

## 원관 내의 디스크를 지나는 축대칭 스톱스 유동

정 재 택\*

전남대학교 기계공학부

### AXISYMMETRIC STOKES FLOW PAST A DISK IN A CIRCULAR TUBE

Jae-Tack Jeong\*

School of Mechanical Engineering, Chonnam National Univ.

*A two-dimensional Stokes flow past a circular disk in a circular tube is analyzed. The circular disk is located coaxially with the circular tube and the Hagen-Poiseuille flow exists at upstream and downstream far from the circular disk. The Stokes approximation is used and the flow is investigated analytically by using the method of eigenfunction expansion and the method of least square. From the analysis, the stream function and the pressure of the flow field are obtained, and the streamlines and pressure distribution are shown. Also, the pressure and shear stress distributions on the circular disk and circular tube wall are calculated, and shown for some typical radii of the circular disk. The additional pressure drop induced by the disk and the drag force exerted on the disk are compared as functions of the radius of the circular disk, and it is shown that the shear force on the wall of the tube increases due to the disk.*

**Key Words :** 축대칭 유동(Axisymmetric flow), 디스크(Disk), 항력(Drag Force), 고유함수(Eigenfunction), 하겐-포아제 유동(Hagen-Poiseuille Flow), 압력 강하(Pressure Drop), 스톱스 유동(Stokes flow)

### 1. 서 론

원관 내에 장애물이 설치된 유동은 밸브, 열교환기, 마이크로 유체소자, 혈류유동 등 다양한 분야에서 폭넓게 응용되는 유동의 형태이다. 이러한 유동은 원관 내의 장애물의 형상과 레이놀즈 수 등의 영향에 의해 다양한 유동의 특성 변화가 있으므로 개발 연구에 선행하여 유동을 예측하여야 한다. 그러므로, 최근까지도 원관 내의 다양한 장애물에 대해 장애물의 크기나 형상 그리고 레이놀즈 수의 변화 등에 따른 유동의 특성을 파악하는 연구가 꾸준히 진행되고 있다[1-3].

Wang and Skalak[4]은 모세혈관 내의 적혈구 유동과 관련하여 원관 내에 구형 입자의 열(列)이 있는 경우에 대한 스톱스 유동(Stokes flow)을 주기성을 갖는 고유함수 전개(eigenfunction expansion)와 특이함수(singular function)들로 유동

함수를 구성하여 유동장을 해석하였다. Wang[5]은 원관의 중심축을 따라 등간격의 디스크의 열이 움직일 때의 스톱스 유동을 고유함수 전개와 점배열(point collocation) 방법을 적용하여 해석하였는데, 원관 벽면의 경계조건을 완전히는 만족하지 않는 고유함수가 선택되었다.

Shail and Norton[6]은 적분방정식을 사용하여 원관 축을 따라 움직이는 하나의 작은 디스크에 의한 축대칭유동을 디스크의 반경에 따라 해석하였고, Ui et al.[7]은 디스크의 두께가 힘에 미치는 영향을 측정하였으며, 레이놀즈 수에 따른 유동의 변화에 대하여 Pulley et al.[8]은 실험적으로, Nitin and Chhabra[9]는 수치적으로 고찰하였다.

한편, 대응하는 2차원 유동에 대하여 Yoon and Jeong[10,11]은 채널 중앙에 수직평판 또는 원형실린더가 놓여있는 스톱스 유동장에 대하여 유동특성을 해석하였으며, Dvinsky and Popel[12,13]은 채널 내의 원형 실린더 주위의 스톱스 유동을 좌표변환과 수치해석적인 방법으로 고찰하였다.

본 연구에서는, Fig. 1과 같이 원관의 중심축에 수직으로 놓인 원형 디스크를 지나는 스톱스 유동의 특성을 이론적으로 해석하고자 한다.

Received: August 22, 2016, Revised: October 27, 2016,

Accepted: October 28, 2016.

