갖는지 생각해보는 발문을 제시한다면 이분모분수 덧셈의 의미에 대해 탐색해볼 수 있는 좋은 기회를 제공할 수 있을 것이다.

2. 통분의 의미와 필요성

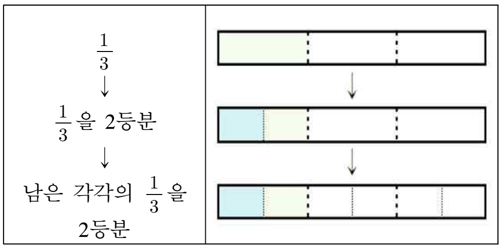
<표 II-1>의 (b)를 보면 통분의 의미와 필요성이 잘 드러난다. 이분모분수의 덧셈에서 각각의 분수는 전체 단위를 등분할하여 나타낼 수 있다. 예를 들어 $\frac{2}{3}$는 전체 단위를 3등분하고, $\frac{1}{4}$은 같은 단위를 4등분하여 나타낼 수 있는데 이 과정에서 전체 단위 1은 각각 단위의 단위의 구조를 갖는다. 이로써 $\frac{2}{3}$는 두 번째 수준의 단위인 $\frac{1}{3}$이 2개인 수이고 $\frac{1}{4}$은 또 다른 두 번째 수준의 단위인 $\frac{1}{4}$이 1개인 수가 된다. 이와 같이 이분모분수의 덧셈을 절차적으로 수행하기 이전에 단위의 단위의 구조를 탐색해 볼 경험을 갖는 것이 중요한데 그 이유는 현재의 두 가지 단위 구조로는 두 분수를 합한 양을 하나의 분수로 표현할 수 없다는 것을 눈으로 확인할 수 있기 때문이다. 두 분수를 합한 양은 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{4}$로는 측정할 수 없다. 이 양을 측정하기 위해서는 더 작은 단위가 필요하다는 것을 알아야 하고 그 단위가 두 분수를 공통적으로 표현할 수 있어야 함을 알아야 한다. 즉 단위의 단위 구조에서 다시 단위의 단위의 단위 구조로 더욱 세분하여 나타낼 필요가 있다. 공통단위를 만들기 위해서 각각의 $\frac{1}{3}$을 다른 분수의 분모만큼 4등분하고 각각의 $\frac{1}{4}$을 역시 다른 분수의 분모만큼 3등분하면 두 분수를 나타낼 수 있는 공통단위이면서 세 번째 수준의 단위인 $\frac{1}{12}$을 만들 수 있다. 이러한 과정

이 통분이다. 또한 $\frac{1}{12}$로 단위를 통일하면 주어진 양을 하나의 분수로 표현할 수 있기 때문에 통분이 필요함을 설명할 수 있다.

그러나 2009 개정 교과서(교육부, 2015, p. 238)에서는 학생들이 직접 통분의 필요성에 대해 생각해보는 과정이 생략되어 있고 두 분수의 합을 어림한 후에 바로 두 분수를 통분하여 그림으로 나타내도록 제시하고 있다.

3. 재귀적 분할과 이분모분수의 덧셈 알고리즘의 연결

<표 II-1>의 (c)를 보면 단위의 단위 구조를 단위의 단위의 단위 구조로 재분할하는 과정이 잘 나타난다. 이러한 과정을 Steffe(2003, 2004)가 제안한 재귀적 분할과 연결하면 이분모분수의 덧셈에서 일반적으로 적용할 수 있는 알고리즘을 이해할 수 있다. 재귀적 분할은 [그림 II-1]과 같이 전체의 부분의 부분의 크기가 얼마인지 알아보기 위해 각각의 부분을 재귀적으로 분할하는 과정으로, 세 가지 수준의 단위 구조에 대한 이해를 바탕으로 한다.



[그림 II-1] 재귀적 분할 과정

재귀적 분할 과정과 이분모분수의 덧셈 알고리즘(예, $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2\times4}{3\times4}+\frac{1\times3}{4\times3}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{12}$)을 연결해보면, 먼저 세 번째 수준의 단위를 만드는 과정을 통해 $\frac{1}{3\times4}$과 $\frac{1}{4\times3}$의 계산 원리를 설명할 수 있다. $\frac{2}{3}$의 기본 단위인 $\frac{1}{3}$을 다른 분수의 분모인 4로 재분할하면 전체 단위를 3등분하고 다시 각각의 단위를 4등분하였으므로 전체 단위는 3×4등분된다는 것을 알 수 있다. 왜냐하면 전체 단위는 4개씩 3묶음으로 구성되므로 이는 4×3으로 표현할 수 있고 곱셈의 교환법칙을 적용하면 3×4가 되기 때문이다. 따라서 세 번째 수준의 단위는 $\frac{1}{3\times4}$로 표현할 수 있다. $\frac{1}{4}$도 같은 방법을 적용할 수 있다.

다음으로 분모에 곱한 수만큼 분자에 곱하는 과정 역시 설명할 수 있다. $\frac{2}{3}$에서 두 번째 수준의 단위인 $\frac{1}{3}$은 이제 세 번째 수준의 단위인 $\frac{1}{3\times4}$을 이용하여 $\frac{1}{3\times4}$이 4개인 양으로 표현할 수 있다. 즉 그 양은 $\frac{1\times4}{3\times4}$가 된다. $\frac{2}{3}$는 이러한 $\frac{1}{3}$이 2개인 양이므로 $\frac{1\times4}{3\times4}\times2$이고 $\frac{1\times4\times2}{3\times4}$로 표현할 수 있고 궁극적으로 곱셈의 교환법칙과 곱셈의 항등원을 이용하여 $\frac{2\times4}{3\times4}$로 나타낼 수 있다. $\frac{1}{4}$도 같은 방법을 적용하면 $\frac{1\times3}{4\times3}$이 된다.

그러나 위의 방법으로 설명했을 때 몇 가지 어려움이 발생한다. 우선 곱셈의 교환법칙을 통해 알고리즘을 도출해나가는 과정이 복잡할 수 있다. 또한 $\frac{1\times4}{3\times4}\times2=\frac{1\times4\times2}{3\times4}$에서 학생들이 아직 학습하지 않은 분수와 자연수의 곱셈이 필요하다. 따라서 학생들이 배운 수준에서 조금 조정한다면 다음과 같다.

$\frac{2}{3}$를 재귀적으로 분할하는 과정에서 각각의 조각이 4등분되었으므로 전체 양을 나타내는 3개의 조각은 3×4이므로 12등분, 색칠되어 있는 2개의 조각은 2×4이므로 8등분이 된다는 것을 직관적으로 이해하는 것이다. 분할 과정에서 각각의 조각은 크기가 작은 조각으로 분할되면서 동시에 조각의 개수가 늘어난다는 것을 알고 이를

곱셈으로 표현하여 $\frac{2}{3}=\frac{2\times4}{3\times4}$로 나타내는 것이다.

2009 개정 교과서에서는 모델을 이용한 활동과 이분모분수의 덧셈 알고리즘이 서로 연결되지 않는다. 구체적으로 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{2}$을 통분하여 $\frac{2}{6}$와 $\frac{3}{6}$을 각각 모델에 표현한 후 $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$를 통해 두 분수의 합을 구한다(교육부, 2015, p, 238). 이 과정은 $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1\times2}{3\times2}+\frac{1\times3}{2\times3}=\frac{5}{6}$와 직접적으로 연결된다고 보기는 어렵다.

III. 연구 방법 및 절차

본 연구의 목적 중 하나는 2009 개정 교과서로 이분모분수의 덧셈을 학습한 학생들이 이분모분수의 덧셈의 의미 및 계산 원리를 어떻게 이해하고 있는지를 면밀히 탐색하는 것이다. 이에 5학년 1학기 4단원 '분수의 덧셈과 뺄셈' 중에서 2차시인 '분수의 덧셈을 할 수 있어요'까지 학습이 완료된 학생들을 대상으로 하였다. 해당 차시의 내용은 "이분모 분수의 덧셈에서 통분의 필요성을 깨닫게 한다."와 "받아올림이 없는 이분모 진분수의 덧셈 원리를 이해하게 한다."로(교육부, 2015, p. 229), 이분모분수의 덧셈의 계산 원리를 다루는 부분이다.

다른 목적은 학생들이 현재 이해하고 있는 내용을 탐색하는 것에 그치지 않고 자신의 의견을 구체화하는 과정에서 이분모분수의 덧셈의 의미 및 계산 원리에 대한 이해를 어떻게 발달시키고 수정해나가는지를 알아보는 것이다. 이를 위해 교수 실험을 진행하였다.

1. 연구 대상

본 연구의 대상은 경기도에 위치한 P 초등학교의 5학년 학생 15명이다. 학생들은 창의적 체험활동의 수학동아리 구성원이다. 해당 동아리는 총 6개의 동아리 중 하나로 각각의 동아리를 소개할 때 수학 내용에 대해 자신의 생각을 설명하고 논의하는 동아리이며 수학을 잘 하지 못하더라도 누구나 참여할 수 있음을 설명하였다. 총 5개의 각 학급에서 1~3배수의 학생들이 참여를 희망하였으며 각 담임교사가 희망한 학생 중에서 3명씩 무작위적으로 선정하였다.

연구 대상은 <표 III-1>과 같이 수학학업 성취도 및 의사소통 능력에 따라 크게 6그룹으로 구분된다. 이를 통해 수학학업 성취도가 상, 중, 하에 해당하는 학생들과 의사소통 능력이 상, 중, 하에 해당하는 학생들이 비교적 고르게 구성되었음을 알 수 있다.

2. 교수 실험

교수 실험은 학생들이 학습하는 과정에 초점을 두고 이를 구체적으로 탐색하여 학생들이 학습하고 있는 수학에 대한 모델을 구성하기 위한 것이다(Steffe & Thompson, 2000). 따라서 연구자는 교사가 되어 수학 내용을 직접적으로 가르치기 보다는 학생들이 사고를 정교화할 수 있도록 구체적인 질문을 하였고 서로 의사소통하는 과정에서 논의 방향을 돕는 조력자로 참여하였다. 또한 매 차시 교수실험이 진행된 후에 학생들의 학습 과정을 분석하여 다음 교수 실험의 과제를 마련하였다.

수학 동아리의 구체적인 일정은 <표 III-2>와 같다. 본 연구는 6~10차시의 교수실험에 대한 것이다. 각각의 교수 실험은 40분씩 진행되었고 개별적으로 자신의 생각을 정리한 후에 전체적으로 논의하는 방법으로 진행되었다. 교수 실험에서 사용된 과제는 <표 III-3>과 같다. 과제는 이분모분수의 덧셈과 뺄셈의 3가지 핵심 아이디어와 관련하여 개발되었으며 실제 교수 실험이 진

<표 III-1> 연구 대상의 특징

가명(성별)	특징
혜원(여), 정수(남) 성규(남)	수학학업 성취도가 높으며 기본적으로 수학 교과에 관심이 많음. 매 발표 활동에 주도적으로 참여하고 자신의 생각을 논리적으로 설명하는 능력이 우수하고 다른 학생들의 의견을 주의 깊게 듣고 수학적인 질문 및 반론을 제시함.
현지(여), 예준(남)	수학학업 성취도가 높으며 기본적으로 수학 교과에 관심이 많음. 학습지에 자신의 생각을 논리적으로 기록하는 능력은 우수하나 전체 의견을 교환할 때에는 대부분 연구자가 지목할 경우에 자신의 생각을 표현함.
민경(여), 명진(남) 유석(남)	수학 교과에 관심이 많고 자신의 생각을 발표하는 데 주도적으로 참여하지만 자신의 생각을 논리적이고 간결하게 설명하지 못하는 경우가 있으며, 오류를 보이는 경우가 많음.
수정(여), 아연(여)	계산을 이용하여 문제를 해결하는 데에는 어려움이 없으나 깊게 사고해야 하는 상황에서 쉽게 포기하는 경향이 있음. 다른 학생들의 의견을 주의 깊게 듣고 자신의 생각으로 바꾸어 말함.
승민(남)	수학학업 성취도가 높은 편이 아니고 문제를 해결하는 데 많은 시간이 소요되는 편이나 하나의 문제 상황에서 깊게 생각하려고 노력하는 모습이 많이 보였으며 개념적으로 사고하는 부분이 있음. 수학적으로 발전가능성이 높음.
은채(여), 규현(남) 경태(남), 영택(남)	수학 문제를 개념적으로 이해하고 설명하는 데 어려움이 있으나 이해하기 위해 노력하는 모습을 보임.

