

Bayesian inference on multivariate asymmetric jump-diffusion models

Youngeun Lee^a · Taeyoung Park^{a,1}

^aDepartment of Applied Statistics, Yonsei University

(Received December 14, 2015; Revised December 22, 2015; Accepted December 23, 2015)

Abstract

Asymmetric jump-diffusion models are effectively used to model the dynamic behavior of asset prices with abrupt asymmetric upward and downward changes. However, the estimation of their extension to the multivariate asymmetric jump-diffusion model has been hampered by the analytically intractable likelihood function. This article confronts the problem using a data augmentation method and proposes a new Bayesian method for a multivariate asymmetric Laplace jump-diffusion model. Unlike the previous models, the proposed model is rich enough to incorporate all possible correlated jumps as well as mention individual and common jumps. The proposed model and methodology are illustrated with a simulation study and applied to daily returns for the KOSPI, S&P500, and Nikkei225 indices data from January 2005 to September 2015.

Keywords: Bayesian analysis, collapsed Gibbs sampler, data augmentation, Markov Chain Monte Carlo, multivariate asymmetric Laplace distribution

1. 서론

Black과 Scholes (1973)에 의해 제안된 블랙-숄즈 모형은 자산의 움직임을 설명하는 모형으로 많이 활용되어 왔다. 그러나 이 모형이 실제 자산의 움직임을 반영하지 못한다는 문제가 실증 연구를 통해 제기되었다 (Merton, 1976; Hull와 White, 1987; Heston, 1993). 특히, 자산가격이 급격히 변화하는 현상을 설명하지 못하는 문제점을 보완하기 위한 모형들이 개발되었는데, 그 중 하나가 Merton (1976)에 의해 제안된 점프확산 모형(jump-diffusion model)이다. 점프확산 모형은 자산 가격의 움직임을 연속적인 브라운 운동에 불연속적인 점프 과정이 결합한 형태로 설명한다. 이러한 점프확산 모형을 선형 혼합 모형으로 표현하고, 재모수화 및 부분붕괴 기법을 사용하여 효율적으로 추론한 베이지안 방법이 최근 제안되었다 (Park과 Min, 2016).

Merton의 점프확산 모형은 자산가격의 점프 과정이 대칭적인 정규분포를 따른다고 가정하였으나, 실제 로그 수익률은 정규분포보다 큰 첨도와 두터운 꼬리(leptokurtic distribution) 및 음의 왜도(skewness)를 가지는 경향이 있다. 이와 같은 자산 가격의 비대칭적 변동성을 보다 잘 반영하기 위해 비대칭적

This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education (NRF-2014R1A1A2056049).

¹Corresponding author: Department of Applied Statistics, Yonsei University, 50 Yonsei-Ro, Seodaemun-Gu, Seoul 03722, Korea. E-mail: tpark@yonsei.ac.kr

인 점프과정을 갖는 파레토-베타 점프확산 모형 (Ramezani와 Zeng, 1998)과 이중지수 점프확산 모형 (Kou, 2002)이 제안되었고, 이중지수 점프확산 모형의 모수는 파레토-베타 점프확산 모형의 모수의 합수로 표현이 가능하다 (Ramezani와 Zeng, 2007). 비대칭적 점프확산 모형의 모수추정 방법들로 최대우도추정법 (Huang와 Kou, 2006; Ramezani와 Zeng, 2007)과 베이저안 방법 (Frame와 Ramezani, 2014)이 연구되었고, 최근 부분붕괴 기법을 이용한 파레토-베타 점프확산 모형의 효율적인 베이저안 추론 방법이 개발되었다 (Park와 Lee, 2014). Frame와 Ramezani (2014)은 S&P500 지수와 NASDAQ 지수의 로그 수익률의 분포가 점프확산 모형보다 비대칭 점프확산 모형에 더 근접함을 입증하였다.

자산가격을 분석하는 경우, 하나 이상의 자산을 고려하여 포트폴리오를 구성하는 것이 일반적이다. 따라서 하나의 자산수익률만을 모형화한 일변량 점프확산 모형은 한계를 지닐 수 밖에 없다. 또한 일변량 점프확산 모형의 경우 세계 금융 시장에서 밀접하게 연관되어 있는 여러 자산 가격의 움직임 및 변동성을 반영하지 못한다. 즉, 일변량 점프확산 모형은 개별적인 자산의 급격한 변동을 설명할 수는 있으나, 모든 자산 또는 몇 개의 자산에 동시에 영향을 주는 변동 요인에 대한 추론은 불가능하다. 이러한 한계점을 극복하고자 Duffie와 Pan (2001)은 Merton의 점프확산 모형을 다변량 모형으로 확장하여 시장리스크와 신용리스크에 관한 연구를 수행하였다. Johannes와 Polson (2002), Jacquier 등 (2007)은 S&P500 지수와 NASDAQ 지수에 대한 실증분석을 통해 다변량 점프확산 모형의 유용성을 입증하였다. 하지만 이러한 연구들은 일변량 점프확산 모형과 마찬가지로 점프과정이 대칭임을 가정한다는 단점이 있었다. 이들의 단점을 보완하기 위해 Huang와 Kou (2006)는 점프과정이 다변량 비대칭 라플라스 분포를 따르는 다변량 비대칭 점프확산 모형을 제안하였다. 그러나 Huang와 Kou의 모형은 확률밀도함수가 닫힌 해(closed form)의 형태로 존재하지 않기 때문에 모형의 추론에 어려움이 있었다 (Kou, 2007). 또한 Huang와 Kou의 다변량 비대칭 라플라스 점프확산 모형은 개별적인 자산의 점프와 모든 자산에 공통된 점프만을 고려하여 몇 개의 자산만 가지고 있는 점프를 설명할 수 없다는 단점이 있었다. 이에 본 논문에서는 여러 자산들의 모든 가능한 조합으로 발생하는 점프를 반영한 확장된 다변량 비대칭 라플라스 점프확산 모형을 제안하고, 이를 추론하는 베이저안 방법을 개발할 것이다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 확장된 다변량 비대칭 라플라스 모형을 소개하고, 3절에서는 본 논문에서 제안된 모형의 베이저안 추론 과정을 설명한다. 4절에서는 제안된 베이저안 방법을 검증하기 위해 모의실험을 실시하고, 5절에서는 최근 10년동안의 KOSPI 지수, S&P500 지수, 그리고 Nikkei225 지수 자료에 제안된 베이저안 방법을 적용한다. 마지막으로 6절에서는 결론을 맺는다.

2. 연구 모형

2.1. 다변량 비대칭 라플라스분포

본 논문에서는 $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_d)^\top$ 가 d -차원의 다변량 비대칭 라플라스분포를 따를 때, $\mathbf{Y} \sim \mathcal{AL}_d(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Omega})$ 로 표기하고 고유함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\psi(\mathbf{t}) = \frac{1}{1 + \mathbf{t}^\top \boldsymbol{\Omega} \mathbf{t} / 2 - i \boldsymbol{\eta}^\top \mathbf{t}},$$

여기서 $\boldsymbol{\eta}$ 는 $d \times 1$ 평균벡터를 나타내고, $\boldsymbol{\Omega}$ 는 $d \times d$ 양의 정부호행렬을 나타내며, \mathbf{Y} 의 공분산행렬 $\text{Cov}(\mathbf{Y})$ 는 $\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\eta}^\top$ 이다. 다변량 비대칭 라플라스 분포는 $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ 일 때 다변량 대칭 라플라스분포 $\mathcal{L}_d(\boldsymbol{\Omega})$ 가 된다. 보다 자세한 내용은 Kotz 등 (2012)을 참조할 수 있다.