\* E-mail: jtjeong@chonnam.ac.kr

DOI http://dx.doi.org/10.6112/kscfe.2016.21.4.096

© KSCFE 2016

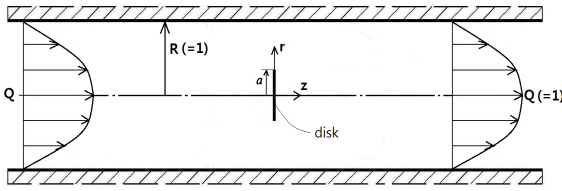


Fig. 1 Geometry of the incompressible axisymmetric flow in a circular tube

2. 연구 모델

Fig. 1과 같이, 직경  $D(=2R)$  인 원관 내에 임의의 반경  $a(0 < a < R)$  인 얇은 디스크가 원관의 중심축에 놓여있고 디스크로부터 멀리 떨어진 곳에서는 평균속도  $U$ (유량  $Q = \pi R^2 U$ )인 하겐-포아제 유동(Hagen-Poiseuille flow)으로 되는 비압축성 축대칭 유동에 대하여 고찰한다. 여기서, 원관 내 디스크의 두께는 매우 얇고 유체의 물성치는 일정하며,  $Re_D \equiv (UD)/\nu$  ( $\nu$  : 동점성계수)로 정의되는 유동의 레이놀즈 수는 매우 작다고 가정한다.

3. 유동장 해석

3.1 지배방정식 및 경계조건

Fig. 1과 같은 축대칭 원통좌표계  $(r, z)$ 를 취하는데, 해석의 편의상 원관의 반경  $R$ 로 유동장을 무차원화는 것이 좋다. 이를 위해서  $R=1$ 로 놓는다. 따라서 원관의 벽면은  $r=1, -\infty < z < \infty$  이고 디스크는  $0 \leq r \leq a, z=0$  에 해당된다. 관성의 효과가 점성의 효과에 비해 충분히 작은 경우 ( $Re_D \ll 1$ ) 스톡스의 근사에 의하여 Navier-Stokes 방정식 내의 관성항은 무시된다. 축대칭 원통좌표계  $(r, z)$ 에서 연속 방정식과 스톡스 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \left( \nabla^2 u_r - \frac{u_r}{r^2} \right), \tag{2a}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \nabla^2 u_z. \tag{2b}$$

축대칭 유동에서는  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  이다. 여기서, 비압축성 축대칭 유동에 대한 유동함수  $\Psi(r, z)$ 를 도입하

면 속도( $u_r, u_z$ )는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \tag{3}$$

식 (3)에 의해 연속방정식 (1)은 자동으로 만족되며 식 (2a), (2b)에서 압력  $p$ 를 소거하면 유동함수  $\Psi$ 에 대한 다음의 편미분방정식이 유도된다[14].

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi = 0. \tag{4}$$

축대칭 스톡스 유동의 좌우 대칭성을 고려하고 유동장의 좌우 중압면( $z=0$ )에서의 압력을 기준압력 0으로 놓으면 다음과 같은 관계식이 성립한다.

$$\Psi(r, z) = \Psi(r, -z), \tag{5}$$

$$p(r, z) = -p(r, -z). \tag{6}$$

따라서 Fig. 1에서  $0 \leq r \leq 1, z \geq 0$ 의 영역만 고려하면 충분하다. 식 (4)를 만족하는 유동함수  $\Psi$ 에 대한 속도 점착 경계조건은 다음과 같다.

$$\Psi(1, z) = \frac{Q}{2\pi}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial r}(1, z) = 0, \quad \text{for } 0 \leq z < \infty, \tag{7a}$$

$$\Psi(r, 0) = \frac{\partial \Psi}{\partial z}(r, 0) = 0, \quad \text{for } 0 \leq r \leq a. \tag{7b}$$

또한,  $z=0$ 을 중심으로 좌우 대칭을 고려하면,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z}(r, 0) = p(r, 0) = 0, \quad \text{for } a \leq r \leq 1, \tag{7c}$$

$$\Psi(r, z) \rightarrow \frac{Q}{2\pi} (2r^2 - r^4), \quad \text{as } z \rightarrow \infty. \tag{7d}$$