<표 III-2> 교수 실험 일정 및 내용

차시	일시	수학동아리 활동
1	2016. 3. 31.	동아리 구성 및 안내
2	2016. 4. 7.	전체-부분으로서의 분수(1)
3	2016. 4. 21.	전체-부분으로서의 분수(2)
4	2016. 5. 12.	측정으로서의 분수
5	2016. 5. 19.	전체-부분과 측정으로서의 분수의 비교
6	2016. 6. 2.	이분모분수의 덧셈의 의미
7	2016. 6. 9.	이분모분수에서 통분의 필요성
8	2016. 6. 16.	이분모분수의 계산 원리
9	2016. 6. 23.	이분모분수의 덧셈
10	2016. 6. 30.	검사지

행되는 과정에서 하위 과제를 수정하여 융통성 있게 제시하였다.

6~8차시에는 과제 1을 중점적으로 다루면서 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$에 관한 학생들의 생각을 구체적으로 설명하도록 하였다. 과제 1의 목적은 다음과 같다. 첫째, $\frac{2}{3}$m, $\frac{1}{4}$m와 같은 측정으로서의 분수를 제시하여 이분모분수 상황에 양적으로 접근하고 단위의 구조를 파악할 기회를 제공하는 것이다. 참고로 학생들은 교수 실험의 4~5차시에서 2m만 표시된 빈 수직선에 $\frac{3}{4}$m를 표현해보는 활동을 통해 측정으로서의 분수를 이미 경험한 바 있다. 따라서 자신이 알고 있는 내용을 이용하여 어떻게 문제에 접근하는지 살펴보았다. 둘째, 이분모분수의 덧셈의 의미에 대해 생각할 기회를 제공하는 것이다. 구체적으로 $\frac{2}{3}$m와 $\frac{1}{4}$m의 양을 먼저 생각한 후에 두 양을 더한 결과값을 어떻게

<표 III-3> 교수 실험 주요 과제

과제 1. 재석이는 $\frac{2}{3}$m의 리본이 있고, 형돈이는 $\frac{1}{4}$m의 리본이 있습니다. 재석이는 자신의 리본과 형돈이의 리본을 길게 이어붙이면 몇 m가 되는지 궁금하였습니다. 재석이는 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{3+4}=\frac{3}{7}$으로 계산하였고 자신의 리본과 형돈이의 리본을 합하면 $\frac{3}{7}$m가 된다고 생각하였습니다.

(1) 재석이의 풀이과정에 동의합니까?

(동의한다, 동의하지 않는다)

(2) 재석이의 풀이과정에 동의하지 않는다면 재석이에게 위의 풀이과정이 틀렸다는 것을 어떻게 알려줄 것인지 다양한 방법으로 설명하시오.

(3) 재석이에게 분수의 덧셈 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$을 하는 방법을 그림과 식으로 설명하여 보시오. (그림과 식을 서로 연결하여 설명해 보세요.)

과제 2. $\boxed{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{2\times2}{5\times2}+\frac{1\times5}{2\times5}=\frac{4}{10}+\frac{5}{10}=\frac{9}{10}}$

(1) 위의 계산 원리를 설명할 수 있는 그림을 최대한 다양하게 표현하여 보시오.

(2) 각 그림과 위의 원리를 연결하여 설명하시오.

표현할 수 있을지 생각해보도록 하였다. 이를 통해 이분모분수의 덧셈은 두 개의 양을 더하여 나온 하나의 양을 분수로 표현하는 과정이라는 것을 이해하도록 하였다. 셋째, 이미 이분모분수의 덧셈 방법을 학습한 학생들이므로 이분모분수의 덧셈의 대표적인 오개념을 제시하여 '왜, 어떻게'에 초점을 맞추도록 하였다. 넷째, 학생들이 그리는 그림이 어떠한 의미와 계산 원리를 담고 있는지 생각할 기회를 제공하기 위해 그림과 계산 원리를 연결하여 설명하도록 하였다.

이러한 목적에 따라 하위 과제를 설정하였으며 첫 번째 하위 과제는 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{3+4}=\frac{3}{7}$과 같이 이분모분수의 덧셈의 대표적인 오개념에 대하여 판단해보는 과정이다. 두 번째 하위 과제는 이분모분수의 덧셈의 의미를 더욱 직접적으로 파악하도록 돕기 위해 이분모분수의 덧셈 계산 원리를 적용하지 않고도 계산 결과가 $\frac{3}{7}$이 아니라는 것을 어떻게 알 수 있을지 설명해보도록 하였다. 양적으로 생각하는 학생들은 $\frac{2}{3}$에 어떠한 수를 더했기 때문에 $\frac{2}{3}$보다 더 작은 값인 $\frac{3}{7}$은 덧셈의 결과가 될 수 없다는 것을 충분히 찾을 수 있을 것이다. 세 번째 하위 과제는 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$을 식으로만 해결하지 않고 그림으로 표현하여 이분모분수의 덧셈의 의미와 덧셈의 과정을 표현해보도록 하였다. 이는 이분모분수의 덧셈 알고리즘을 개념적으로 이해하고 있는지 아니면 절차적으로 암기하고 있는지를 살펴보기 위함이다.

9차시에는 과제 2를 통해서 다른 상황인 $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}$에서 자신이 이해한 것을 설명해보도록 하였고 마찬가지로 그림과 계산 원리를 연결하여 설명하도록 하였다. 과제 2의 목적은 다음과 같다. 첫째, 새로운 상황에 적용하는 과정에서 학생들이 이분모분수의 덧셈을 어떻게 이해하고 있는지를 살펴보는 것이다. 둘째, 그림과 알고리즘을 연결하는 과정에서 이분모분수의 덧셈에 대한 이해가 어떻게 발달하였는지 탐색하는 것이다.

마지막 10차시에는 교수 실험을 통해 학생들의 생각이 어떻게 변화하였는지를 살펴보기 위

<표 III-4> 10차시에 사용한 검사지에서 이분모분수의 덧셈에 관한 문항

문항 3. $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$와 같은 분수의 덧셈을 할 때 통분을 하는 이유를 설명하시오.
문항 4. $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$에서 통분할 때 분모와 분자에 같은 수를 곱하는 이유를 설명하시오.
문항 5. 아래 계산 원리를 가장 잘 설명해주는 그림을 그리고 설명하시오. $$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{1\times3}{4\times3}+\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{3}{12}+\frac{8}{12}=\frac{11}{12}$$

해 5개의 문항에 대해 기술하도록 하였다. 이 중 이분모분수의 덧셈과 관련된 내용은 문항 3~5에 해당한다(<표 III-4> 참고).

3. 자료 수집 및 분석

교수실험은 카메라 2대로 녹화되었다. 카메라 1대는 전체 상황을 녹화하기 위해 교실 뒤에 설치하였고 나머지 1대는 연구자가 가지고 다니면서 학생들의 활동이나 발표 내용들을 기록하는 데 사용하였다[1].

교수실험이 진행되는 동안 학생들은 개별 활동 시간에 자신의 생각을 학습지에 기록하였다. 이때 보다 생생한 기록을 위해서 학생들에게 문제를 해결하는 과정에서 틀린 부분이 있다고 하더라도 지우지 않도록 안내하였고 매 차시마다 볼펜을 제공하여 볼펜으로 기록하도록 하였다.

매 차시의 교수실험이 끝나고 난 후에 교수실험의 녹화 자료, 녹화한 내용을 전사한 자료, 학생들의 학습지, 연구자의 현장노트 등을 바탕으로 진행 분석을 실시하였으며 후속 교수실험에서 다룰 과제 및 실험의 방향 등을 정하였다. 모든 교수실험이 끝난 후에 수집된 자료를 다시 분석하였다.

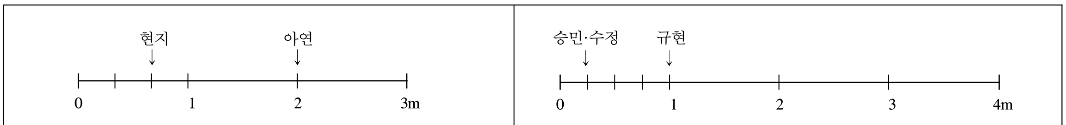
IV. 연구 결과

본 장에서는 교수실험이 진행된 순서에 따라 이분모분수의 덧셈에 대한 학생들의 이해를 분석하였다. 여기서 제시된 그림 자료는 학생들이 칠판에 제시한 자료를 기본으로 하였지만 발표 도중 변형된 것이나 쉽게 알아보기 힘든 경우에는 학습지에 제시한 표현 또는 연구자가 나타낸 표현으로 대체하였다.

1. 이분모분수의 덧셈의 의미에 대한 학생들의 이해

6차시 교수실험의 초점은 학생들이 이분모분수의 덧셈 상황을 어떻게 이해하고 있는지 살펴보는 것이다. 학생들은 15분 동안 <표 III-3>의 과제 1을 개별적으로 해결하는 시간을 가졌다. 이분모분수의 덧셈의 의미에 대한 학생들의 이해를 알아보기 위해서 먼저 학생들이 $\frac{2}{3}$m와 $\frac{1}{4}$m의 양을 어떻게 이해하고 있는지 알아볼 필요가 있었다. 연구자는 [그림 IV-1]과 같이 3m까지 표시된 수직선과 4m까지 표시된 수직선을 칠판에 제시하였고 $\frac{2}{3}$m와 $\frac{1}{4}$m를 각각 표현해보도록 하였다. 이와 같이 수직선을 구분하여 제시한 이유는 다음과 같다. 첫째, 5차시에서 측정으로서의 분수와 전체-부분으로서의 분수를 비교하는 활동을 하였으므로 측정으로서의 분수는 하나의 단위를 기준으로 나타낸 절대적인 양이라는 것을 이해하고 있는지 알아보기 위한 것이다. 둘

1) 교수실험에 참여하는 15명의 학생 및 학부모에게 교수실험의 목적을 안내하였으며 수업을 녹화하는 것에 대한 동의를 구하였다.



(a) $\frac{2}{3}$m의 위치에 대한 학생들의 반응 (b) $\frac{1}{4}$m의 위치에 대한 학생들의 반응

[그림 IV-1] $\frac{2}{3}$m와 $\frac{1}{4}$m의 위치에 대한 학생들의 반응

째, 이분모분수의 덧셈 문제에 제시된 두 분수에 대해 양적으로 생각해볼 기회를 제공하기 위함이다. 마지막으로 이분모분수의 덧셈에서 두 분수의 전체 단위가 서로 같은 단위임을 이해하고 있는지를 살펴보기 위함이기도 하다.

아연이는 교사가 제시한 3m를 3등분한 후 2m가 있는 위치에 $\frac{2}{3}$m를 표시한 반면에 현지는 1m를 다시 3등분한 후에 그 중 2번째 눈금에 표시하였다. $\frac{1}{4}$m에서도 이것과 유사한 반응이 나타났다. 규현이는 전체 4m를 4등분한 것 중에 첫 번째 눈금인 1m에 표시하였고 승민이와 수정이는 1m를 다시 4등분한 것 중에 첫 번째 눈금에 표시하였다. 각 학생들이 앞으로 나와 자신의 의견을 발표하는 동안 앉아 있는 학생들은 아연이와 규현이의 의견에 동의하지 않는다는 표현을 하였다. 대부분의 학생들이 현지, 승민, 수정이의 의견에 동의하였지만 일부 학생들은 측정으로서의 분수와 전체-부분으로서의 분수를 여전히 혼동하고 있었다. 이에 연구자는 학생들에게 $\frac{2}{3}$m를 양적으로 생각해볼 기회를 제공하기 위해서 수직선에서 $\frac{2}{3}$m의 위치가 여러 개인지 아니면 단 하나만 존재하는지를 물어보았다. 학생들은 수직선에서 $\frac{2}{3}$m와 $\frac{1}{4}$m 위치가 각각 한 군데라는 것에 동의하였으며 단위인 1m를 기준으로 측정한 값이기 때문에 1m보다 작은 양이라고 이야기하였다.