다변량 비대칭 라플라스 분포는 다음과 같이 다변량 정규분포에 지수분포를 혼합한 모형으로 표현할 수

있다.

$$\mathbf{Y} \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\eta}X + \sqrt{X}\mathbf{Z}. \quad (2.1)$$

식 (2.1)에서 \mathbf{Y} 는 $\mathcal{AL}_d(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Omega})$ 를 따르는 $d \times 1$ 벡터를 나타내고, X 는 평균이 1인 지수분포를 따르는 스칼라 확률변수를 나타내며, \mathbf{Z} 는 $N_d(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega})$ 를 따르는 $d \times 1$ 벡터를 나타낸다. 따라서 \mathbf{Y} 의 i 번째 원소들이 다음의 형태를 가짐을 도출할 수 있다.

$$Y_i \stackrel{d}{=} \eta_i X + \sqrt{X}Z_i, \quad i = 1, \dots, d, \quad (2.2)$$

여기서 η_i 는 $\boldsymbol{\eta}$ 의 i 번째 원소를 나타내고, $Z_i \sim N(0, \omega_{ii})$ 를 나타내며, ω_{ii} 는 $\boldsymbol{\Omega}$ 의 i 번째 대각원소를 나타낸다. 즉, 일변량 확률변수 Y_i 는 각각 일변량 비대칭 라플라스 분포 $\mathcal{AL}(\eta_i, \omega_{ii})$ 을 따른다. 또한 벡터 \mathbf{Y} 가 $\mathcal{AL}_d(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Omega})$ 을 따를 때

$$\mathbf{A}\mathbf{Y} \sim \mathcal{AL}_r(\mathbf{A}\boldsymbol{\eta}, \mathbf{A}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{A}^\top)$$

와 같이 표현 가능하고, 여기서 \mathbf{A} 는 상수로 이루어진 $r \times d$ 행렬이다. 즉, \mathbf{Y} 의 주변분포와 선형결합분포는 r -차원의 다변량 비대칭 라플라스 분포를 따른다. 이러한 성질은 다변량 비대칭 라플라스 점프확산 모형에서 여러 자산 수익률의 점프가 함께 발생하는 상관(correlated) 점프의 계산과 유연한 모형화를 가능하게 한다.

2.2. 다변량 비대칭 라플라스 점프확산 모형

Kou (2002)에 의해서 이중지수 점프확산 모형이 제안되었고, 이중지수 점프확산 모형에서 점프크기 V 의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f_V(v) = p \cdot \eta_1 e^{-\eta_1 v} 1_{\{v \geq 0\}} + q \cdot \eta_2 e^{\eta_2 v} 1_{\{v < 0\}}, \quad (2.3)$$

여기서 $\eta_1 > 1$ 이고, $\eta_2 > 0$ 이다. 만약 $p\eta_1 = q\eta_2$ 이면, 식 (2.3)은 일변량 비대칭 라플라스 분포의 확률 밀도함수와 같아진다 (Kou, 2007). 즉, 일변량 비대칭 라플라스 분포는 이중지수 분포의 특별한 형태로 볼 수 있다.

이중지수 점프확산 모형은 Huang과 Kou (2006)에 의해 다변량 비대칭 라플라스 점프확산 모형으로 확장되었고, 이는 다음과 같은 확률 미분방정식으로 표현할 수 있다.

$$\frac{d\mathbf{S}_t}{\mathbf{S}_{t-}} = \boldsymbol{\gamma}dt + \boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}d\mathbf{W}_t + d\left(\sum_{i=1}^{N_t} e^{\mathbf{J}_i} - 1\right),$$

여기서 \mathbf{S}_t 는 t 시점에서의 자산 가격이고, \mathbf{S}_{t-} 는 자산 가격의 점프 간 불연속성을 나타낸다. 또한 $\boldsymbol{\gamma}$ 는 $d \times 1$ 추세 벡터를 나타내고, $\boldsymbol{\Sigma}$ 는 $d \times d$ 변동성 행렬을 나타내며, \mathbf{W}_t 는 d -차원의 위너(Wiener) 과정이다. $\mathbf{J}_i = (J_{i1}, \dots, J_{id})^\top$ 는 $\mathcal{AL}_d(\boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J)$ 를 따르는 $d \times 1$ 점프크기 벡터를 의미하고, 마지막으로 N_t 는 점프 발생률이 $\lambda = \sum_{k=1}^{2^d-1} \lambda_k$ 인 포아송 과정이다. 여기서 다변량 이토의 보조정리를 이용하고 $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\gamma} - \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma})/2$ 로 두면, 일별 시간 구간에 대해 적분한 로그 수익률 $\mathbf{Y}_t = \ln(\mathbf{S}_t/\mathbf{S}_{t-1})$ 에 대해 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{W}_t - \mathbf{W}_{t-1}) + \sum_{i=N_{t-1}}^{N_t} \mathbf{J}_i. \quad (2.4)$$

이 때, t 시점과 $(t-1)$ 시점 사이에 최대 하나의 점프 조합(configuration)이 발생한다고 가정하면 식 (2.4)는 다음과 같이 변형된다.

$$\mathbf{Y}_t = \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{\epsilon}_t + \mathbf{Z}_t \mathbf{J}_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (2.5)$$

식 (2.5)에서 $\boldsymbol{\epsilon}_t$ 는 각각 독립인 $N_d(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ 를 따르는 $d \times 1$ 벡터를 나타내고, \mathbf{J}_t 는 각각 독립인 $\mathcal{AL}_d(\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\Omega})$ 를 따르는 $d \times 1$ 벡터를 나타내며, $\boldsymbol{\epsilon}_t$ 와 \mathbf{J}_t 는 서로 독립이다. 또한, \mathbf{Z}_t 는 대각원소로 $\text{diag}(\mathbf{Z}_t) = (Z_{1t}, \dots, Z_{dt})^\top$ 를 갖는 $d \times d$ 대각행렬이고, Z_{it} 는 t 시점에서 i 번째 자산가격의 점프지시변수를 나타내며 점프 발생률이 π_i 인 베르누이(Bernoulli) 분포를 따른다고 가정한다. 따라서 공통(common) 점프와 개별(individual) 점프만 고려한 Huang와 Kou (2006)의 모형과 달리, 본 논문에서 제안된 모형은 상관(correlated) 점프를 포함한 모든 2^d 조합의 점프를 반영한다. 이 때 각 조합의 점프에 대한 발생률은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \pi_1(1 - \pi_2)(1 - \pi_3) \cdots (1 - \pi_d) \\ \lambda_2 &= (1 - \pi_1)\pi_2(1 - \pi_3) \cdots (1 - \pi_d) \\ &\vdots \\ \lambda_{2^d-1} &= \pi_1\pi_2\pi_3 \cdots \pi_d. \end{aligned}$$

그리고 적어도 하나의 자산에서 점프가 발생하는 확률은 $\lambda = \sum_{k=1}^{2^d-1} \lambda_k$ 로 표현된다.