3.2 유동함수 및 압력분포 계산

Fig. 1과 같은 형상의 유동장 영역에서, 지배방정식 (4)를 만족하는 유동함수  $\Psi(r, z)$ 를 구하기 위하여  $\Psi(r, z)$ 를 다음과 같은 식 (8)의 형태로 놓을 수 있다.

$$\Psi(r, z) = \frac{Q}{2\pi} (2r^2 - r^4) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n F_n(r) e^{-\alpha_n z} \tag{8}$$

여기서, 우변의 첫째 항  $\frac{Q}{2\pi}(2r^2 - r^4)$  은 원판 내의 하겐-포아제 유동(유량  $Q$ )을 나타낸다.

유동함수  $\Psi(r, z)$ 에 관한 식 (8)을 지배방정식 (4)에 대입하면,  $F_n(r)$ 은

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} + \alpha_n^2 \right) F_n(r) = 0 \tag{9}$$

을 만족해야 한다. 여기서, 유동함수  $\Psi(r, z)$ 와 마찬가지로  $F_n(r)$ 이  $r=0$ 에서 특이성을 갖지 않는다는 점을 고려하고 원판 벽면에서의 점착 경계조건식 (7a)를 완전히 만족시키는 고유함수  $F_n(r)$ 을 구하면 다음과 같다[15].

$$F_n(r) = rJ_0(\alpha_n)J_1(\alpha_n r) - r^2J_1(\alpha_n)J_0(\alpha_n r) \tag{10}$$

여기서,  $J$ 는 제1종 Bessel 함수[16]이고, 고유값  $\alpha_n$ 은

$$J_0(\alpha)J_2(\alpha) - J_1(\alpha)^2 = 0 \tag{11}$$

의 복소수 근이다.  $\alpha_n$ 이 큰 일 때,  $-\alpha_n, \overline{\alpha_n}, -\overline{\alpha_n}$ 도 각각 근이 된다.

식 (10)을 유동함수식 (8)에 대입하고 경계조건 (7d)를 고려하면  $\alpha_n$ 의 실수부는 양(+)이어야 하고, 유동함수식 (8)은 실험수가 되어야 하므로, 유동함수  $\Psi(r, z)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\Psi(r, z) = \frac{Q}{2\pi}(2r^2 - r^4) + 2Re \sum_{n=1}^{\infty} C_n \begin{Bmatrix} rJ_0(\alpha_n)J_1(\alpha_n r) \\ -r^2J_1(\alpha_n)J_0(\alpha_n r) \end{Bmatrix} e^{-\alpha_n z} \tag{12}$$

여기서,  $C_n (n=1, 2, 3 \dots)$ 은 나중에 구하게 될 미지의 복소상수이며,  $\alpha_n (n=1, 2, 3 \dots)$ 은 식 (11)의 1상한 내의 복소수 근으로서 원점에서 가까운 순서대로  $n$ 번째의 근이다.  $n \gg 1$  일 때  $\alpha_n$ 의 점근거동은 다음과 같다.

$$\alpha_n \rightarrow \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{i}{2} \ln(4n\pi) \tag{13}$$

참고로, 몇 개의  $\alpha_n$  값을 Table 1에 나타내었다.

유동함수  $\Psi(r, z)$ 에 관한 표현식 (12)와 식 (3)으로부터 유

동의 속도  $u_r, u_z$ 를 구할 수 있으며, 이를 식 (2)에 대입하면 압력분포  $p(r, z)$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$p(r, z) = -\frac{8Q}{\pi}z + K - 4\mu Re \sum_{n=1}^{\infty} C_n \alpha_n J_1(\alpha_n) J_0(\alpha_n r) e^{-\alpha_n z} \tag{14}$$

위 식 (14)의 우변 첫 번째 항은 원판 내의 포아제(Poiseuille) 유동에서의 선형적인 압력 강하를 나타내며,  $K$ 는 적분상수로서 디스크에 의해 부가되는 압력 변화를 나타낸다.