다음으로 연구자는 $\frac{2}{3}$m와 $\frac{1}{4}$m를 더하는 것을 학생들이 어떻게 이해하고 있는지 알아보기 위해서 재석이의 풀이 과정인 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{3+4}=\frac{3}{7}$에 대해 동의하는지 질문하였다. 15명의 학생들은 모두 동의하지 않는다고 답하였다. 이미 이분모분수의 덧셈을 계산하는 방법을 학습한 학생들이므로 덧셈의 의미에 더욱 초점을 맞추도록 하기 위해서 직접 계산하지 않고 틀렸다는 것을 어떻게 알 수 있는지를 설명하도록 하였다. 은채는 자신이 학습한 내용을 바탕으로 '공통분모를 만들지 않았기 때문'이라고 이야기하였지만 이 상황에서 왜 공통분모를 만들어야 하는지에 대한 구체적인 설명은 하지 않았다. 이에 비해 정수는 "아무리 작은 수라도 기호가 없는 수를 더하면 그 값은 얘[$\frac{2}{3}$]보다 어쨌든 아무리 작은 수라도 조금은 더 클 거잖아요."라고 하면서 $\frac{2}{3}$에 $\frac{1}{4}$을 더하면 결과값은 $\frac{2}{3}$보다 커야 한다고 설명하였다. 은채가 절차적으로 설명한 것에 비해 정수는 덧셈 상황에 양적으로 접근하면서 $\frac{2}{3}$가 $\frac{3}{7}$보다 크기 때문에 재석이의 풀이 과정은 옳지 않다는 것을 설명하였다.

정수가 자신의 의견을 설명하는 동안 학생들은 정수의 의견을 이해했다는 듯한 표현을 하였다. 성규, 혜원, 민경이가 정수의 의견에 대해 자신이 이해한 내용을 설명하였는데 그 중 민경이는 "3개 중에 2개를 먹은 것보다 7개 중에 3개 먹은 게 더 적잖아요."라고 이야기하였다. 민경이는 $\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{7}$의 크기를 비교하기 위해서 이산량

상황으로 설명하였는데 이는 민경이가 이분모분수의 덧셈 상황을 이해하는 데 많은 방해요인이 되었다. 민경이가 제시한 상황은 $\frac{2}{3}$와 $\frac{3}{7}$의 전체 단위가 고정되어 있지 않은 것으로 이분모분수의 덧셈에서 적절하지 않다. 하지만 이 시점에서 민경이의 의견에 이의를 제기한 학생은 없었다.

학생들은 대부분 두 분수의 분모를 서로 더했기 때문에 재석이의 풀이 과정이 틀렸다고 설명하였는데 연구자가 학생들에게 왜 분모끼리 더하면 안 되는지에 대해 질문하자 혜원이는 “두 분수의 분모가 다른데 분모를 더하는 건 나올 수가 없고 자기 마음대로 구하면 안돼요.”라고 말하였다. 학생들이 여전히 절차적으로 설명하자 연구자는 학생들에게 왜 분수의 덧셈에서 분모끼리 더하면 안 되는지를 재차 질문하였고 이에 정수는 <에피소드 1>과 같이 자신의 생각을 설명하였다.

<에피소드 1> 이분모분수의 덧셈에서 분모끼리 더하면 안 되는 이유에 대한 정수의 설명

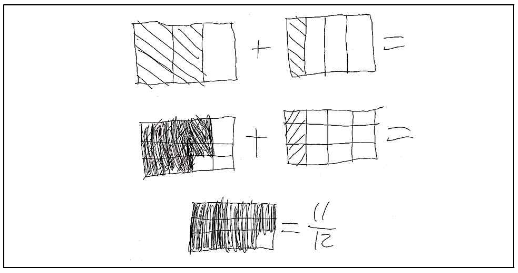
정수: 분모를 더했잖아요. 근데 여기서 분수의 덧셈에서 분모를 더하면 안돼요.

연구자: 왜?

정수: 왜냐하면 분모는 전체를 몇 개로 나누느냐를 알려주잖아요. 근데 이건[$\frac{1}{4}$] 4개로 나눈 거고 이건[$\frac{2}{3}$] 3개로 나눈 건데, 이거 두 개를 더한다고 해서 7개로 나눈다는 뜻이 되지는 않잖아요. 그리고 이렇게 분모가 다른 상태에서 분자를 더하게 되면 그렇게 되는 것도 의미가 없는 게 이거는 3개 중에 1개가 2개인 거고 이거는 4개 중에 1개가 1개인 거잖아요. 근데 그러면 이거는 3개로 나눈 것 중에 1개면 4개로 나눈 것 중에 1개랑 다른 데 그러면 이런 숫자로 나타내지 말고 다른 특수한 숫자가 필요할 것 같아요.

정수는 분모가 다른 상태에서 분자를 더하는 것이 이분모분수의 덧셈에서 의미가 없다는 것을 정확하게 설명하였다. 특히 이산량 상황에서 분수를 더하는 것이 어떤 의미인지를 구체적으로 설명하였다. 등분할 상황에서 분수의 분모가 나타내는 바는 전체를 똑같이 나누는 것이므로 전체가 서로 다르게 나뉜 상황에서 부분들을 더한다고 하여도 전체를 7등분하는 것은 아니기 때문에 옳지 않다고 하였다. 이는 나뉜 조각의 크기가 같아야 한다는 것을 의미하고 나뉜 조각의 크기를 같게 하기 위해서 통분이 필요하다는 것을 설명하기에 매우 유용하다. 이에 연구자는 학생들이 통분의 의미에 대해 어떻게 이해하고 있는지 알아보기 위한 질문으로 나아갔다.

연구자는 개별 활동 시간에 많은 학생들이 $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{4}$을 각각 그림으로 표현한 후에 옆에 $\frac{8}{12}$과 $\frac{3}{12}$을 표현한 그림을 다시 그리는 것을 보고 대표적으로 명진이의 반응을 선정하여 전체 논의를 이끌었다. 대부분의 학생들은 [그림 IV-2]의 명진이가 그린 표현처럼 $\frac{2}{3}$와 $\frac{8}{12}$을 따로 표현하였고 $\frac{2}{3}$와 $\frac{8}{12}$을 색칠한 모양을 서로 다르게 표현하였다. 학생들의 설명을 미루어보아 이러한 과정은 이미 알고 있는 이분모분수의 덧셈 계산 방법을 활용하여 식으로 먼저 통분을 한 후에 그림으로 나타냈기 때문인 것으로 보인다.



[그림 IV-2] $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{12}$에 대한 명진이의 표현

명진이가 칠판에 '$\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{8}{12}+\frac{3}{12}=\frac{11}{12}$'을 적고 [그림 IV-2]와 같이 그리자 혜원이는 명진이에게 왜 12로 통분하였는지를 질문하였다. <에피소드 2>는 이에 대한 학생들의 대화이다.

<에피소드 2> 통분을 하는 이유에 대한 학생들의 대화

혜원: 12등분 안 되어 있는데 왜 $\frac{2}{3}$랑 $\frac{1}{4}$을 공통분모 12로 통분을 해야 해? 통분을 왜 해야 해?

명진: $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{4}$을 더하려면 통분을 시켜야 하기 때문에…….

학생들: 그러니까 왜?

(명진이가 대답을 하지 못하고 머뭇거리자 연구자는 명진이에게 자신을 도와줄 친구를 찾아보라고 하였고 명진이는 예준이에게 도움을 요청한다.)

예준: 대충 감으로는 이쪽[$\frac{2}{3}$]이 크다는 것을 알 수 있는데 이게 정확히 더하려면 이거[$\frac{2}{3}$]랑 이거[$\frac{1}{4}$]랑 더하려고 하면 잘 모르겠으니까요.

연구자: 왜? 그럼 $\frac{8}{12}$이랑 $\frac{3}{12}$으로 바꾸면 정확하게 알 수 있어?

(예준이도 바로 대답을 하지 못하고 다시 명진이에게 도와달라고 한다.)

명진: 분수에서 덧셈은 분자끼리 더하는 것이 아니기 때문에 분모를 같게 만들어야지만 분모끼리 같아지니까 분자를 더해야 돼요.

(중략)

은채: 통분을 안 하면 잘못 계산되니까 통분을 해야 해요.

연구자: 통분을 안 하면 잘못 계산될까? …얘[$\frac{2}{3}$]랑 얘[$\frac{1}{4}$]를 덧셈이니까 그냥 이어 붙이면 되죠. 여기에 붙이면 어떤 값이 나오겠죠. 그때 잘못된 값이 나올까? 나오긴 나올까?

학생들: 나오긴 나와요.

연구자: 근데 왜 통분을 해야 하냐고?

(성규가 $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{4}$을 더하고 남은 부분을 정확하게 계산을 할 수 없으니까 통분을 해야 한다고 설명한다.)

혜원: … 이걸[$\frac{1}{4}$] 여기[$\frac{2}{3}$]에 갖다 붙여요. 그럼 얘는 그대로 $\frac{2}{3}$이고 얘는 $\frac{1}{4}$이예요. 이걸 더해야 하는데 이 상태로 더하려고 하면 이어 붙이면 맞긴 맞는데 정확하게 얼마인지 몰라요.

연구자: 왜 얼마인지 몰라?

혜원: 이걸 정확하게 나누면 이걸 나눈 수에 이만큼이니까 알 수 있어요 그게 통분인데 그런데 이 과정이 없어요. 그럼 어림해서 눈대중으로 알 수밖에 없고 이게 없으면 정확하게 알 수 없어요.

통분을 하는 이유에 대해서 명진이에게 질문하자 분수를 더하기 위해서는 통분을 해야 한다고 하였고 학생들은 다시 명진이에게 그 이유를 보다 명확하게 정당화하기를 요구하였다. 예준이가 정확한 값을 알 수 없기 때문이라고 설명하자 은채는 통분을 하지 않으면 잘못 계산이 된다고 하였다. 그 의미를 보다 명확하게 하기 위해 연구자는 통분을 하지 않고 더했을 때 잘못된 값이 나오는지에 대해 질문하였다. 여러 학생들의 발표를 듣고 혜원이는 자신의 생각을 정리하였는데 이는 <표 II-1>의 (b)와 유사하다. 즉, 단위가 서로 다른 두 양을 더했을 때 각각의 단위로는 합을 하나의 값으로 표현할 수 없다는 것을 설명하였다.

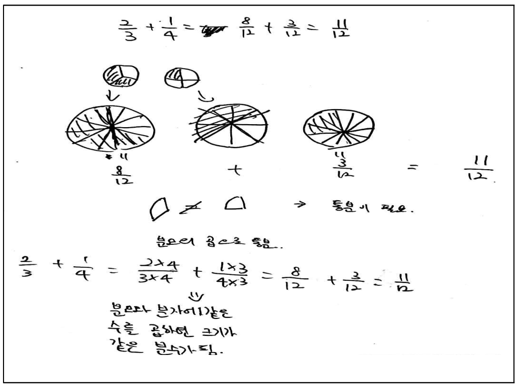
6차시 교수실험에서 나타난 학생들의 이해를 정리하면 다음과 같다. 첫째, 대부분의 학생들은 $\frac{2}{3}$m와 $\frac{1}{4}$m를 측정으로서의 분수로 정확하게 이해하고 있었지만 일부 학생들은 여전히 전체-부분으로서의 분수와 혼동하고 있었다. 1m를 기준으로 그 양이 어느 정도인지를 생각해보는 기회를 제공하자 학생들은 1보다 작은 양이라는 것에 동의하였다. 둘째, $\frac{2}{3}$m와 $\frac{1}{4}$m를 더한 값이 $\frac{3}{7}$

m가 아닌 이유를 덧셈의 의미와 연결하여 양적으로 접근하는 학생들이 있는 반면, 대부분의 학생들은 절차적으로 접근하였다. 특히, 이 과정에서 한 학생은 분수를 이산량의 상황으로만 이해하고 있다는 것이 나타나기도 하였다. 셋째, $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2+1}{3+4}=\frac{3}{7}$이 아닌 이유를 설명하는 과정에서 학생들은 분모끼리 더하면 안 된다는 의견에 동의하였지만 왜 분모끼리 더하면 안 되는지에 대해서는 매우 절차적으로 생각하는 경향을 보였다. 연구자가 지속적으로 질문을 하자 일부 학생들은 각각의 측정단위를 더욱 세분하는 공통분할의 필요성을 인식하게 되었다. 넷째, 학생들은 이분모분수의 덧셈결과를 식을 이용하여 구할 수 있었지만 식과 그림 표현을 연결하여 설명하는 것은 미흡하였다.