3. 베이지안 추론

본 논문에서 제안된 모형은 점프과정이 다변량 비대칭 라플라스 분포를 따른다고 가정한다. 다변량 비대칭 라플라스 분포의 확률밀도함수는 닫힌 해의 형태로 존재하지 않는다는 단점이 있기 때문에 Kou (2007)에서는 추론방법이 제시되지 못하였다. 하지만, 본 논문에서는 Tanner와 Wong (1987)에 의해서 제안된 자료 확장(data augmentation) 기법을 사용하여 베이지안 추론방법을 개발하였다. 먼저 점프 크기를 나타내는 $d \times 1$ 벡터 \mathbf{J}_t 를 모수가 $\boldsymbol{\mu}_J$ 와 $\boldsymbol{\Sigma}_J$ 인 d -차원의 다변량 비대칭 라플라스 분포를 따르도록 하면, \mathbf{J}_t 를 다음과 같은 다변량 가우스 척도혼합(scale Gaussian mixture)모형으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{J}_t \stackrel{d}{=} \boldsymbol{\mu}_J W_t + \sqrt{W_t} \mathbf{X}_t. \quad (3.1)$$

식 (3.1)에서 \mathbf{X}_t 는 평균벡터가 $\mathbf{0}$ 이고 공분산행렬이 $\boldsymbol{\Sigma}_J$ 인 d -차원 다변량 정규분포를 따르는 $d \times 1$ 확률 벡터를 나타내고, W_t 는 평균이 1인 지수분포를 따르는 스칼라 확률변수이다. 여기서 자료확장 기법을 사용해 W_t 를 잠재 벡터 변수로 설정하면, \mathbf{J}_t 의 조건부 분포는

$$\mathbf{J}_t | W_t \sim N_d(\boldsymbol{\mu}_J W_t, W_t \boldsymbol{\Sigma}_J)$$

와 같은 d -차원의 다변량 정규분포이다. 이에 기반하여 다변량 비대칭 라플라스 점프확산 모형을 계층 모형으로 표현함으로써 목표 사후분포를 구할 수 있다.

다변량 비대칭 라플라스 점프확산 모형의 베이지안 추론을 위해 모수 $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J, \boldsymbol{\pi})$ 에 대해 다음과 같은 진(proper) 사전분포(prior distribution)를 가정하자.

$$\begin{aligned} \pi_i &\sim \text{Beta}(a, b), \quad i = 1, \dots, d, \\ \boldsymbol{\mu} | \boldsymbol{\Sigma} &\sim N_d(\mathbf{a}_0, b_0 \boldsymbol{\Sigma}), \\ \boldsymbol{\Sigma} &\sim \text{Inv-Wishart}_d(\nu, \mathbf{R}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_J | \boldsymbol{\Sigma}_J &\sim N_d(\mathbf{a}_J, b_J \boldsymbol{\Sigma}_J), \\ \boldsymbol{\Sigma}_J &\sim \text{Inv-Wishart}_d(\eta, \mathbf{U}),\end{aligned}$$

여기서 $\text{Inv-Wishart}(\nu, \boldsymbol{\Psi})$ 는 자유도 ν 와 척도 행렬 $\boldsymbol{\Psi}$ 를 가지는 역위샤트(Inverse-Wishart) 분포를 나타내며 확률밀도함수는 $p(\mathbf{X}) \propto |\mathbf{X}|^{-(\nu+d+1)/2} \exp(-(1/2)\text{tr}(\mathbf{X}\boldsymbol{\Psi}^{-1}))$ 이다. 이 때 사후분포(posterior distribution)는 다음과 같다.

$$p(\mathbf{Z}, \mathbf{J}, W, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J, \pi | \mathbf{Y}) \propto p(\mathbf{Y} | \mathbf{Z}, \mathbf{J}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) p(\mathbf{Z} | \pi) p(\mathbf{J} | \boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J) p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J, \pi),$$

여기서 $\mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_T)^\top$ 인 $dT \times d$ 행렬을 나타내고, $\mathbf{J} = (\mathbf{J}_1^\top, \dots, \mathbf{J}_T^\top)^\top$ 인 $d \times T$ 행렬을 나타내고, $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1^\top, \dots, \mathbf{Y}_T^\top)^\top$ 는 $d \times T$ 행렬을 나타낸다. 깃스 샘플러의 효율성을 향상시키기 위해 점프지시 확률 π 를 사후분포에서 붕괴하면 다변량 비대칭 라플라스 점프확산 모형의 목표 사후분포는 $p(\mathbf{Z}, \mathbf{J}, W, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J | \mathbf{Y})$ 가 된다. 이로부터 추출을 하는데 사용되는 붕괴된 깃스 샘플러 (Liu, 1994)는 다음과 같이 유도된다.

- 1단계: \mathbf{Z} 를 $p(\mathbf{Z} | \mathbf{J}, W, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J, \mathbf{Y})$ 에서 추출한다.
- 2단계: \mathbf{J} 를 $p(\mathbf{J} | \mathbf{Z}, W, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J, \mathbf{Y})$ 에서 추출한다.
- 3단계: W 를 $p(W | \mathbf{Z}, \mathbf{J}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J, \mathbf{Y})$ 에서 추출한다.
- 4단계: $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 를 $p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{Z}, \mathbf{J}, W, \boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J, \mathbf{Y})$ 에서 추출한다.
- 5단계: $(\boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J)$ 를 $p(\boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J | \mathbf{Z}, \mathbf{J}, W, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Y})$ 에서 추출한다.

1단계에서 \mathbf{Z} 를 추출하기 위한 조건부 분포는

$$\text{diag}(\mathbf{Z}_t) | (\mathbf{J}, W, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J, \mathbf{Y}) \stackrel{\text{ind}}{\sim} \text{Multinomial}(1; p_{1t}, p_{2t}, \dots, p_{2^d t}), \quad t = 1, \dots, T$$

와 같은 다항분포이다. 여기서

$$\begin{aligned}p_{\ell t} &= P(\text{diag}(\mathbf{Z}_t) = \mathbf{c}_\ell | \mathbf{J}, W, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J, \mathbf{Y}) \\ &\propto \mathcal{N}_d(\mathbf{Y}_t; \boldsymbol{\mu} + \mathbf{Z}_t \mathbf{J}_t, \boldsymbol{\Sigma}) \prod_{i=1}^d \Gamma(a + Z_{it}) \Gamma(b + 1 - Z_{it}), \quad \ell = 1, 2, \dots, 2^d\end{aligned}$$

이고, $\sum_{\ell=1}^{2^d} p_{\ell t} = 1$ 을 만족하고, $\mathbf{c}_\ell \in \mathcal{C} = \{(Z_{1t}, \dots, Z_{dt})^\top : Z_{it} = 0 \text{ or } 1 \text{ for } i = 1, \dots, d\}$ 이며, $\mathcal{N}_d(\cdot; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 는 평균 벡터가 $\boldsymbol{\mu}$ 이고 공분산행렬이 $\boldsymbol{\Sigma}$ 인 d -차원의 다변량 정규분포의 확률밀도함수를 나타낸다. 2단계에서 \mathbf{J} 를 추출하기 위한 조건부 분포는 독립인 d -차원의 다변량 정규분포이다. 즉,

$$\mathbf{J}_t | (\mathbf{Z}, \boldsymbol{\mu}, W, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J, \mathbf{Y}) \stackrel{\text{ind}}{\sim} N_d(\hat{\mathbf{J}}, \boldsymbol{\Lambda}_J), \quad t = 1, \dots, T$$

이고, 여기서

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{J}} &= \left(\mathbf{Z}_t^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}_t + \frac{\boldsymbol{\Sigma}_J^{-1}}{W_t} \right)^{-1} (\mathbf{Z}_t \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{Y}_t - \boldsymbol{\mu}) + \boldsymbol{\Sigma}_J^{-1} \boldsymbol{\mu}_J), \\ \boldsymbol{\Lambda}_J &= \left(\mathbf{Z}_t^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{Z}_t + \frac{\boldsymbol{\Sigma}_J^{-1}}{W_t} \right)^{-1}\end{aligned}$$