주어진 유량  $Q$ 에 대하여, 미지수  $C_n (n=1, 2, 3 \dots)$ 과 적분상수  $K$ 를 구하기 위해서는, 식 (12)와 (14)에 있는 무한급수 항을 유한한  $n=N$  항까지 절단(truncation)하고 경계조건식 (7b)와 (7c)를 적용한다. 수치계산을 위해 디스크 표면 ( $z=0, 0 \leq r \leq a$ )과 유동이 통과하는 중앙면( $z=0, a < r \leq 1$ )에서 총  $M$ 개의 점들을 취하여 경계조건 (7b)와 (7c)를 각각 적용하면,  $(2N+1)$ 개의 미지수  $[C_n, \overline{C_n} (n=1, 2, 3 \dots N)]$ 와 상수  $K$ 에 대한  $2M$ 개의 선형 연립방정식이 얻어진다.

이때, 충분히 큰  $M$ 과  $N$ 에 대하여 방정식의 개수( $2M$ )를 미지수의 개수( $2N+1$ )보다 크게 취하여 얻은 선형 연립방정식에 대하여 오차의 최소제곱법(method of least square)을 사용하면, 더 안정적으로 미지수  $C_n (n=1, 2, 3 \dots N)$ 과  $K$ 를 구할 수 있다. MATLAB을 사용한 실제 계산에서는  $M \cong 200, N \cong 150$ 이면 충분하였다.

이와 같이 구한  $C_n (n=1, 2, 3 \dots N)$ 과 상수  $K$  값을 식 (12)와 (14)에 대입하면 유동함수  $\Psi(r, z)$ 와 압력 분포  $p(r, z)$ 를 구할 수 있으며 본 유동의 유동특성을 모두 해석할 수 있다. 참고로 디스크 반지름  $a=0.5$  일 때,  $M=200, N=150$ 으로 놓고 계산한 결과  $K=-4.8619$ 이며 몇 개의  $C_n$  값을 Table 1에 나열하였다.

Table 1 The complex roots  $\alpha_n$  of Eq. (11) and constants  $C_n$  determined for  $a=0.5$

$n$	$\alpha_n$	$C_n$
1	4.4663+1.4675 <i>i</i>	-0.2700+0.4577 <i>i</i>
2	7.6941+1.7270 <i>i</i>	-0.1426+0.0562 <i>i</i>
3	10.8746+1.8949 <i>i</i>	0.0741-0.1564 <i>i</i>
4	14.0389+2.0201 <i>i</i>	0.0987-0.0319 <i>i</i>
5	17.1956+2.1199 <i>i</i>	-0.0402+0.1023 <i>i</i>
6	20.3480+2.2031 <i>i</i>	-0.0771+0.0212 <i>i</i>
7	23.4977+2.2744 <i>i</i>	0.0271-0.0786 <i>i</i>
8	26.6457+2.3368 <i>i</i>	0.0641-0.0153 <i>i</i>
9	29.7925+2.3922 <i>i</i>	-0.0204+0.0650 <i>i</i>
10	32.9383+2.4421 <i>i</i>	-0.0553+0.0116 <i>i</i>
⋮	⋮	⋮