6차시에 대한 교수 실험 내용과 학생들의 학습지 분석 결과 7차시에서는 통분의 필요성에 대해 더욱 구체적으로 다루면서 분수를 이산량 상황으로만 이해하고 있는 학생의 의견을 제시하여 전체 단위의 고정성과 연결하고, 그림 표현을 통해 이분모 분수의 덧셈 계산 원리를 설명하는 것에 초점을 두었다.

2. 통분의 의미 및 필요성에 대한 학생들의 이해

7차시 교수실험은 통분을 하는 이유에 대하여 다시 질문하는 것으로 시작하였다. 민경이는 통분을 해야 하는 이유로 만약 $\frac{2}{3}-\frac{1}{4}$이라면 분모인 3에서 4를 뺄 수 없기 때문에 통분을 해야한다고 설명하였고 은채는 통분을 하지 않으면 복잡하게 계산이 되는데 통분을 하면 쉽게 계산할 수 있기 때문이라고 하였다. 연구자는 현지가 [그림 IV-3]과 같이 학습지에 통분을 하는 이유를 단위의 크기와 관련하여 제시하였기 때문에 전체 학생들에게 현지의 의견에 대해 생각해볼 기회를 제공하였다. <에피소드 3>은 현지의 의견에 대한 학생들의 반응이다.



[그림 IV-3] 통분을 하는 이유에 대한 현지의 설명

<에피소드 3> 두 번째 수준의 단위와 관련하여 통분을 하는 이유에 대한 학생들의 설명

연구자: 왜 이 상태로 더할 수 없지?

현지: $\frac{1}{3}$조각이랑 $\frac{1}{4}$조각의 크기가 다르니까 계산을 했을 때 그러면 얘네 둘의 크기를 똑같이 만들어서 계산을 해야지 얘[더한 결과]의 크기를 알 수 있어요.

연구자: 왜 조각의 크기를 똑같이 해야지 계산할 수 있을까? 조각의 크기가 같으면 왜 할 수 있지?

혜원: 현지가 $\frac{1}{3}$조각이랑 $\frac{1}{4}$조각이 다르다고 했잖아요. 근데 이게 달라도 더하면 이 정도잖아요. 이걸 알기 위해 통분을 하고, 다르기 때문에 통분을 하는 거예요.

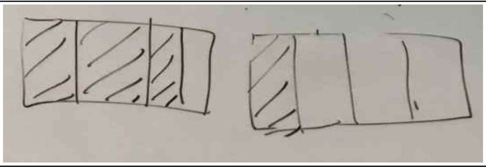
연구자: 다르면 왜 통분을 하냐고?

혜원: 분모가 같으면 이 조각 중에서 뺄 수 있어요.

연구자: 왜 뺄 수 있지? 분모가 같으면?

혜원: (직사각형 두 개를 그리고 각각 $\frac{1}{3}$씩 표현하면서) $\frac{1}{3}$하고 $\frac{1}{3}$을 더하면 이 조각과 이 조각의 크기가 같으니까 (오른쪽 직사각형의 $\frac{1}{3}$만큼 왼쪽 직사각형에 추가로 색칠하면서) 이 조각 그대로 색칠한 것을

여기로 옮기면 분모가 같으면 통분을 안 해도 할 수 있어요. 그런데 조각이 다르면 $\frac{1}{4}$이면 (오른쪽 직사각형을 다시 지우고 $\frac{1}{4}$만큼을 표현하면서) 이건데, 이거[$\frac{1}{3}$]랑 이거[$\frac{1}{4}$]랑 달라요. 이게 더 작아요. 이거를 여기에 붙이면([그림 IV-4]와 같이 왼쪽에 $\frac{2}{3}$만큼 표현한 직사각형에 $\frac{1}{4}$을 추가하여 색칠하면서) 이 정도인데 이게 $\frac{3}{3}$도 아니고 $\frac{2}{3}$도 아니잖아요. 그 사이인데 이거를 어떻게 표현할 지 지금 알 수 없어요.

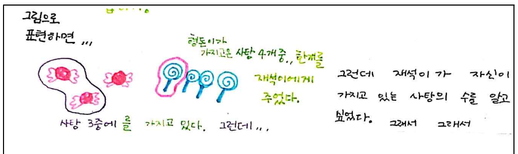


[그림 IV-4] 통분을 하는 이유에 대한 혜원이의 설명

현지는 학습지에 두 번째 수준의 단위인 $\frac{1}{3}$과 $\frac{1}{4}$의 크기를 각각 그리고 단위의 크기가 서로 같지 않기 때문에 통분을 한다고 표현하였다. 이를 바탕으로 현지는 전체 논의 시간에 각 조각의 크기가 같아야 계산할 수 있다는 것을 강조하였다. 현지의 의견을 듣고 혜원이는 조각의 크기가 같으면 그 양이 얼마인지 단위가 같기 때문에 셀 수 있지만 조각의 기본 단위가 다르면 그 양은 $\frac{3}{3}$으로도, $\frac{2}{3}$로도 표현할 수 있는 양이 아니라는 것을 정확하게 설명하였다.

학생들의 의견을 듣고 성규가 나와서 파이(π)의 값을 예로 들면서 '약'으로 나타낼 경우 정확한 값을 알 수 없으므로 정확한 값을 알아내기 위해서 통분을 한다고 설명하였다. 이에 학생들에게 통분을 다른 말로 뭐라고 하면 좋을지 질문하자 학생들은 "더 정확한 값을 알기 위해서 더 작게 쪼개는 것"이라고 이야기하였다. 이러한 논의를 통해 학생들은 각 조각이 일정하게 나눠어 있지 않기 때문에 이 상태에서 더한 값을 계산할 수 없다는 것에 동의하였다.

다음으로 연구자는 전체 단위의 고정성과 관련하여 학생들에게 생각할 기회를 제공하기 위해 민경이의 그림을 소개하였다([그림 IV-5] 참고). 민경이는 $\frac{2}{3}$를 나타내기 위해서 사탕 3개 중에 2개를 동그라미로 묶었고, $\frac{1}{4}$을 나타내기 위해서 다른 종류의 사탕 4개 중에 1개를 묶었다. 그리고 "재석이가 사탕 3개 중에 2개를 가지고 있고 형돈이가 가지고 온 사탕 4개 중 한 개를 재석이에게 주었다"라고 상황을 제시하였다. 민경이의 그림이 $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{4}$에 대한 표현으로 적합한지를 묻자 학생들은 맞다고 답하였다. 연구자는 이러한 표현이 이분모분수의 덧셈 상황과 연결했을 때에도 올바른지 생각해보도록 하였다. 학생들에게 잠시 생각할 시간을 제공한 후에 학생들의 의견을 묻자 10명의 학생들은 '옳지 않다'고 하였고, 5명의 학생들은 '잘 모르겠다'고 답하였다. <에피소드 4>는 민경이의 그림에 대한 학생들의 반응이다.



[그림 IV-5] $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$의 상황을 표현한 민경이의 그림

<에피소드 4> 이산량 상황에 대한 학생들의 반응

예준: $\frac{2}{3}$는 이렇게 3개 중에 2개로 할 수도 있지만 ([그림 IV-6]의 (a)와 같이 그리면서) 3개로 나눈 것 중에 2개도 될 수 있어요.

유석: 3개로 나눠? 작은 걸 어떻게 나눠?
(작은 사탕 하나를 3개로 나눈다는 예준이의 의견에 학생들은 양이 매우 작다고 이야기 하며 웃는다.)

연구자: 그림 여기서 $\frac{2}{3}$ 더하기 ([그림 Ⅳ-6]의 (b)와 같이 예준이가 그린 그림에 다른 종류의 사탕을 4등분한 것 중에 하나를 색칠하면서) $\frac{1}{4}$을 하면 맞냐 이거야.

혜원: 선생님 그럼 이 두 개가 크기가 같아요?

연구자: 아니 다른 종류의 사탕이야.

예준: 이거는 크기가 다르면 분수가 다르니까, 이만큼 남은 거에다가 이만한 것을 더하면 당연히 안 맞잖아요. 그니까 같은 단위로, 같은 크기로 4개로 한 것 중에 하나를 해야 된다고 생각해요.

유석: 사탕이 종류가, 크기가 다르기 때문에 예준이 말대로 크기가 다르니까 (각 조각만 떼어서 따로 그리면서) 이거를 더해도 똑같지가 않으니까 안돼요. 같은 게 아니라 다른 종류니까요.

연구자: (위의 상황을 가리키며) 그러면 이거는 돼, 안 돼?

유석: 이거는 사탕 하나가 이거의 크기가 다르고 또 다른 크기가 있으니까 이 사탕 두 개의 크기가 다르니까…….

연구자: 근데 얘들아. 이거[예준이가 그린 사탕]는 $\frac{2}{3}$ 맞고 이건[교사가 그린 사탕] $\frac{1}{4}$ 맞잖아. 근데 왜 여기선 안 돼?

유석: 단위가 다르니까…….

연구자: 어떤 단위?

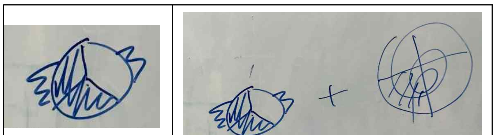
학생들: 크기!

연구자: 어떤 크기?

학생들: 사탕의 크기!

연구자: 아! (사탕 하나를 가리키며) 그러면 얘의 크기가 다르기 때문이야?

학생들: 네.



(a) $\frac{2}{3}$에 대한 예준이의 그림

(b) 연구자가 예준이의 그림에 $\frac{1}{4}$을 추가한 그림

[그림 Ⅳ-6] $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$의 상황에 대한 예준이와 연구자의 그림

민경이가 제시한 사탕 상황은 학생들에게 많은 논의거리를 제공하였다. 예준이는 사탕 3개 중에 2개가 아니라 사탕 하나를 3등분하여 2만큼 색칠하였다. 이에 연구자는 다른 종류의 사탕 하나를 4등분하여 1만큼 색칠하였고 이 상황이 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$을 표현하는 데 적합한지 생각해보게 하였다. 혜원이가 사탕의 크기가 같은지 질문한 것은 전체 단위의 고정성을 이해하는 데 매우 중요한 과정이었다. 연구자는 민경이의 그림과 비교하면서 두 사탕이 서로 다른 종류라고 이야기하였다. 그러자 대부분의 학생들은 예준이의 그림에서 단위인 사탕 하나의 크기가 서로 다르기 때문에 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ 상황에 적합하지 않다고 하였다.

예준이의 그림에서는 사탕 하나의 크기가 같아지면 이분모분수 덧셈의 올바른 상황이 될 수 있지만 민경이의 그림에서는 사탕 하나의 크기가 같아진다고 하더라도 이분모분수의 덧셈 상황이라고 볼 수 없다. 연구자는 학생들이 이에 대해 어떻게 이해하고 있는지 알아보기 위해 보다 구체적으로 질문을 하였다. 민경이가 제시한 상황에서 재석이의 사탕과 형돈이의 사탕 각각의 크기가 같다면 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ 상황이라고 할 수 있는지 생각해보도록 하였다. 민경이는 자신의 생각을 수정하였고 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$을 이렇게 표현하는 것이 억지인 것 같다고 이야기하였다. 학생들이 민경이에게 뭐가 틀린 것인지 질문하였지만 대답하지 못하였고 다른 학생들이 논의를 이어 나갔다. <에피소드 5>는 이에 대한 학생들의 반응이다.

<에피소드 5> 전체 단위의 고정성에 대한 학생들의 반응

명진: 이거[재석이가 가지고 있는 사탕의 개수] 3개랑 이거[형돈이가 가지고 있는 사탕의 개수] 4개니까 총 7개 중에서 3개니까 $\frac{3}{7}$이 되는데 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$은 $\frac{11}{12}$이기 때문에 아니에요.

연구자: 재석이 방법이랑 똑같지. 이런 상황이면 만약에 이런 상황에서 더하면 $\frac{3}{7}$이 나와야 된대.