이다. 3단계에서 W_t 를 추출하기 위한 조건부 분포는

$$W_t \sim \mathcal{GIG} \left(-\frac{d}{2} + 1, \mathbf{J}_t^\top \boldsymbol{\Sigma}_J^{-1} \mathbf{J}_t, 2 + \boldsymbol{\mu}_J^\top \boldsymbol{\Sigma}_J^{-1} \boldsymbol{\mu}_J \right)$$

와 같은 일반화된 역가우시안(generalized inverse Gaussian)분포를 따른다. 여기서 $X \sim \mathcal{GIG}(\lambda, \xi, \psi)$ 일 때 확률밀도함수는 $x^{\lambda-1} \exp(-(\xi/x + \psi x)/2)$ 에 비례한다. 4단계에서 $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ 을 추출하기 위한 조건부 분포는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{Z}, \mathbf{J}, W, \boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J, \mathbf{Y}) = p(\boldsymbol{\Sigma} | \mathbf{Z}, \mathbf{J}, W, \boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J, \mathbf{Y}) p(\boldsymbol{\mu} | \mathbf{Z}, \mathbf{J}, W, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J, \mathbf{Y}). \quad (3.2)$$

식 (3.2)에서 $\boldsymbol{\Sigma}$ 을 추출하기 위한 조건부 분포는

$$\boldsymbol{\Sigma} | (\mathbf{Z}, \mathbf{J}, W, \boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J, \mathbf{Y}) \sim \text{Inv-Wishart} \left(T + \nu, \widehat{S}_1 \right)$$

와 같은 역위샤트분포이고, 여기서

$$\widehat{S}_1 = \sum_{t=1}^T (\mathbf{Y}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{Z}_t \mathbf{J}_t) (\mathbf{Y}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{Z}_t \mathbf{J}_t)^\top + \frac{1}{b_0} (\hat{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{a}_0) (\hat{\boldsymbol{\mu}} - \mathbf{a}_0)^\top + \mathbf{R}$$

이다. 식 (3.2)에서 $\boldsymbol{\mu}$ 를 추출하기 위한 조건부 분포는

$$\boldsymbol{\mu} | (\mathbf{Z}, \mathbf{J}, W, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J, \mathbf{Y}) \sim N_d \left(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{\Sigma} \left(T + \frac{1}{b_0} \right)^{-1} \right)$$

와 같은 다변량 정규분포이고, 여기서

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \left(\sum_{t=1}^T (\mathbf{Y}_t - \mathbf{Z}_t \mathbf{J}_t) + \frac{\mathbf{a}_0}{b_0} \right) \left(T + \frac{1}{b_0} \right)^{-1}$$

이다. 마지막으로, 5단계에서 $(\boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J)$ 를 추출하기 위한 조건부 분포는

$$p(\boldsymbol{\mu}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J | \mathbf{Z}, \mathbf{J}, W, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Y}) = p(\boldsymbol{\Sigma}_J | \mathbf{Z}, \mathbf{J}, W, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Y}) p(\boldsymbol{\mu}_J | \mathbf{Z}, \mathbf{J}, W, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma}_J, \mathbf{Y}) \quad (3.3)$$

와 같이 표현할 수 있다. 식 (3.3)에서 $\boldsymbol{\Sigma}_J$ 를 추출하기 위한 조건부 분포는

$$\boldsymbol{\Sigma}_J | (\mathbf{Z}, \mathbf{J}, W, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \mathbf{Y}) \sim \text{Inv-Wishart} \left(T + \eta, \widehat{S}_2 \right)$$

와 같은 역위샤트분포이고, 여기서

$$\widehat{S}_2 = \sum_{t=1}^T \frac{1}{W_t} (\mathbf{J}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}}_J W_t) (\mathbf{J}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}}_J W_t)^\top + \frac{1}{b_J} (\hat{\boldsymbol{\mu}}_J - \mathbf{a}_J) (\hat{\boldsymbol{\mu}}_J - \mathbf{a}_J)^\top + \mathbf{U}$$

이다. 식 (3.3)에서 $\boldsymbol{\mu}_J$ 를 추출하기 위한 조건부 분포는

$$\boldsymbol{\mu}_J | (\mathbf{Z}, \mathbf{J}, W, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma}_J, \mathbf{Y}) \sim N_d \left(\hat{\boldsymbol{\mu}}_J, \boldsymbol{\Sigma}_J \left(\sum_{t=1}^T W_t + \frac{1}{b_J} \right)^{-1} \right)$$

와 같은 다변량 정규분포이고, 여기서

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_J = \left(\sum_{t=1}^T \mathbf{J}_t + \frac{\mathbf{a}_J}{b_J} \right) \left(\sum_{t=1}^T W_t + \frac{1}{b_J} \right)^{-1}$$

이다.

4. 모의실험

본 논문에서 제안된 다변량 비대칭 라플라스 점프확산 모형에 적용한 베이저안 방법을 검증하기 위해 모의실험을 시행하였다. 먼저 연속적인 시간 $t = 1, \dots, 1000$ 동안 얻어진 3차원의 자산 수익률 \mathbf{Y}_t 을 고려하였다. 이 때, 점프지시함수 Z_{it} 는 이진 변수이므로 총 2^d 경우의 점프 조합이 발생한다. 즉, 하나의 점프 조합을 \mathbf{c}_ℓ 로 표기하면, $d = 3$ 일 때 $\ell = 1, \dots, 2^d$ 에 대해 $\mathbf{c}_1 = (1, 0, 0)^\top$, $\mathbf{c}_2 = (0, 1, 0)^\top$, $\mathbf{c}_3 = (0, 0, 1)^\top$, $\mathbf{c}_4 = (1, 1, 0)^\top$, $\mathbf{c}_5 = (1, 0, 1)^\top$, $\mathbf{c}_6 = (0, 1, 1)^\top$, $\mathbf{c}_7 = (1, 1, 1)^\top$, $\mathbf{c}_8 = (0, 0, 0)^\top$ 의 점프 조합이 발생한다. 따라서 Z_{it} 로 이루어진 행렬 \mathbf{Z}_t 의 대각원소는 8개의 점프 조합 중 하나가 된다. 이 때 $\ell = 1, \dots, 8$ 인 점프 조합에 대한 확률은 $p_{\ell t} = P(\text{diag}(\mathbf{Z}_t) = \mathbf{c}_\ell)$ 이고 $\sum_{\ell=1}^{2^d} p_{\ell t} = 1$ 을 만족한다. 먼저 자산 수익률 \mathbf{Y}_t 을 생성하기 위해, 점프지시변수 Z_{it} 는 점프가 발생할 확률이 $\pi_i = 0.1$ 인 베르누이 사전 분포를 따른다고 가정하였고, 점프가 발생하지 않는 경우 \mathbf{Y}_t 는

$$N_3 \left(\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 & 0.4 \\ 0.5 & 0.4 & 1.2 \end{pmatrix} \right)$$

와 같은 다변량 정규분포에서 추출하고, 점프가 발생하는 경우 \mathbf{Y}_t 는 다음과 같이 다변량 비대칭 라플라스 분포에서 추출된 점프크기가 더해진 분포에서 추출한다.

$$N_3 \left(\begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0.3 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 & 0.4 \\ 0.5 & 0.4 & 1.2 \end{pmatrix} \right) + \mathcal{AL}_3 \left(\begin{pmatrix} -0.4 \\ -0.3 \\ -0.2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 5.7 & 8 \\ 5.7 & 16 & 10 \\ 8 & 10 & 25 \end{pmatrix} \right).$$