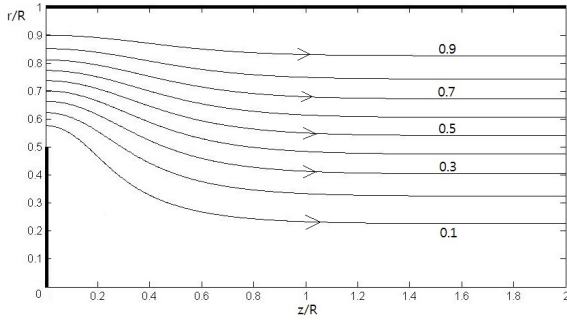


Fig. 2 Streamlines for  $a = 0.5$  with  $Q = 1$ . Here,  $2\pi\Delta\Psi = 0.1$

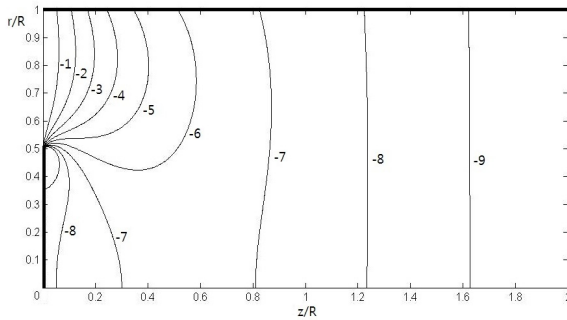


Fig. 3 Dimensionless pressure  $p(r,z)/(\mu Q/R^3)$  contour lines for  $a = 0.5$ .

3.3 전단응력 분포

유동함수 식 (12)를 이용하여 원관의 벽면( $r = 1$ )에서의 전단응력  $\tau_w$ 와 디스크 표면( $z = 0, 0 \leq r \leq a$ )에서의 전단응력  $\tau_d$ 를 구하는 식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \tau_w &= \tau_{rz}(1, z) \\ &= -\frac{4\mu Q}{\pi} + 4\mu Re \sum_{n=1}^{\infty} C_n \alpha_n J_1(\alpha_n)^2 e^{-\alpha_n z}, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \tau_d &= \tau_{rz}(r, 0^+) \\ &= -2\mu Re \sum_{n=1}^{\infty} C_n \alpha_n^2 \left\{ \begin{matrix} J_0(\alpha_n) J_1(\alpha_n r) \\ -r J_1(\alpha_n) J_0(\alpha_n r) \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \tag{16}$$

3.4 디스크가 받는 힘과 추가적인 압력강하

원관 내에서 디스크가 받는 항력  $F$ 는 압력분포 식 (14)를 이용하여 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$F = -\int_0^a \{p(r, 0^+) - p(r, 0^-)\} 2\pi r dr$$

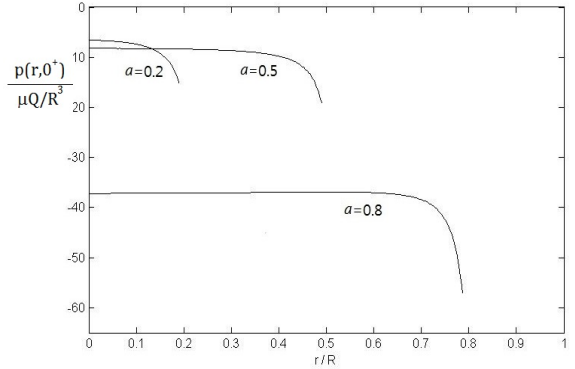


Fig. 4 Dimensionless pressure distributions on the disk surface for  $a = 0.2, 0.5, 0.8$

$$\begin{aligned} &= -4\pi \int_0^a p(r, 0^+) r dr \tag{17} \\ &= 16\pi\mu a Re \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_1(\alpha_n) J_1(\alpha_n a) - 2\pi a^2 K \end{aligned}$$

또한, 디스크에 의해 추가적으로 생기는 상류와 하류사이의 압력강하  $\Delta P$ 는 식 (14)로부터

$$\Delta P = -2K \tag{18}$$

임을 알 수 있다.

4. 계산결과 및 고찰

Fig 2에 디스크의 반지름  $a = 0.5$ 인 경우에 대해 식 (12)로부터 유동함수를 계산하여 유선을 도시하였다. 디스크 표면을 포함하여 원관 내의 전 유동장 영역에서 점성 에디(viscous eddy)는 나타나지 않았으며, 이는 디스크의 반지름  $a$ 를 변화시켜도 마찬가지이다. 반지름  $a$ 가 변화하더라도 디스크 주위의 유선은 Fig. 2처럼 매끈하게 디스크와 원관의 벽면 사이를 통과함을 알 수 있었다.