혜원: 3개 중에 2개예요. 이거는 4개 중에 하나란 말이에요. 이건 3이잖아요. (사탕 하나를 가리키며) 이건 나눠진 게 아니기 때문에 온전한 한 개 잖아요. 그래서 이거는 $\frac{2}{3}$로 표현할 수 있지만 이걸 더하면 3[재석이와 형돈이의 사탕을 더한 개수]이 돼요. 얘도 $\frac{1}{4}$이 될 수 있지만 하나잖아요. 나눠지지 않은 하나니까 그래서 $\frac{11}{12}$이랑 3은 전혀 다르기 때문에 이 계산 방법은 맞지 않아요.

정수: 이게 사탕 종류가 지금 같잖아요. 근데 여기서 더하려면 전체가 똑같아야 돼요. 전체 양이.

연구자: 아까 단위가 똑같아야 된다고 했었지. 그때 단위가 뭐를 의미하는 거야?

정수: 그때의 단위는 이 한 조각[사탕 한 개]이 아닌데……. 그러면 (각각의 사탕을 가리키며) 이거 조각이 같잖아요. 근데 이쪽에는 이 똑같은 조각이 3개가 전체고 근데 이쪽에서는 4개가 전체잖아요. 그러니까 이거는 전체가 다르니까 이렇게 더한다고 볼 수 없어요.

성규: $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{4}$은 진분수잖아요. 사탕을 이렇게 쪼갠다고 하고 이렇게 계산하면 한 개가 안 나옵니다. 이거는 3개가 되는데 이거 [$\frac{11}{12}$]는 1이 아니니까…….

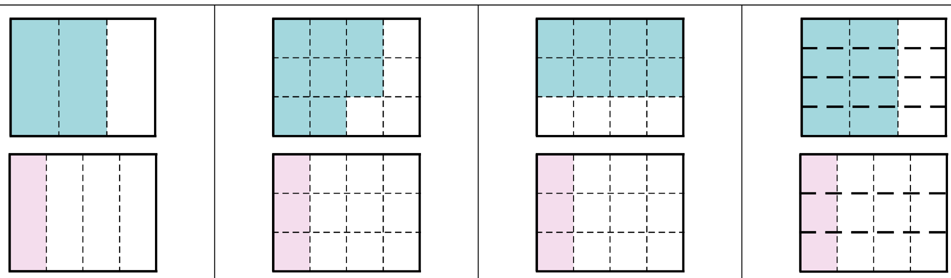
유석: 이게 모양하고 크기하고 다 똑같은데 이게 몇 개가 한 묶음인지가 안 드러나기 때문에 이게 3개가 한 묶음이라면 이거 [사탕 4개를 가리키며]는 $1\frac{1}{3}$이 되는 거고 그러면 어떤 게 한 묶음이고 그게 몇 개인지 모르기 때문에 이거는 이렇게 더할 수 없어요.

대부분의 학생들은 이 논의 과정에서 전체 단위가 고정되어야 한다는 의견에 동의하였다. 이산량으로 단순하게 표현하였을 때 3개 중에 2개를 나타내는 $\frac{2}{3}$와 4개 중에 1개를 나타내는 $\frac{1}{4}$을 더하면 7개 중에 3개가 되므로 $\frac{3}{7}$이 된다고 이야기하면서 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$ 상황과 다르다는 것을 이야기하였다. 혜원이가 민경이의 상황은 더해서 사탕 3개가 된 상황이라고 이야기하자 많은 학생들이 손을 들며 자신도 이해했다는 행동을 보였다. 학생들은 분수의 덧셈에서 각 분수의 전체 크기가 같아야 한다고 설명하였다. 정수는 분수의 덧셈을 하기 위해서는 “전체 양”이 똑같아야 한다고 이야기하였고 전체가 다른 경우에는 분수의 덧셈과 같이 더한다고 볼 수 없다고 이야기하였다. 유석이는 “묶음”이라는 말을 사용하여 묶음의 크기가 서로 같아야 함을 지적하였다.

7차시 교수실험에서 나타난 학생들의 이해를 정리하면 다음과 같다. 첫째, 대부분의 학생들은 통분을 하는 이유를 절차적으로 설명하였지만, 일부 학생들은 두 번째 수준의 단위에 초점을 두고 두 번째 수준의 단위의 크기가 다르기 때문에 새로운 단위가 필요하다는 것을 이해하였다. 전체 논의를 통해 학생들은 두 분수를 더한 양을 더욱 정확하게 측정하기 위해서 새로운 단위가 필요하고 그러한 과정이 통분이라는 것을 이해할 수 있었다. 둘째, 한 학생은 상황을 그림으로 나타내는 과정에서 이분모분수의 덧셈을 이산량 상황으로 표현하였는데 이 학생의 의견에 대한 전체 논의를 통해 학생들은 이분모분수의 덧셈에서 두 분수의 첫 번째 수준의 단위의 크기가 같아야 한다는 것에 동의하였다.

7차시에 대한 교수 실험 분석을 통해 8차시에서는 통분 과정과 그림 표현을 연결하면서 이분모 분수의 덧셈 알고리즘을 설명하는 것에 초점을 두었다.

3. 이분모분수의 덧셈 알고리즘에 대한 학생들의 이해



(a) $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{4}$ 각각의 표현 | (b) 통분 과정에 대한 명진이의 그림 | (c) 통분 과정에 대한 민경이의 그림 | (d) 통분 과정에 대한 혜원이의 그림

[그림 IV-7] $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{4}$을 통분하는 과정에 대한 학생들의 그림

8차시는 6차시에서 다루었던 명진이의 그림으로 시작하였다([그림 IV-7]의 (a), (b) 참고). 연구자는 학생들에게 명진이의 표현에 대한 의견을 제시하도록 하였고 자신이 한 방법과 어떤 점이 비슷하고 어떤 점이 다른지 설명하도록 하였다. 혜원이가 들이 모델로 자신의 생각을 설명한 이후에 민경이가 자신의 의견을 설명하였다. 민경이는 명진이의 그림 표현이 잘못되었다고 이야기하면서 맞는 방법으로 표현해보겠다고 하였다. 민경이는 칠판으로 나와 [그림 IV-7]의 (c)와 같이 $\frac{2}{3}$이면서 $\frac{8}{12}$임을 한 눈에 알 수 있는 그림을 그렸다.

연구자는 학생들에게 명진이와 민경이의 그림이 어떤 차이가 있는지 설명해보도록 하였다. 명진이는 민경이의 그림은 가로가 4개, 세로가 3개인데 4개씩 한 묶음으로 하였을 때 그 중에서 2묶음을 색칠한 것이고 본인은 통분을 해서 $\frac{8}{12}$로 나타내었다고 이야기하였다. 민경이는 명진이의 그림을 보고 “이렇게 나눠진 거는 똑같은데 그 안에서도 달라요.”라고 말하면서 분할된 모양은 본인의 그림과 같지만 통분하는 과정에서 색칠한 모양이 바뀌었다고 이야기하면서 이러한 표현 때문에 명진이의 의견이 잘 이해가 되지 않는다고 하였다. 정수는 어차피 나타내는 양이 12개 중에 8개이니까 색칠한 방법만 다르지 두 표현 모두 $\frac{8}{12}$이 맞다고 이야기 하였다. 이에 연구자는 통분하는 과정과 그 과정이 드러나는 식이 잘 나타나는 그림은 무엇인지 학생들에게 질문하였다. <에피소드 6>은 이에 대한 학생들의 반응이다.

<에피소드 6> 이분모분수의 덧셈 과정을 나타낸 다양한 그림에 대한 학생들의 반응

혜원: 제가 민경이가 이렇게 한 게 이해가 가는 게요. 여기 이렇게 했잖아요. 바로 통분을 해서 이게[명진이의 그림] 나오기는 쉽지가 않잖아요.

연구자: 왜 쉽지 않지?

혜원: 이게 바로 4개로 나누려면 다시 지우고 또 해야 되잖아요. 이거[민경이가 $\frac{8}{12}$을 표현한 그림]는 그냥 이거[처음 $\frac{2}{3}$ 그림]를 돌려서 4개로 나눈 거라고…….

연구자: 칠판에다 그려 봐.

혜원: ([그림 IV-7]의 (d)와 같이 원래 있던 $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{4}$의 그림에 다른 색깔의 보드마카로 선을 그으면서) 이거는 이렇게 돌린 거예요. 이렇게 나눈 거죠. 근데 이것도[명진이의 그림] 틀렸다는 건 아닌데 이게 8개 잖아요. 이것도 8개는 맞아요. 왜냐하면 여기 2개가 이 쪽으로 가든 이 쪽으로 가든 상관이 없잖아요. 그런데 민경이가 한 게

의도를 알 수 있어요.

연구자: 뭘 알기에 더 좋을까?

혜원: 처음 아는 사람들에게 좋아요. 왜냐하면 분수를 처음 본 사람이 알기에는 이게[민경이의 그림] 좀 더 쉬운 것 같은데 이것[명진이의 그림]도 틀린 것은 아니에요.

연구자: 왜 바로 알 수 있지?

정수: 이게 처음 보는 사람은 이게 모양이 다르니까 헷갈릴 수 있잖아요. 근데 처음 보는 사람은 지금 모양이 같으니까 헷갈리지 않을 것 같아요.

혜원이는 명진이의 그림보다 민경이의 그림이 의도를 더 잘 알 수 있다고 설명하였다. 혜원이는 처음에 $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{4}$로 제시된 직사각형 그림([그림 IV-7]의 (a))을 각각 재분할하였고 민경이의 그림의 $\frac{8}{12}$은 원래의 직사각형을 돌린 것과 같다고 이야기하였다. 물론 엄밀히 보면 민경이의 그림이 원래 있던 $\frac{2}{3}$의 그림 자체를 돌린 것이라고 보기는 어렵다. 직사각형의 가로와 세로의 길이가 서로 다르기 때문이다. 그러나 학생들은 $\frac{2}{3}$이면서 $\frac{8}{12}$인 양을 표현하기에 민경이의 그림이 더욱 이해하기 쉽다는 것에 동의하였다.

다음으로 이러한 분할 과정을 이분모분수의 덧셈 알고리즘과 연결할 수 있는지를 살펴보기 위해서 연구자는 칠판에 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2\times4}{3\times4}+\frac{1\times3}{4\times3}=\frac{11}{12}$이라고 쓰면서 3×4, 2×4, 4×3, 1×3이 그림에서 각각 어떻게 드러나는지 생각해보도록 하였다. 여러 친구들이 나와서 자신의 의견을 발표한 후에 혜원이는 명진이와 민경이가 그린 직사각형 그림의 각 조각을 동그라미로 표현하면서 4개씩 3줄이 있으므로 4×3이고 3개씩 4줄이 있으므로 3×4를 찾을 수 있다고 하였다. <에피소드 7>은 이분모분수의 덧셈 알고리즘에 대한 학생들의 반응이다.

<에피소드 7> 이분모분수의 덧셈 알고리즘에 대한 학생들의 반응

(혜원이가 명진이의 그림에서 직사각형 조각 하나를 동그라미로 표현하면서 동그라미 4개를 한 줄로 그리고 밑에 3줄을 그리면서 4×3에 대해 설명한다.)

연구자: 그럼 얘들아 3×4가 저기에서 어떻게 나타나지?

혜원: (명진이가 그린 직사각형 그림에서 윗 줄을 동그라미 치면서) 이거를 한 줄이라고 쳐요. 이게 묶음이에요. 4개잖아요. 여기 3개가 있어요. 4개가 3줄 있다. 그러면 4×3, 3×4가 돼요.

연구자: 그럼 2×4는 어떻게 나타나? 그 그림에서?

혜원: 여기에서요? 이거는…….

(중략)

정수: 여기 저는 이게([그림 IV-7]의 (d)를 가리키며) 제일 맞는 것 같아요. 이거를 다시 나누면 ($\frac{1}{4}$을 표현한 처음 그림에 가로로 2줄을 쳐서 12칸으로 나누면서) 이렇게 되죠. 크기는 같지만 크기는 눈으로 보기에 다르지만 일단 한 조각이 이거랑 같아요.

학생들: 왜?