이 때 다변량 비대칭 라플라스 분포의 모수 π 에 대한 진 사전분포는 점프의 빈도가 작다는 정보를 반영하도록 선정하고, 나머지 모수에 대한 진 사전분포는 그 영향을 최소화하기 위해 다음과 같이 퍼지는 형태로 선정한다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu} | \boldsymbol{\Sigma} &\sim N_3(\mathbf{0}, 100\boldsymbol{\Sigma}), \\ \boldsymbol{\Sigma} &\sim \text{Inv-Wishart}_3 \left(5, \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 \end{pmatrix} \right), \\ \boldsymbol{\mu}_J | \boldsymbol{\Sigma}_J &\sim N_3(\mathbf{0}, 100\boldsymbol{\Sigma}_J), \\ \boldsymbol{\Sigma}_J &\sim \text{Inv-Wishart}_3 \left(5, \begin{pmatrix} 10 & 5 & 5 \\ 5 & 10 & 5 \\ 5 & 5 & 10 \end{pmatrix} \right), \\ \pi_i &\sim \text{Beta}(1, 10), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

이렇게 만들어진 모의실험 자료에 대해 제안된 붕괴된 깃스 샘플러를 서로 다른 두 개의 초깃값을 이용하여 각각 10,000번의 반복을 거쳐 시행하였고, 붕괴된 깃스 샘플러의 수렴 여부를 Figure 4.1과 Figure 4.2에서 시각적으로 진단하였다. Figure 4.1과 Figure 4.2의 첫째 열은 각각 하나의 마르코프 연쇄의 마지막 1,000번의 마르코프 연쇄에 대한 시계열 그림이고, 둘째 열은 각각 하나의 마르코프 연쇄에 대한 자기상관 그림이다. 여기서 $\boldsymbol{\mu}$ 과 $\boldsymbol{\Sigma}$ 의 경우 빠른 수렴속도를 보이는 반면, $\boldsymbol{\mu}_J$ 과 $\boldsymbol{\Sigma}_J$ 의 경우 상대적으로 강한 자기상관과 느린 수렴속도를 보임을 확인할 수 있다. 붕괴된 깃스 샘플러의 수렴여부를 정

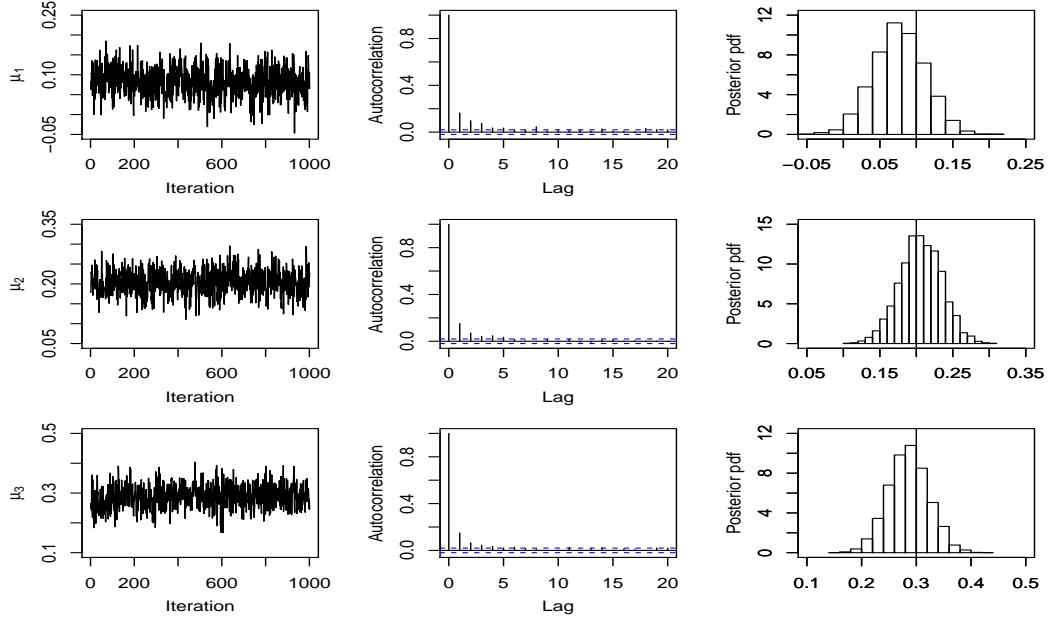
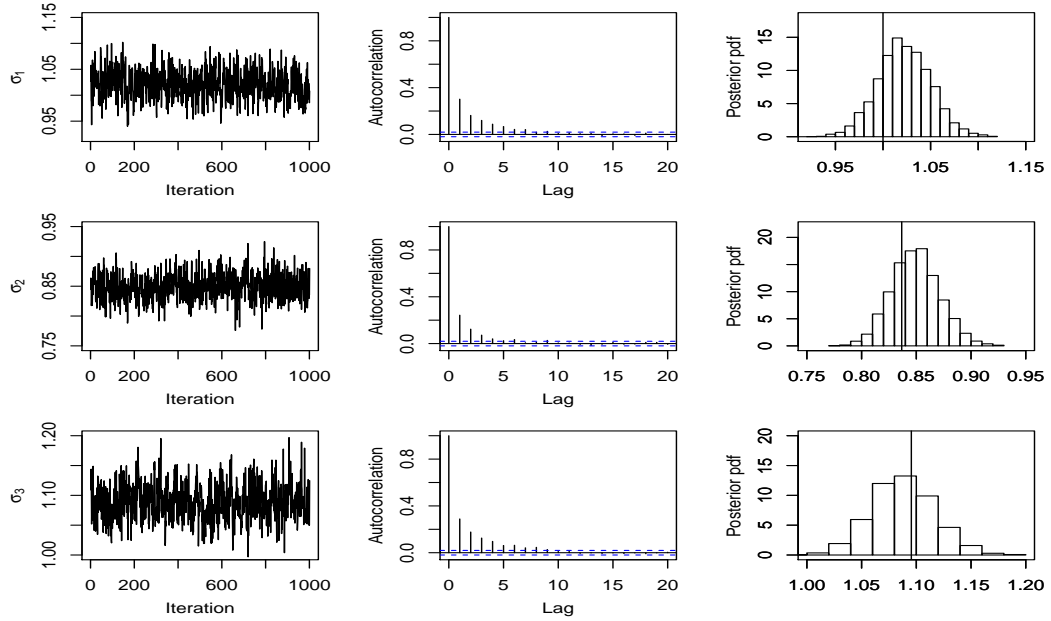
(a) $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^\top$ (b) $\text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^\top$

Figure 4.1. Mixing plot, autocorrelation plot, and marginal posterior probability function for diffusion parameters (a) $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)^\top$ and (b) $\text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}^{1/2}) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)^\top$ of the proposed jump diffusion model via the Gibbs sampler.