Fig 3에 디스크 반지름이  $a = 0.5$ 인 경우에 대해 식 (14)로부터 압력분포를 계산하여 등고선(contour)으로 나타내었다. 유동장의 좌우 중앙면 ( $z = 0$ )에서의 압력을 기준압력 0으로 취하였으며, 압력은  $z > 0$ 에서 음의 부호를 가진 채  $z$ 의 증가에 따라 계속 감소하고 있는데 그 감소율은  $z/R = 0$ 에서 가장 크다는 것을 알 수 있다.

Fig 4, 5에는 식 (14)와 식 (16)을 사용하여 디스크 표면 ( $z = 0^+, 0 \leq r \leq a$ )에서 압력분포와 전단응력 분포를 구한 결과를 각각 도시하였다. Fig. 4에서, 압력은 디스크 표면 전

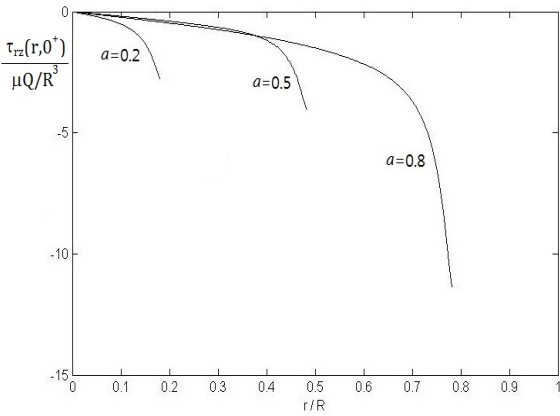


Fig. 5 Dimensionless shear stress distributions on the disk surface for  $a=0.2, 0.5, 0.8$

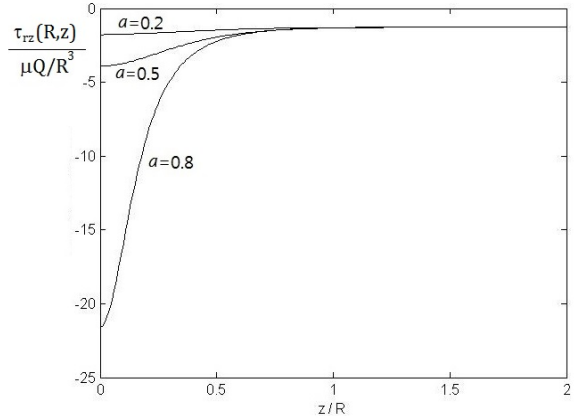


Fig. 7 Dimensionless shear stress distributions on the circular tube wall for  $a=0.2, 0.5, 0.8$

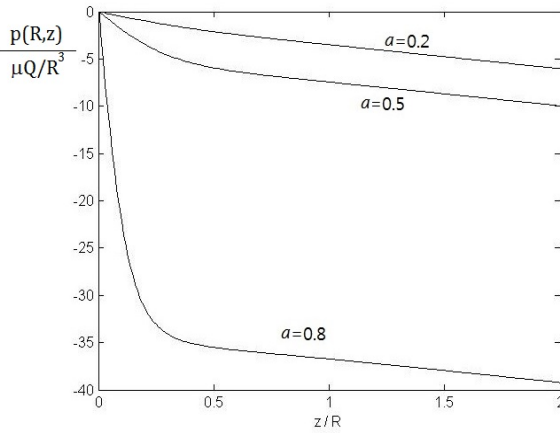


Fig. 6 Dimensionless pressure distributions on the circular tube wall for  $a=0.2, 0.5, 0.8$