정수: 지금 전체가 1이고 얘는 둘 다 똑같이 12개로 나눴으니까 이거 한 조각의 크기는 같아요. 그러니까 3×4가 여기서 어떻게 나타났냐면 ($\frac{2}{3}$가 표현된 직사각형의 가로에 3을 쓰고 세로에 4를 쓰면서) 여기가 3이고 여기가 4니까 전체가 3×4는 12가 되잖아요. 저기 ($\frac{1}{4}$이 표현된 직사각형의 가로에 4를 쓰고 세로에 3을 쓰면서) 4×3은 여기 위[가로]에가 4고 밑[세로]에가 3이니까 전체가 4×3으로 12개가 나왔어요. 그리고 여기서 2×4는 여기[가로 2칸]가 2고 여기[세로 4칸]가 4니까 2×4 해서 8칸이 나왔어요. 저기 3×1도 여기[가로 1칸]가 1이고 여기[세로 3칸]가 3이니까 3칸이 나왔고 이걸 더할 때는 (각 조각을 가리키며) 얘랑 얘랑 이제 같으니까 얘를 여기로 옮겨 와가지고 이렇게 해주면 $\frac{11}{12}$이 나오는 것을 알 수 있어요.

혜원이는 명진이의 그림을 이용하여 직사각형의 각각의 조각을 동그라미로 표현하면서 4개씩 3줄이 있기 때문에 4×3이라는 것을 설명하였다. 연구자가 3×4는 어떻게 찾을 수 있냐고 질문하자 곱셈의 교환법칙을 예로 들면서 4×3은 3×4와 같다고 이야기하였다. 반면에 정수는 혜원이의 그림을 이용하여 가로가 3이고 세로가 4인 직사각형의 넓이로 3×4를 설명하였다. 이때 정수는 혜원이가 그린 그림에서 두 직사각형의 각 조각의 크기가 눈으로 보았을 때에는 서로 다르지만 같은 크기의 직사각형을 모두 12로 나눈 것 중 하나의 크기이므로 두 직사각형의 조각이 크기가 같다는 것을 정확하게 설명하였다. 그러나 정수의 설명은 학생들이 아직 배우지 않은 직사각형의 넓이를 구하는 과정으로 3×4를 표현하였다는 한계가 있다. 연구자는 학생들이 현재 배운 내용을 이용하여 재분할 과정과 이분모분수의 덧셈의 계산 원리를 연결하도록 돕기 위해서 정수가 학습지에 표현한 그림에 대해 전체 논의를 하도록 하였다. <에피소드 8>은 이에 대한 학생들의 반응이다.

<에피소드 8> 재분할 과정과 이분모분수의 덧셈 알고리즘에 대한 학생들의 반응

연구자: 이제 정수의 그림은 다른 친구들하고 어떻게 다르고 저 원리는 어떻게 드러나는지 한 번 보세요.

정수: ([그림 IV-8]과 같이 두 개의 직사각형을 그리고 보기에 똑같아 보이지 않지만 똑같은 전체라고 강조하면서) 여기에 똑같은 전체가 있어요. 그리고 얘[왼쪽 직사각형]는 3개로 나눠서 $\frac{2}{3}$고 얘[오른쪽 직사각형]는 $\frac{1}{4}$이예요. 그리고 여기[4등분된 직사각형] 곱하기 3을 하면 ($\frac{1}{4}$ 각각의 조각을 3등분하면서) 한 조각의 분모가 3개씩으로 나눠어요.

연구자: 왜 한 조각을 3개씩 나눕니까? 굳이?

정수: 그래야 분모를 12로 통분할 수 있어요.

연구자: 왜 우리가 분모를 12로 통분합니까? 굳이?

정수: 왜냐하면 12가 4와 3의 공배수이기 때문에 공통분모로 나타낼 때는 분수의 공배수로 해야 하잖아요.

연구자: 왜 두 분모의 공배수로 통분해야 합니까?

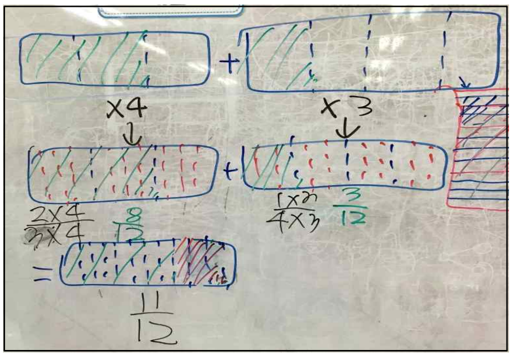
정수: 왜냐하면 공배수가 아니면 분모가 다르게 되니까요.

연구자: 분모가 다르면 왜 안 되지?

현지: 한 조각이 똑같아야지 더할 수 있으니까요.

연구자: 조각의 크기를 똑같이 만들려고 통분을 하는 거지.

정수: 그래서요. 분모를 똑같이 해서 아까 양을 똑같이 해서 파란색이 원래 있던 선이고 빨간색은 새로 나눈 선이에요. 그래서 얘[4등분된 직사각형]는 아까 $\frac{1}{4}$만큼 있어서 12개 중에 3조각이니까 $\frac{3}{12}$으로 나타낼 수 있고 얘는 방금한 것처럼 똑같고 12개 중에 4개가 있으니까 $\frac{4}{12}$로 나타낼 수 있어서 이걸 여기에 갖다 붙이면 12개 중에 11개이니까 $\frac{11}{12}$입니다.



[그림 IV-8] $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$에 대한 정수의 그림

정수는 $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{4}$을 칠판에 그리면서 두 분수의 전체 크기가 똑같아야 한다는 것을 강조하였다. 왼쪽 직사각형은 3등분한 후 2만큼 빗금을 쳤고, 오른쪽 직사각형은 4등분한 후 1만큼 빗금을 쳐

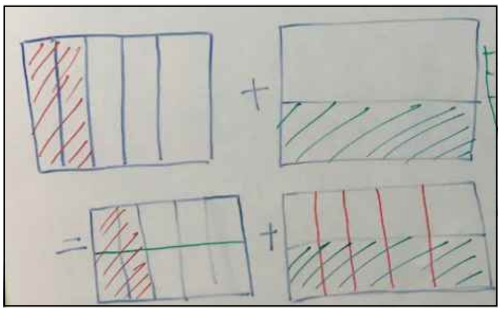
다. 그리고 조각의 크기를 똑같게 만들기 위하여 다른 색깔의 펜을 이용하여 두 번째 수준의 단위를 다른 분수의 분모만큼 각각 재분할하였다. 구체적으로 각각의 $\frac{1}{4}$을 차례대로 3등분하여 전체를 12조각으로 나누었고, 이때 원래 빗금표시 되어 있던 $\frac{1}{4}$은 이제 $\frac{3}{12}$이 된다는 것을 설명하였다. 정수는 직사각형 아래에 '×3'이라는 표현을 썼지만 이분모분수의 덧셈에서 $\frac{1\times3}{4\times3}$이 되는 과정을 구체적으로 설명하지는 않았다.

8차시 교수실험에서 나타난 학생들의 이해를 정리하면 다음과 같다. 첫째, 학생들에게 이분모분수의 덧셈 과정을 그림으로 나타내도록 하였을 때 학생들의 반응은 매우 다양하게 나타났다. 대부분의 학생들은 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$을 수식으로 계산한 다음 또 다른 직사각형을 이용하여 $\frac{8}{12}$과 $\frac{3}{12}$을 나타냈지만 일부 학생들은 원래 있던 그림을 이용하여 $\frac{2}{3}$이면서 $\frac{8}{12}$인 상황을 제시하였다. 학생들에게 서로의 의견을 비교해보도록 하자 학생들은 색칠한 부분이 변하지 않고 그대로 있을 경우에 $\frac{2}{3}$가 $\frac{8}{12}$로 바뀌는 과정이 잘 나타난다는 것에 동의하였다. 둘째, 학생들에게 자신의 그림과 이분모분수의 덧셈 알고리즘을 연결해보도록 하자 학생들은 묶음, 직사각형의 넓이, 재분할 등을 이용하여 다양하게 설명하였다. 특히 한 학생은 재분할 방법을 색깔이 다른 펜을 이용하여 표현하여 전체 학생들이 이분모분수의 덧셈 알고리즘을 시각적으로 확인할 수 있도록 도왔다.

그러나 이분모분수의 덧셈 알고리즘에 대해 학생들이 어떻게 이해하고 있는지를 알아보기 위해서는 더욱 구체적인 논의가 필요하므로 9차시 수업의 초점은 새로운 상황에서 이분모 분수의 덧셈 계산 원리를 설명하는 것에 두었다.

4. 새로운 상황에 적용 및 발전

9차시에는 새로운 이분모분수의 덧셈인 $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}$을 제시하였고 $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{2\times2}{5\times2}+\frac{1\times5}{2\times5}=\frac{4}{10}+\frac{5}{10}=\frac{9}{10}$의 계산 원리를 다양한 그림으로 표현하고 그림과 계산 원리를 연결하여 설명해보도록 하였다. 학생들은 10분 남짓 개별적으로 생각해보는 시간을 가진 후에 서로의 생각을 논의하였다. 혜원이는 [그림 IV-9]와 같이 크기가 똑같은 직사각형 두 개를 그리고 하나는 가로로 5등분, 다른 하나는 세로로 2등분하였다. 그런 다음 5등분 중에 2조각을 빨간색으로 색칠하고, 2등분 중에 1조각을 파란색으로 색칠하였다. 혜원이가 여기까지 칠판에 제시하자 연구자는 지금 혜원이가 얼마를 색칠하고 있는지 학생들에게 질문하였다. 학생들은 각각 $\frac{2}{5}$와 $\frac{1}{2}$을 나타내고 있다고 답하였다. 혜원이는 다른 색깔의 펜을 이용하여 5등분한 직사각형을 가로로 2등분하고, 2등분한 직사각형을 세로로 5등분 하였다. 연구자는 이 그림에서 이분모분수의 덧셈 알고리즘이 어떻게 나타나는지 질문하였다. <에피소드 9>는 이에 대한 혜원이의 설명이다.



[그림 IV-9] $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}$에 대한 혜원이의 그림

<에피소드 9> $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}$의 분할과 알고리즘에 대한 혜원이의 설명

혜원: 이게 $\frac{2}{5}$이고, 이게 $\frac{1}{2}$이예요. 이게 만약 가로로 되어 있으면 이거를 바꿔야 하니

까 세로로 해서 다시 등분을 나누면 $\frac{2}{5}$가 $\frac{4}{10}$가 돼요. 그리고 다시 등분으로 나누면 $\frac{5}{10}$가 되니까…….

연구자: 그럼 질문! $\frac{2\times2}{5\times2}$는 어떻게 나타났어?

혜원: 5×2는요. 이 선이 2개로 나뉘어져서 5조각이 2배가 된다고 해서 5×2고…….

연구자: (학생들을 바라보며) 5조각이 2배가 되는 것이 보여요?

학생들: 네.

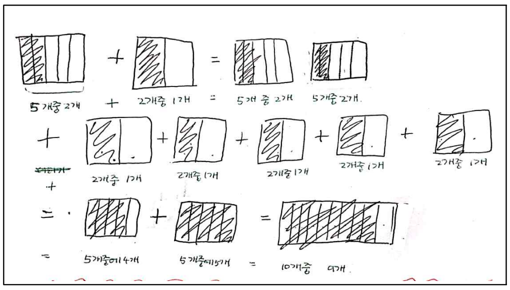
혜원: (2×2가 나오는 과정을 설명하기 위해 색칠된 부분을 가리키며) 여기서 2 조각이 었잖아요. 근데 다시 2조각으로 나눠서 2조각이 다시 2로 갈라져서 4가 돼요.

연구자: 그럼 여기서 $\frac{1\times5}{2\times5}$는 어때요?

혜원: 여기는 2였고 똑같이 5개로 나누면 한 조각이 5조각으로 나뉘어져서 2 곱하기 5니까 10조각이 되고 이 1조각은 한 개잖아요 한 개를 5개로 나누면 이거니까요.

혜원이는 분할된 조각이 재분할되는 과정을 설명하면서 이분모분수의 알고리즘과 매우 명확하게 연결하였다. $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=\frac{2\times2}{5\times2}+\frac{1\times5}{2\times5}=\frac{4}{10}+\frac{5}{10}=\frac{9}{10}$에서 $\frac{2}{5}$를 구성하는 두 번째 수준의 단위를 재분할하여 세 번째 수준의 단위를 만들자 5등분되어 있던 것이 각각 2등분되고 색칠된 2조각도 2등분되었으므로 $\frac{2\times2}{5\times2}$임을 설명하였다. $\frac{1\times5}{2\times5}$ 역시 이와 같은 재분할 과정으로 설명하였고 이제 세 번째 수준의 단위가 같으므로 두 분수의 합을 구할 수 있다고 하였다.