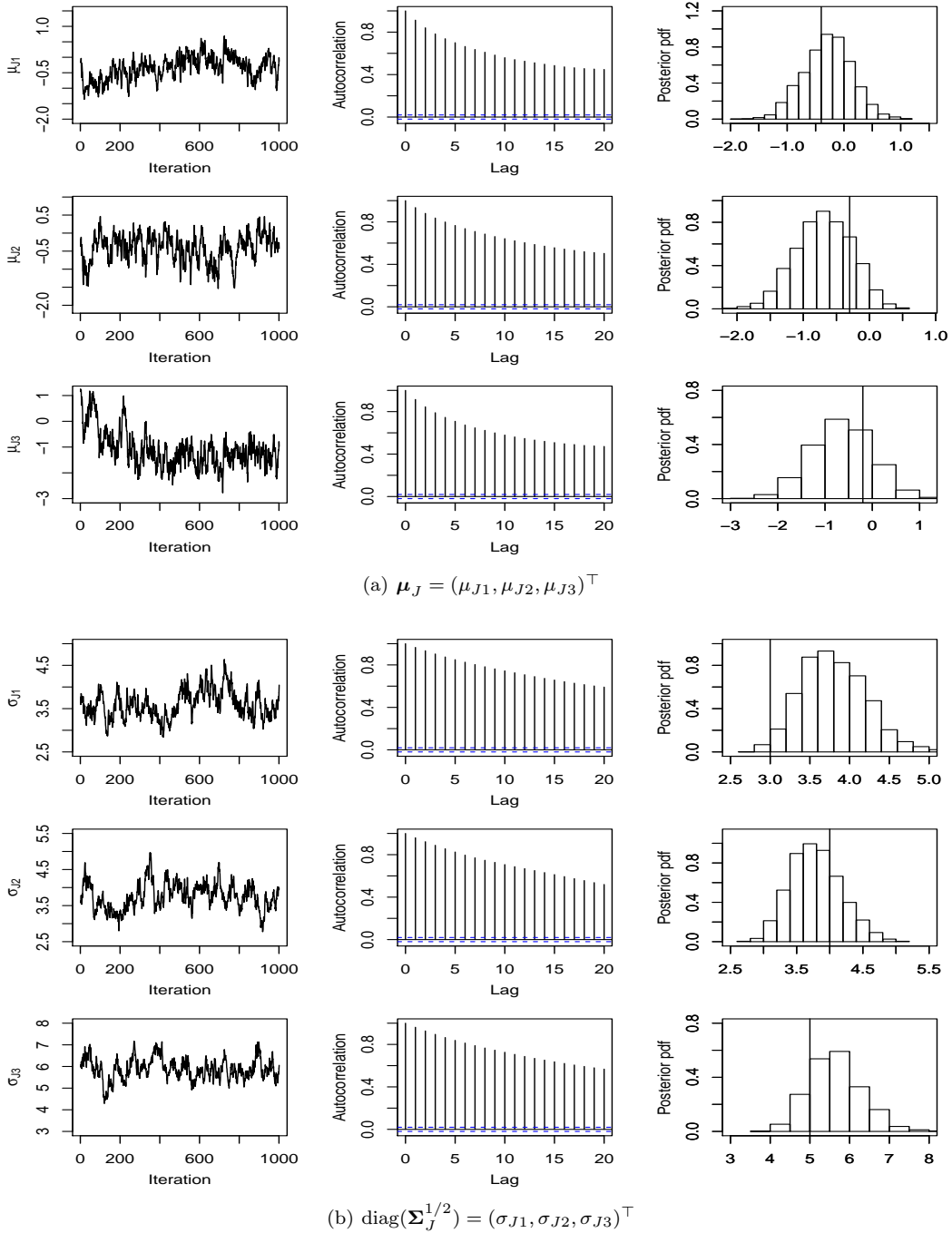


Figure 4.2. Mixing plot, autocorrelation plot, and marginal posterior probability function for diffusion parameters (a) $\boldsymbol{\mu}_J = (\mu_{J1}, \mu_{J2}, \mu_{J3})^\top$ and (b) $\text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_J^{1/2}) = (\sigma_{J1}, \sigma_{J2}, \sigma_{J3})^\top$ of the proposed jump diffusion model via the Gibbs sampler.

Table 5.1. Posterior summary statistics for parameters associated with KOSPI, S&P500, and Nikkei225 returns from January 3, 2005 to September 30, 2015 (in %/day)

	평균	표준편차	2.5%	중앙값	97.5%	$\hat{R}^{1/2}$
μ_1	0.0772	0.0246	0.0275	0.0771	0.1249	1.0001
μ_2	0.0592	0.0198	0.0200	0.0592	0.0985	0.9999
μ_3	0.0577	0.0286	0.0020	0.0580	0.1136	0.9999
σ_1	1.1014	0.0209	1.0618	1.1010	1.1433	1.0002
σ_2	0.8475	0.0187	0.8122	0.8472	0.8829	1.0016
σ_3	1.2768	0.0224	1.2341	1.2764	1.3214	1.0000
μ_{J1}	-0.3929	0.1714	-0.7354	-0.3885	-0.0676	1.0006
μ_{J2}	-0.2977	0.2012	-0.6937	-0.2981	0.0993	0.9999
μ_{J3}	-0.3847	0.1927	-0.7701	-0.3814	-0.0191	1.0002
σ_{J1}	2.3836	0.1591	2.0975	2.3781	2.7153	1.0102
σ_{J2}	3.0574	0.1944	2.6911	3.0490	3.4583	1.0064
σ_{J3}	2.7307	0.1904	2.3619	2.7294	3.1126	1.0014

량적으로 진단하기 위해 두 개의 마르코프 연쇄에 대한 잠재적 척도축소인자 $\hat{R}^{1/2}$ (Gelman과 Rubin, 1992)을 확인한 결과, 모든 모수에 대해 1에 충분히 가까운 값을 가지는 것을 확인하였다. 따라서, Figure 4.1과 Figure 4.2의 셋째 열에서는 붕괴된 깃스 샘플러를 이용한 두 개의 마르코프 연쇄에서 각각 후반 5000번의 마르코프 연쇄를 취합하여 사후분포를 구하였다. Figure 4.1과 Figure 4.2의 셋째 열에서 보여지듯이 모든 모수가 참값에 근사하게 추정되었음을 확인할 수 있다.

5. 사례연구

정보의 신속성과 주식시장의 개방화로 인해 세계 금융시장들 간의 수익률 동조화 효과 및 변동성 이전 현상이 일어나, 여러 자산에 대한 통합적인 분석의 중요성이 대두되었다. 이에 본 논문에서 제한한 붕괴된 깃스 샘플러를 한국, 미국, 그리고 일본의 실제 금융시장의 자료에 적용하여 3차원의 다변량 비대칭 라플라스 점프확산 모형을 추론하고자 한다. 사례연구를 위해 사용된 금융시장의 자료는 각 주식시장의 대표 지수인 KOSPI 지수, S&P500 지수 및 Nikkei225 지수이고, 2005년 1월 3일부터 2015년 9월 30일까지 총 2452일간 관찰된 일별 자료이다. 일별 로그-수익률 S_t 를 t 시점에서의 주가지수라 했을 때 로그 차분 수익률은 $Y_t = \ln(S_t/S_{t-1}) \times 100$ 로 산출하였다.

다변량 비대칭 라플라스 점프확산 모형에 대한 베이지안 추론 결과는 Table 5.1에 나타나 있다. Table 5.1은 붕괴된 깃스 샘플러의 두 개의 서로 다른 초깃값을 갖는 마르코프 연쇄로부터 각각 후반 5000번을 취합하여 얻어진 모수의 사후분포에 대한 요약값을 보여준다. Table 5.1의 마지막 열에서는 모형의 모든 모수에 대한 $\hat{R}^{1/2}$ 의 값이 1에 충분히 가깝기 때문에 붕괴된 깃스 샘플러가 안정적으로 수렴하고 있음을 보여준다. Figure 5.1은 KOSPI 지수, S&P500 지수, 그리고 Nikkei225 지수의 점프가 발생했을 때 추정된 점프 크기를 나타낸 히스토그램과 정규 분위수-분위수 그림이다. 여기서 단일 지수의 변동성이 음의 방향으로 더 두꺼운 꼬리를 갖는 비대칭적 점프과정을 가진다는 것을 알 수 있고, 이는 단일 지수가 긍정적인 효과에 비해 부정적인 효과에 더 큰 변동성으로 반응한다는 것을 의미한다.