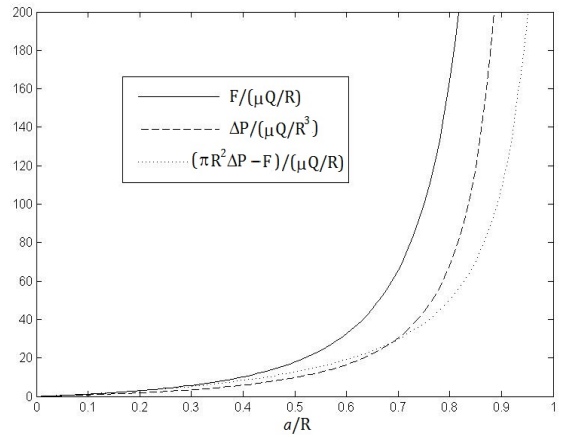


Fig. 8 Drag force  $F$  exerted on the disk and additional pressure drop  $\Delta P$  due to the disk

체에 걸쳐 거의 일정하지만 가장자리( $r=a$ ) 부분에서 압력이 급격히 감소함을 보이고 있다. 식 (6)과 같이 압력이  $z$ 에 대하여 반대칭임을 고려하면 디스크 가장자리의 왼쪽 면에서는 압력이 급격히 증가함을 알 수 있다. Fig. 5에서, 전단응력은 디스크 중앙점( $r/R=0$ )에서 영(zero)이며 가장자리( $r=a$ )로 갈수록 전단응력의 크기가 증가함을 알 수 있다.

Fig. 6, 7에는 식 (14)와 식 (15)를 사용하여 원관 벽면( $r/R=1, z/R \geq 0$ )에서 무차원 압력과 전단응력의 분포를 각각 도시하였다. Fig. 6에서, 압력은  $z/R=0$ 에서의 기준압력 0으로부터 급격히 감소하다가  $z/R \geq 1$ 에서는 기울기  $-8/\pi$  인(포아제 유동에서의 압력구배에 해당하는 기울기) 선형적 감소를 나타내고 있다. Fig. 7에서, 전단응력의 크기는  $z/R=0$ 일 때 최대값을 가지며  $z$ 의 증가에 따라 점차적으

로 그 크기가 감소하다가  $z/R \geq 1$ 에서는 그 값이  $-4/\pi$ (포아제 유동에 의한 전단응력 값)으로 접근함을 알 수 있다.

따라서, 원관의 중심축에 놓인 디스크의 영향은 디스크 전·후로 원관 반지름의 약 2배 이내( $-1 \leq z/R \leq 1$ )임을 알 수 있다.

Fig. 8에는 식 (17)과 식 (18)을 사용하여 원관 내의 디스크가 받는 항력  $F$ 와 디스크에 의해 생기는 상·하류 사이의 부가적 압력 강하  $\Delta P$ 를 구한 결과를 디스크의 반지름  $a$ 의 함수로 나타내었다. 그림에서 보듯이, 디스크의 반지름  $a$  ( $0 < a/R < 1$ )의 증가에 따라  $F$ 와  $\Delta P$ 는 급격히 증가함을 알 수 있다. 또한, 힘의 평형을 고려하면, 디스크에 의하여 원관 벽면에 유동 방향으로 작용하는 전단력이  $\Delta P(\pi R^2) - F (> 0)$  만큼 증가함을 알 수 있다.

5. 결 론

원관의 중심축과 일치하며 고정된 디스크를 지나는 스톡스 유동에 대하여 이론적인 해석을 통하여 유동 특성을 고찰하였다.

스톡스 유동의 해석 결과로부터 원관 내 디스크의 임의 반경  $a$ 에 대하여 유동함수와 압력분포 식을 구하였으며, 모든 경계 벽면에서 작용하는 압력과 전단응력의 분포를 구하였다. 특별히 중요한 물리량으로 디스크가 받는 힘과 디스크의 존재로 인해 부가적으로 생기는 원관 유동의 압력 강하를 디스크의 반경  $a$ 의 변화에 따라 계산하여 도시하였다. 유선의 도시결과, 어떠한 반지름의 디스크에 대해서도 원관 벽면이나 디스크의 표면에 부착된 점성 에디(viscous eddy)는 나타나지 않았는데, 이는 본 연구모델의 경계 벽면에서 유동의 박리(separation)가 일어나지 않는다는 결과와 부합된다. 또한, 디스크가 받는 힘이나 부가적인 압력강하는 디스크 반경  $a$ 가 커짐에 따라 급격히 증가함을 알 수 있었다.