혜원이의 의견에 대한 논의가 끝난 후 민경이가 자신의 생각을 발표하였다. 민경이는 6차시에서부터 분수를 이산량 상황으로만 생각하는 경향을 보였다. 이번에는 그림 [IV-10]과 같이 직사각형 모델을 사용하여 연속량 상황을 고려한 것처럼 보이지만 여전히 분수를 "몇 개 중의 몇 개"로 여기는 데에는 변화가 없다는 것을 알 수 있다. <에피소드 10>은 이에 대한 민경이의 설명이다.



[그림 IV-10] $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}$에 대한 민경이의 그림

<에피소드 10> $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}$의 분할과 알고리즘에 대한 민경이의 설명

민경: 이거[전체를 5등분하고 2조각을 색칠한 직사각형]는 5개 중에 2개를 색칠한 거고 이것[전체를 2등분하고 1조각을 색칠한 직사각형]도 2개 중에 1개를 색칠한 거예요. 이게 $\frac{2}{5}$이고 이게 $\frac{1}{2}$인데 이거는 곱했을 때 5개가 2개가 되어야지 5×2인데 그거는 10이잖아요. 근데 그거는 이게 2개 있다는 거예요. 그럼 이거는 $\frac{2}{5}$가 2개 있다는 거구요. 이것도 $\frac{1}{2}$이 5개 있는 거예요. 그래서 ($\frac{2}{5}$를 두 번) 더하면 $\frac{4}{5}$가 되구요. 이게[각각의 $\frac{1}{2}$] 5개이니까 색칠한 거 5개 해서 더해서 이렇게[마지막에 있는 $\frac{9}{10}$를 나타내는 직사각형] 됐어요.

연구자: 민경이에게 질문?

혜원: $\frac{1}{2}$을 칠한 상태로 더했잖아요. 그럼 다섯개 더하면 $2\frac{1}{2}$인데…….

학생들: 아…….

민경: 그러니까 이거 5개 중에서 4개를 칠한 거고 위에는 5개 중에서 2개를 색칠한 거고, 근데 애[분모 5]랑 애[분모 2]랑 곱하게 되면 2개[$\frac{1}{2}$]가 5개가 될 거기 때문에 이거는 5개[$\frac{1}{5}$]가 2개 있는 거를 표현한 게 이거야.

유석: (결과값인 $\frac{9}{10}$ 표현을 가리키면서) 여기서 이 두 개를 더했을 때에는 $1\frac{4}{5}$라고 표현해도 되는데…….
연구자: 왜? 이 표현이 1은 어디서 나와?
유석: 1은 여기[$\frac{4}{5}$를 나타낸 것에서 직사각형 전체] 자체가 1이요.
민경: 이게 이렇게 갈라져서 그런가?

민경이는 $\frac{2}{5}$를 표현하기 위해 5개 중에 2개를 색칠한 직사각형을 나타냈고 $\frac{1}{2}$을 나타내기 위해 2개 중에 1개를 색칠한 직사각형을 나타냈다. 통분을 하기 위해서 두 분수의 분모를 곱해야 한다고 하였고 $\frac{2}{5}$에 2를 곱해야 하기 때문에 $\frac{2}{5}$가 2개 있어야 한다고 하면서 각각의 $\frac{2}{5}$를 더한 값을 전체 5개 중에서 4개를 색칠한 $\frac{4}{5}$로 표현하였다. 또한 $\frac{1}{2}$에 5를 곱해야 하기 때문에 $\frac{1}{2}$을 5번 더하였고 각각의 $\frac{1}{2}$을 모아서 전체 직사각형 하나를 만들었다. 그리고 통분한 값을 더하기 위해서 두 직사각형을 이어 붙였고 전체가 10등분된 것 중에서 9개가 색칠되어 있기 때문에 합은 $\frac{9}{10}$라고 하였다. 민경이의 발표가 끝나자 학생들은 혼란스러워 하였다. 민경이는 분수의 덧셈에서 통분하는 과정을 분수의 곱셈으로 설명하였고 각각의 양을 더하기 위해 전체의 크기를 이어 붙이는 여러 가지의 오류를 범하였다. 혜원이는 $\frac{1}{2}$을 다섯 번 더하면 $2\frac{1}{2}$이 된다고 지적하였고 유석이 또한 전체가 변하는 것에 주목하면서 민경이가 구한 $\frac{9}{10}$는 원래 직사각형 크기를 1로 하면 $1\frac{4}{5}$가 된다고 지적하였다. 잠시 생각을 정리하는 시간을 가진 후에 다시 민경이의 의견에 대한 논의를 이어나갔다. <에피소드 11>은 이에 대한 학생들의 반응이다.

<에피소드 11> 민경이의 풀이 과정에 대한 학생들의 반응

현지: 이거를 그냥 더하기로 풀면 더하는 거니까 붙인다고 표현한다면 더하기를 표현하면 안 되지.
성규: (민경이의 표현과는 다르게 각각 $\frac{2}{5}$가 표현된 두 직사각형 전체를 이어 붙이면서) $\frac{2}{5}$를 이거를 여기에다 붙인다면 이거를 여기다 가져오고 (10개 중에 4개를 색칠하면서) $\frac{4}{10}$를 만들고 여기에서 각각 이거를 다 $\frac{1}{2}$이라고 생각할 수 있지만 이거는 (각각 $\frac{1}{2}$이 표현된 다섯 개의 직사각형 전체를 이어 붙이면서) 다 하면 $\frac{5}{10}$가 돼요.
혜원: 이걸 두 개 붙인다고 했잖아요. 만약에 이어붙이면 이거를 똑같이 그려서 붙이는 거예요. 근데 원래 전체가 이만큼[처음 직사각형의 크기]이었잖아요 근데 이거를 두 개 붙이면 아예 전체가 바뀌어 버리기 때문에 전체의 크기가 달라져요.
유석: 보충! 붙이면 이게 아니라 $\frac{4}{10}$가 나와야 하는데 이거는 전체를 더한 건데 이거는 그냥 분자만 붙인거니까…….
연구자: 그럼 이거는 $\frac{9}{10}$ 맞아?
유석: 그건 잘 모르겠는데. 확실히 틀렸어요.
(중략)
예준: 이어붙인다면 이게 비어있는 칸이 이어져서…….
연구자: 그렇게 하면 $\frac{4}{10}$가 맞을까?
예준: 맞지 않아요? 비어있는 칸이 10칸이고 $\frac{4}{10}$!
연구자: 선생님 말은 $\frac{2}{5}$를 통분한 $\frac{4}{10}$가 맞냐는 거야.
수정: (성규의 설명을 가리키며) 이거와 이거를 이어 붙이는 거잖아요. 그리고 이거는 혜원이가 했는데 혜원이는 여기에 칸을 만들었잖아요. 그래서 얘는 이어 붙였으니까 아니고…….
연구자: 왜 아니야?
수정: 전체 크기가 달라져요.

연구자: 전체 크기가 달라지면 왜 안 되지?

현지: 전체가 달라지면 덧셈을 못할 것 같아요. 전체가 달라지면 얘[성규가 설명한 전체 직사각형이 늘어난 $\frac{4}{10}$]는 그냥 $\frac{2}{5}$가 아닌 거잖아요. 재[처음 직사각형의 $\frac{2}{5}$]랑 같은 크기의 $\frac{2}{5}$가 아니잖아요.

혜원: (이전에 사탕을 가지고 설명하면서) 전체 크기가 달라서 안 된다고 이야기 했잖아요. 이것도 마찬가지예요. 이거[성규의 $\frac{4}{10}$]랑 이거[원래 $\frac{2}{5}$]랑 달라요. 여기서 $\frac{2}{5}$는 이거[성규의 $\frac{4}{10}$]랑, 여기는 이거[원래 $\frac{2}{5}$]예요. 이게 이거[원래 $\frac{2}{5}$]랑 다르니까 같은 $\frac{2}{5}$가 아니니까 할 수가 없어요.

성규는 민경이의 그림 표현을 수정하여 $\frac{2}{5}$ 두 개를 이어붙인다면 색칠된 부분만 더하는 것이 아니라 전체 직사각형 두 개를 이어붙여야 한다고 이야기하였다. 즉 $\frac{2}{5}$를 표현한 각각의 직사각형 두 개를 이어붙이면 전체의 크기가 2배가 되고 10등분된 것 중에서 4조각이 색칠되어 있기 때문에 $\frac{4}{10}$가 되고 $\frac{1}{2}$도 이와 같은 방법으로 더하면 $\frac{5}{10}$가 된다고 하였다. 반면에 혜원이는 두 직사각형을 이어 붙일 경우에 전체의 크기가 달라진다는 것을 지적하였다. 연구자는 두 학생의 의견을 바탕으로 다른 학생들은 어떻게 생각하는지 질문하였다. 예준이가 성규의 의견에 동의하자 연구자는 덧셈에서 $\frac{2}{5}$를 통분하여 나온 $\frac{4}{10}$가 맞을지 생각해보도록 하였다. 수정이와 현지는 혜원이가 이야기한 전체의 크기가 달라지는 상황과 관련하여 전체의 크기가 달라지면 덧셈을 할 수 없다고 이야기하였다. 마지막으로 혜원이는 이전에 민경이의 사탕 상황과 관련하여 전체의 크기가 다를 경우 이분모분수의 덧셈이 아니라는 것을 다시 한 번 강조하였다.

9차시 교수실험에서 나타난 학생들의 이해를 정리하면 다음과 같다. 첫째, 일부 학생들은 재분할과정을 통해 이분모분수의 덧셈 알고리즘을 비교적 정확하게 설명할 수 있었다. 또한 통분을 하는 과정에서 처음에 제시된 분수 양과 세 번째 수준의 단위로 분할된 분수 양이 변하지 않은 상태에서 이분모분수의 덧셈 과정을 나타내었다. 그러나 일부 학생들은 여전히 이분모분수의 덧셈에서 전체 단위가 변하지 않아야한다는 사실을 정확하게 인지하지 못하고 있었다. 특히 분수를 자연수의 쌍("몇 개 중의 몇 개")으로 여기는 경우에는 이러한 오류가 더욱 뚜렷하게 나타났다.

학생들의 다양한 그림 표현에 대해 이야기를 나누는 과정에서 전체 단위의 고정성에 대하여 다시 논의가 일어났지만 이분모분수의 덧셈 알고리즘과 연결에 대한 논의는 상대적으로 적었다. 따라서 연구자는 10차시 검사지 문항에 이분모분수의 덧셈 알고리즘을 그림으로 표현해보도록 하였다.

10차시 검사지에서 일부 학생들은 6차시와 다른 반응을 보였다. 10차시 검사지에서 나타난 변화를 이분모분수 덧셈의 핵심 아이디어와 연결하여 요약하면 다음과 같다. 첫째, 전체 단위의 고정성과 관련하여 이분모분수의 덧셈 상황에서 세 가지 양의 전체 단위를 똑같게 그린 학생들은 6차시에 7명이었지만 10차시에서 10명으로 늘어났다. 특히 6차시에는 전체 단위가 고정되어 있다고 하더라도 [그림 IV-2]와 같이 $\frac{2}{3}$와 $\frac{8}{12}$을 서로 다른 양으로 구분하여 제시한 경우가 많았는데 10차시에는 [그림 IV-9]와 같이 하나의 대상을 다시 재분할하여 제시한 경우가 많아졌다. 둘째, 통분의 필요성과 관련하여 6차시에는 대부분 분모의 수치적인 특성이 서로 다르기 때문에 같게 해주어야 한다고 설명한 학생들이 대부분인 반면에 10차시에는 [그림 IV-11]과 같이 두

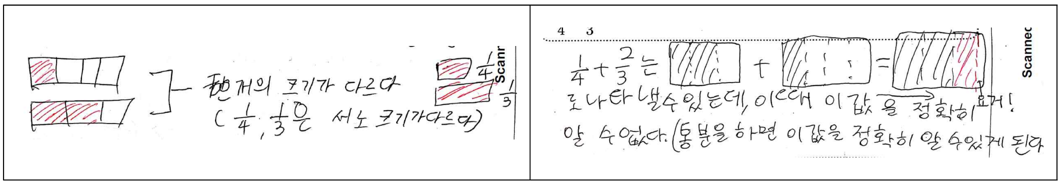
번째 수준의 단위의 크기와 연결하여 현재의 단위로는 합을 하나의 분수로 나타낼 수 없다는 것을 설명한 학생들이 많았다(2명→7명). 셋째, 재귀적 분할 및 이분모분수의 덧셈 알고리즘과 관련하여 6차시에는 수식으로 설명하거나 수식을 그림으로 표현한 학생들이 대부분이었는데 10차시에는 [그림 IV-12]와 같이 재분할 및 재귀적 분할을 통해 분수 나눗셈의 알고리즘을 설명한 학생들이 늘어났다(2명→8명).