Table 5.2는 각각의 점프 조합이 발생하는 횟수에 대한 요약값을 보여준다. 2005년 1월 3일부터 2015년 9월 30일까지 총 2452일 동안 S&P500 지수의 개별 점프가 가장 빈번하게 발생하였고, KOSPI 지수의 개별 점프는 상대적으로 드물게 발생하였다. 두 개의 지수가 동시에 점프하는 상관 점프 중에서는 KOSPI 지수와 S&P500 지수의 상관 점프 발생 횟수가 평균적으로 가장 높으며, 이는 국내 증권시

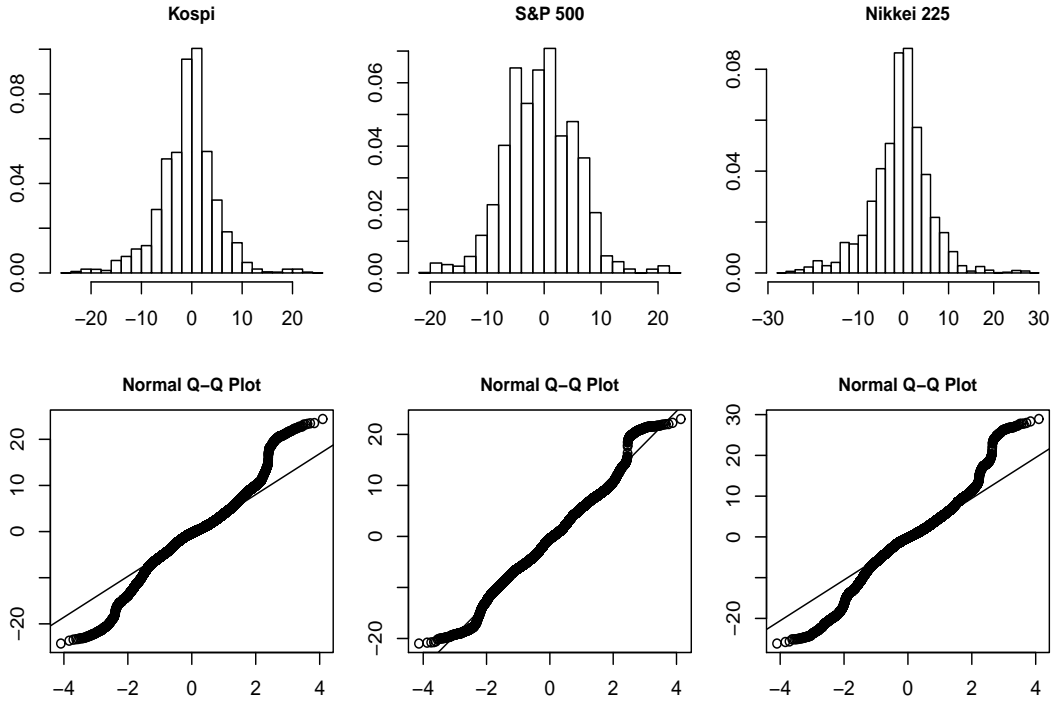


Figure 5.1. Histogram and Normal Quantile-Quantile plot for jump magnitude estimates of KOSPI, S&P500, and Nikkei225.

Table 5.2. Posterior summary statistics for 2^d possible jump configurations, denoted by \mathbf{c}_ℓ for $d = 3$ and $\ell = 1, \dots, 2^d$. The total number of each jump configuration for time is represented by $H_\ell = \sum_{t=1}^{2452} I\{\text{diag}(\mathbf{Z}_t) = \mathbf{c}_\ell\}$, where $\mathbf{c}_1 = (1, 0, 0)^\top$, $\mathbf{c}_2 = (0, 1, 0)^\top$, $\mathbf{c}_3 = (0, 0, 1)^\top$, $\mathbf{c}_4 = (1, 1, 0)^\top$, $\mathbf{c}_5 = (1, 0, 1)^\top$, $\mathbf{c}_6 = (0, 1, 1)^\top$, $\mathbf{c}_7 = (1, 1, 1)^\top$, and $\mathbf{c}_8 = (0, 0, 0)^\top$

	평균	표준편차	2.5%	중앙값	97.5%	$\hat{R}^{1/2}$
H_1	159.5305	12.1671	136	159	184	1.0005
H_2	204.8619	12.8284	180	205	230	1.0018
H_3	170.9724	12.4069	147	171	196	1.0002
H_4	31.3190	4.6645	22	31	41	1.0003
H_5	28.4663	4.6214	20	28	38	1.0000
H_6	27.5278	4.5669	19	27	37	1.0009
H_7	18.4279	2.5670	14	18	24	1.0009
H_8	1810.8942	21.0411	1770	1811	1852	1.0022

장과 미국 증권시장이 밀접한 관련이 있음을 보여준다. KOSPI 지수, S&P500 지수, 그리고 Nikkei225 지수가 모두 점프하는 공통 점프의 발생 횟수에 대한 사후평균값은 18.4이다. Figure 5.2는 지수별 점프 크기에 대한 시계열 그림을 나타낸다. 여기서 2008년 말에 발생한 공통 점프의 폭이 가장 크다는 것을 확인 할 수 있다. 이는 2008년 10월 미국에서 발생한 글로벌 금융위기의 충격이 국내 주가수익률 뿐만 아니라 일본의 주가수익률에 영향을 주었음을 나타내고, 특히 그 영향력이 음의 방향으로 더욱 크다는 점을 시사한다.

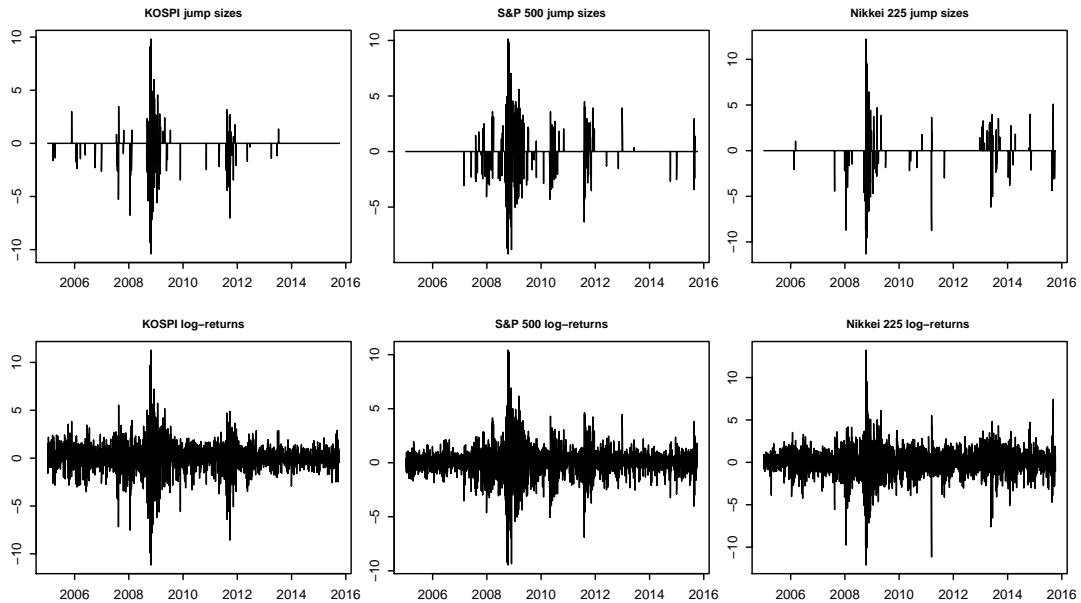


Figure 5.2. Median of jump size estimations for KOSPI, S&P500, and Nikkei225 index and actual log-returns over the same period from January 3, 2005 to October 8, 2015.