본 논문에서 고찰한 원관 내의 디스크를 지나는 스톡스 유동에 대한 해석 결과는, 모세혈관이나 생체유동, 마이크로튜브 내의 유동과 같이 레이놀즈 수가 작은 유동장에 디스크형 장애물이 있는 경우에 유량과 압력강하 및 장애물에 걸리는 항력 등의 관계식을 제공하고 관련 유동의 특성을 이해하는데 필요한 참고 자료가 될 것이다.

References

[1] 1965, Happel, J. and Brenner, H., Low Reynolds Number Hydrodynamics, Prentice-Hall, New Jersey.  
 [2] 2005, Karniadakis, G., Beskok, A. and Aluru, N., Microflows and Nanoflows Fundamentals and Simulation, Springer, New York.  
 [3] 2010, Berthier, J. and Silberzan, P., Microfluidics for Biotechnology, Artech House, Boston.  
 [4] 1969, Wang, H. and Skalak, R., "Viscous Flow in a Cylindrical Tube Containing a Line of Spherical Particles," *J. Fluid Mech.*, Vol.38, pp.75-96.

[5] 1996, Wang, C.Y., "Settling of Discs Inside a Vertical Fluid-Filled Tube," *Appl. Sci. Res.*, Vol.56, pp.43-51.  
 [6] 1969, Shail, R. and Norton, D.J., "On the Slow Broadside Motion of a Thin Disc along the Axis of a Fluid-Filled Circular Duct," *Proc. Camb. Phil. Soc.*, Vol.65, pp.793-802.  
 [7] 1984, Ui, T.J., Hussey, R.G. and Roger, R.P., "Stokes Drag on a Cylinder in Axial Motion," *Phys. Fluids*, Vol.27, pp.787-795.  
 [8] 1996, Pulley, J.W., Hussey, R.G. and Davis, A.M.J., "Low Nonzero Reynolds Number Drag of a Thin Disk Settling Axisymmetrically within a Cylindrical Outer Boundary," *Phys. Fluids*, Vol.8, pp.2275-2283.  
 [9] 2005, Nitin, S. and Chhabra, R.P., "Wall Effects in Two-dimensional Axisymmetric Flow over a Circular Disk Oriented Normal to Flow in Cylindrical Tube," *Can. J. Chem. Eng.*, Vol.83, pp.450-457.  
 [10] 2011, Yoon, S.-H. and Jeong, J.-T., "Study of Stokes Flow Past a Vertical Plate in a Two Dimensional Channel," *Trans. of the KSME(B)*, Vol.35, pp.609-615.  
 [11] 2013, Jeong, J.-T. and Yoon, S.-H., "Study on Stokes Flow Past a Circular Cylinder in a Two Dimensional Channel," *Trans. of the KSME(B)*, Vol.37, pp.895-900.  
 [12] 1987, Dvinsky, A.S. and Popel, A.S., "Motion of a Rigid Cylinder between Parallel Plates in Stokes Flow, Part 1 : Motion in a Quiescent Fluid and Sedimentation," *Computers & Fluids*, Vol.15, No.4, pp.391-404.  
 [13] 1987, Dvinsky, A.S. and Popel, A.S., "Motion of a Rigid Cylinder between Parallel Plates in Stokes Flow, Part 2 : Poiseuille and Couette Flow," *Computers & Fluids*, Vol.15, No.4, pp.405-419.  
 [14] 2000, Selvadurai, A.P.S., Partial Differential Equations in Mechanics 2, Springer, New York, pp.409-411.  
 [15] 2005, Jeong, J.-T. and Choi, S.-R., "Axisymmetric Stokes Flow through a Circular Orifice in a Tube," *Phys. Fluids*, Vol.17, 053602.  
 [16] 1976, Hildebrand, F.B., Advanced Calculus for Applications, 2nd ed., Prentice-Hall, New Jersey, pp.141-153.