IV. 결론 및 논의

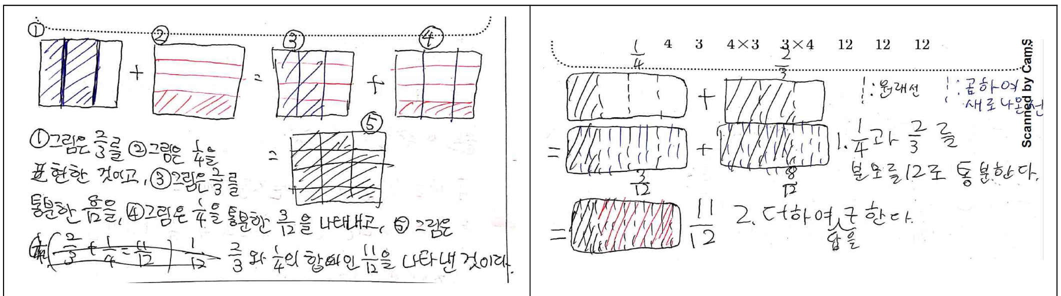
본 연구는 현행 교과서로 이분모분수의 덧셈 계산 원리를 학습한 학생들이 이분모분수의 덧셈의 의미와 알고리즘을 어떻게 이해하고 있는지를 탐색하였다. 또한 양적인 상황에서 자신의 생각을 구체화하는 과정에서 이분모분수의 덧셈에 대한 이해가 어떻게 발달해 나가는지를 살펴보았다. 본 연구의 결과를 이지영과 방정숙(2016)이 제시한 이분모분수의 덧셈에 관한 핵심 아이디어와 관련하여 정리하면 다음과 같다.

첫째, 전체 단위의 고정성과 관련하여 일부 학생들은 분수를 '몇 개 중의 몇 개'인 자연수의 쌍으로 여기고 이분모분수의 덧셈에서 두 분수의 전체 단위를 서로 다르게 표현한 경우가 있었다. 특히 민경이와 같은 경우는 분수를 자연수의 쌍으로만 여기는 경향으로 인해 이분모분수의 덧셈 상황에서 다양한 오류를 범하였다. 예를 들어, 민경이는 이분모분수의 덧셈을 그림으로 나타낼 때 [그림 IV-10]과 같이 분수 양을 서로 더한 것이 아니라 전체 직사각형을 서로 이어 붙였다. 이 과정에서 이분모분수의 덧셈에서 전체 단위가 고정되어야 한다는 것을 이해하는 데 어려움이 있었다. 이러한 사례는 Izsák 외(2008)의 연구에서 분수를 자연수의 쌍으로 생각하는 학생이 이분모분수의 덧셈에서 겪은 어려움을 보고한 것과 일맥상통하다.

그러나 일부 학생들은 이분모분수의 덧셈 상황에 양적으로 접근함으로써 전체 단위가 같아



[그림 IV-11] 두 번째 수준의 단위와 관련하여 통분의 필요성을 설명한 학생들의 반응



(a) 직사각형 모델 (b) 막대 모델

[그림 IV-12] 재분할 및 재귀적 분할로 $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$를 설명한 학생들의 반응

야지만 덧셈의 의미가 있다는 것을 이해하였다. 구체적으로 <에피소드 4, 5>에서 이 학생들은 민경이가 제시한 사탕 상황에서 이분모분수의 덧셈을 하기 위해서 '전체 양'이 똑같아야 된다고 이야기하거나 '묶음'의 크기가 서로 같아야 함을 설명할 수 있었다. 이 결과는 이분모분수의 덧셈에서 전체 단위의 고정성을 이해하기 위해서 양적인 접근이 얼마나 중요한지를 드러낸다. 김미영과 백석윤(2010), 이지영(2009)과 같은 연구에서 이분모분수의 덧셈과 관련된 오류의 대부분은 전체 단위의 고정성을 고려하지 않은 것에 기인하였음을 알 수 있다. 따라서 이분모분수의 덧셈을 개념적으로 이해하기 위해서는 $\frac{2}{3}$와 $\frac{1}{4}$이 의미하는 것과 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$이 의미하는 것이 무엇인지를 파악하는 것이 선행되어야 하고 양적 추론 과정에서 세 가지 양의 전체 단위가 모두 같아야 함을 명시적으로 지도할 필요가 있다.

둘째, 통분의 필요성과 관련하여 대부분의 학생들은 두 분수의 분모의 수치적 특성에 초점을 두었다. 이는 2009 개정 교과서에서 지도하고 있는 방법과 유사하다. 2009 개정 교과서 및 지도서에서는 통분의 필요성을 구체적으로 제시하지 않고 "분모가 다른 분수는 어떻게 더하지?"에 대한 질문으로 시작하여 바로 수치적으로 통분을 하도록 한다(교육부, 2015, p. 238).

그러나 이분모분수의 상황을 그림으로 표현하고 이 때 나타나는 두 번째 수준의 단위에 집중하게 하자 학생들은 <에피소드 3>과 같이 현재의 단위로는 두 분수의 합을 하나의 분수로 표현할 수 없으므로 새로운 수준의 단위가 필요하다는 것을 구체적으로 설명할 수 있었다. 이 결과는 이분모분수의 덧셈에서 각각의 분수를 양으로 표현하는 과정에서 세 가지 수준의 단위 구조를 경험하는 것이 이분모분수의 덧셈에서 통분의 필요성을 이해하는 것과 연결된다는 것을 보여준다(Izsák et al., 2008; Steffe, 2003; Steffe & Olive, 2010). 따라서 이분모분수의 덧셈에서 학생들은 두 분수의 양적인 구조가 상황에 따라 더욱 복잡해진다는 것을 이해하고 세 번째 수준의 단위를 찾는 과정 자체가 통분이라는 것을 이해하도록 지도할 필요가 있다.

셋째, 재귀적 분할 및 이분모분수의 덧셈 알고리즘과 관련하여 대부분의 학생들은 자신이 사용한 분할 과정과 이분모분수의 덧셈 알고리즘을 서로 연결하기 보다는 이분모분수의 덧셈을 수치적으로 계산한 후에 그 결과를 그림으로 표현하였다. 그러나 <에피소드 6>, [그림 IV-7]과 같이 학생들은 다양한 반응을 서로 비교하면서 $\frac{2}{3}$이면서 동시에 $\frac{8}{12}$을 나타내는 방법을 이해하였고([그림 IV-7]의 (d) 참고), 그 과정에서 이분모분수의 덧셈 알고리즘인 $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}=\frac{2\times4}{3\times4}+\frac{1\times3}{4\times3}=\frac{11}{12}$을 설명할 수 있었다. 특히, [그림 IV-8]과 같이 재귀적 분할을 통해 이분모분수의 덧셈 알고리즘을 개념적으로 이해할 수 있는 가능성까지 엿볼 수 있었다. 물론 재귀적 분할은 세 가지 수준의 단위에 대한 내면화가 이루어져야 하므로 (Steffe & Olive, 2010), 초등학교 학생들에게 어려울 수 있지만 분할의 방법적인 측면과 연결하면 이해 가능할 것으로 여겨진다.

위 결과는 모델의 분할 과정과 이분모분수의 덧셈 알고리즘을 유기적으로 연결하는 것이 이분모분수의 덧셈 알고리즘을 이해하는 데 기초가 된다는 것을 드러낸다. 따라서 재귀적 분할을 통해 세 번째 수준의 단위를 찾고 분할 과정을 식으로 나타냄으로써 이분모분수의 덧셈 알고리즘을 도출하도록 지도할 필요가 있다.

한편 검사지에서 일부 학생들은 여전히 이분모분수 덧셈의 의미나 알고리즘에 대해 약간의 오류를 보였다. 몇 차시의 교수실험으로 모든 학생들이 이분모분수의 덧셈을 개념적으로 이해하기에는 어려움이 있다. 그러나 이러한 학생들도 이분모분수의 덧셈 상황에 양적으로 접근하면서

적절한 단위를 찾고자 노력하고 이분모분수 덧셈 계산 원리를 양적으로 설명하고자 노력하는 모습을 볼 수 있었다.

본 논문은 양적인 상황에서 학생들이 이분모분수 덧셈의 핵심 아이디어에 대해 어떻게 이해하고 있는지를 구체적으로 탐색하였다. 양적인 상황에서 각 분수가 의미하는 양은 복잡한 단위 구조를 이루고 학생들은 여러 단위 중에서 두 분수를 더한 양을 측정하기에 적절한 단위를 찾을 수 있어야 한다. 또한 분할을 통해 적절한 단위를 찾는 과정은 이분모분수 덧셈 알고리즘과 연결되어야 한다. 절차적인 접근에서 이러한 아이디어는 명시적으로 드러나지 않거나 간과되기 쉬우므로 양적인 상황에서 각각의 핵심 아이디어를 명시적으로 다룰 필요가 있다. 이를 통해 학생들이 이분모분수의 덧셈의 의미 및 알고리즘을 보다 개념적으로 이해하는 데 도움이 되기를 기대한다.

참고문헌

교육부 (2015). **교사용 지도서 수학 5-1**. 서울: 천재교육.

김미영, 백석윤 (2010). 분수의 덧셈, 뺄셈에서 나타나는 인지적 장애 현상 분석. **한국초등수학교육학회지, 14**(2), 241-262.

변희현 (2009). 측정의 관점에서 본 덧·뺄셈의 통합적 이해. **수학교육학연구, 19**(2), 307-319.

이지영 (2009). **초기 대수(Early Algebra)적 관점에 따른 초등학교 6학년 학생들의 분수 연산 감각 분석**. 한국교원대학교 석사학위논문.

이지영, 방정숙 (2016). 이분모분수의 덧셈과 뺄셈 교육 재고: 단위 추론 및 재귀적 분할을 중심으로. **학교수학, 18**(3), 625-645.

Izsák, A., Tillema, E., & Tunç-Pekkan, Z. (2008). Teaching and learning fraction addition on number lines. *Journal for Research in Mathematics education, 39*(1), 33-62.

Schwartz, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (Vol. 2, pp. 41-52). Reston, VA: Erlbaum.

Steffe, L. P. (2003). Fractional commensurate, composition, and adding schemes learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5. *Journal of Mathematical Behavior, 22*, 237-295.

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 129-162.

Steffe, L. P. & Olive, J. (2010). *Children's fractional knowledge*. New York: Springer.

Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Fifth Grade Students' Understanding on the Big Ideas Related to Addition of Fractions with Different Denominators

Lee, Jiyoung (Paldal Elementary School)
Pang, JeongSuk (Korea National University of Education)

The purpose of this study is to explore in detail 5th grade students' understanding on the big ideas related to addition of fraction with different denominators: fixed whole unit, necessity of common measure, and recursive partitioning connected to algorithms. We conducted teaching experiments on 15 fifth grade students who had learned about addition of fractions with different denominators using the current textbook. Most students approached to the big ideas related to addition of fractions in a procedural way. However, some students were able to conceptually understand the interpretations and algorithms of fraction addition by quantitatively thinking about the context and focusing on the structures of units. Building on these results, this study is expected to suggest specific implications on instruction methods for addition of fractions with different denominators.

* Key Words : The big ideas related to addition of fractions with different denominators(이분모분수 덧셈의 핵심 아이디어), Recursive partitioning(재귀적 분할)

논문접수 : 2016. 11. 17
논문수정 : 2016. 12. 12
심사완료 : 2016. 12. 17