6. 결론

본 논문에서는 모든 점프 조합을 반영하는 다변량 비대칭 라플라스 점프확산 모형의 추론을 위한 베이저안 방법을 제안하였다. 특히 다변량 비대칭 라플라스 분포의 추정을 위해 자료 확장 기법을 제안하고 붕괴된 깃스 샘플러를 유도하였다. 본 논문에서 제안된 방법은 닫힌 해로 존재하지 않는 다변량 비대칭 라플라스 분포의 결합확률밀도 함수의 한계점을 극복하고, 점프 크기의 모수에 대한 추정을 가능하게 하였다. 또한 모든 가능한 조합의 점프를 고려함으로써 여러 자산가격의 비대칭적 변동을 통합적으로 설명할 수 있었다. 본 논문에서 개발된 방법은 모의실험 자료 및 한국의 KOSPI 지수, 미국의 S&P500 지수, 그리고 일본의 Nikkei225 지수에 적용하여 검증되었다.

모의실험과 사례연구의 결과에 비추어 볼 때 본 논문에서 제안된 깃스 샘플러는 수렴 속도가 느린 경향을 보인다. 깃스 샘플러는 모형 요소들 간의 강한 사후 상관성이 존재하는 경우 비효율성이 발생한다고 알려져 있다 (Park과 van Dyk, 2009; van Dyk와 Park, 2011). 이에 대한 연구로는 Liu 등 (1994)이 제안한 깃스 샘플러의 블록화 또는 그룹화, van Dyk (2000)이 제안한 깃스 샘플러의 내재화가 있으며 Liu (1994)의 붕괴화 및 Meng과 van Dyk (1999)이 제안한 깃스 샘플러의 소외화, Liu와 Wu (1999)이 제안한 모수확장, van Dyk와 Park (2008)이 제안한 부분붕괴 기법 등이 연구되어 있다. 본 논문에서 제안한 깃스 샘플러의 단점을 보완할 수 있는 방법으로 효율적인 MCMC 방법의 개발이 이루어져야 하며, 이를 향후 과제로 남긴다.

References

- Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities, *The Journal of Political Economy*, 637–654.

- Duffie, D. and Pan, J. (2001). Analytical value-at-risk with jumps and credit risk, *Finance and Stochastics*, **5**, 155–180.
- Frame, S. J. and Ramezani, C. A. (2014). Bayesian estimation of asymmetric jump-diffusion processes, *Annals of Financial Economics*, **9**, 1450008.
- Gelman, A. and Rubin, D. B. (1992). Inference from iterative simulation using multiple sequences, *Statistical Science*, 467–472.
- Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, **6**, 327–343
- Huang, Z. and Kou, S. G. (2006). First passage times and analytical solutions for options on two assets with jump risk, Columbia University.
- Hull, J. and White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *The Journal of Finance*, **42**, 281–300
- Jacquier, E., Johannes, M., and Polson, N. (2007). MCMC maximum likelihood for latent state models, *Journal of Econometrics*, **137**, 615–640.
- Johannes, M. and Polson, N. (2002). MCMC methods for financial econometrics, *The Handbook of Financial Econometrics*, **65**.
- Kotz, S., Kozubowski, T., and Podgórski, K. (2012). *The Laplace Distribution and Generalizations: A Revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering, and Finance*, Springer Science & Business Media, New York.
- Kou, S. G. (2002). A jump-diffusion model for option pricing, *Management Science*, **48**, 1086–1101.
- Kou, S. G. (2007). Jump-diffusion models for asset pricing in financial engineering, *Handbooks in Operations Research and Management Science*, **15**, 73–116
- Liu, J. S. (1994). The collapsed Gibbs sampler in Bayesian computations with applications to gene regulation problem, *Journal of the American Statistical Association*, **89**, 958–966.
- Liu, J. S., Wong, W. H., and Kong, A. (1994). Covariance structure of the Gibbs sampler with applications to comparisons of estimators and augmentation schemes, *Biometrika*, **81**, 27–40.
- Liu, J. S. and Wu, Y. N. (1999). Parameter expansion for data augmentation, *Journal of the American Statistical Association*, **94**, 1264–1274.
- Meng, X.-L. and van Dyk, D. A. (1999). Seeking efficient data augmentation schemes via conditional and marginal augmentation, *Biometrika*, **86**, 301–320.
- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics*, **3**, 125–144.
- Park, T. and Lee, Y. (2014). Efficient Bayesian inference on asymmetric jump-diffusion models, *Korean Journal of Applied Statistics*, **27**, 959–973
- Park, T. and Min, S. (2016). Partially collapsed Gibbs sampling for linear mixed-effects models, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **45**, 165–180
- Park, T. and van Dyk, D. A. (2009). Partially collapsed Gibbs samplers: Illustrations and applications, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **18**, 283–305.
- Ramezani, C. A. and Zeng, Y. (1998). Maximum likelihood estimation of asymmetric jump-diffusion process: Application to security prices, Working Paper, Department of Mathematics and Statistics, University of Missouri, Kansas City, Available from: <http://ssrn.com/abstract=606361>.
- Ramezani, C. A. and Zeng, Y. (2007). Maximum likelihood estimation of the double exponential jump diffusion process, *Annals of Finance*, **3**, 487–507.
- Tanner, M. A. and Wong, W. H. (1987). The calculation of posterior distributions by data augmentation, *Journal of the American Statistical Association*, **82**, 528–540.
- van Dyk, D. A. and Park, T. (2008). Partially collapsed Gibbs samplers: theory and methods, *Journal of the American Statistical Association*, **103**, 790–796.
- van Dyk, D. A. (2000). Nesting EM algorithms for computational efficiency, *Statistical Sinica*, **10**, 203–225.
- van Dyk, D. A. and Park, T. (2011). Partially collapsed Gibbs sampling and path-adaptive Metropolis-Hastings in high-energy astrophysics, *Handbook of Markov Chain Monte Carlo* (383–400), Chapman & Hall/CRC Press, New York.

다변량 비대칭 라플라스 점프확산 모형의 베이지안 추론

이영은^a · 박태영^{a,1}

^a연세대학교 응용통계학과

(2015년 12월 14일 접수, 2015년 12월 22일 수정, 2015년 12월 23일 채택)

요약

비대칭 점프확산 모형은 자산 가격의 비대칭적 변동을 효과적으로 설명하는 모형으로 활용되어 왔다. 그러나 다변량 모형으로 확장한 다변량 비대칭 라플라스 점프확산 모형은 가능도함수가 닫힌 해로 존재하지 않아 모형의 추론에 한계가 존재하였다. 본 논문에서는 이러한 한계점을 극복하기 위해 자료 확장 기법을 제안하고 새로운 베이지안 추론 방법을 개발한다. 본 논문에서 제안된 모형은 단일 점프와 공통 점프 뿐만 아니라 모든 가능한 조합으로 발생하는 점프를 반영한 확장된 다변량 비대칭 라플라스 점프확산 모형이다. 이러한 모형을 분석하기 위해 붕괴된 깃스 샘플러를 고안한 베이지안 방법을 개발하였다. 본 논문에서 제안된 모형과 방법을 모의실험 자료 및 2005년 1월 3일부터 2015년 9월 30일까지 관찰된 일별 KOSPI, S&P500, 그리고 Nikkei225에 적용하여 효율성을 검증하였다.

주요용어: 베이지안 분석, 붕괴된 깃스 샘플러, 자료 확장, 마르코프 연쇄 몬테카를로, 다변량 비대칭 라플라스 분포

이 논문은 2015년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (NRF-2014 R1A1A2056049).

¹교신저자: (03722) 서울시 서대문구 연세로 50, 연세대학교 상경대학 응용통계학과.

E-mail: tpark@yonsei.ac.kr