J. Soc. Korea Ind. Syst. Eng Vol. 39, No. 1 : 81-90, March 2016
http://dx.doi.org/10.11627/jkise.2016.39.1.081
ISSN : 2005-0461(print)
ISSN : 2287-7975(online)

Analysis of a Controllable Queueing Model Operating under the Alternating Operating Policies

Hahn-Kyou Rhee†

Hannam University

변동 운용방침이 적용되는 조정가능한 대기모형 분석

이 한 교†

한남대학교

Different from general operating policies to be applied for controllable queueing models, two of three well-known simple N, T and D operating policies are applied alternatingly to the single server controllable queueing models, so called alternating (NT), (ND) and (TD) policies. For example, the alternating (ND) operating policy is defined as the busy period is initiated by the simple N operating policy first, then the next busy period is initiated by the simple D operating policy and repeats the same sequence after that continuously. Because of newly designed operating policies, important system characteristic such as the expected busy and idle periods, the expected busy cycle, the expected number of customers in the system and so on should be redefined. That is, the expected busy and idle periods are redefined as the sum of the corresponding expected busy periods and idle periods initiated by both one of the two simple operating policies and the remaining simple operating policy, respectively. The expected number of customers in the system is represented by the weighted or pooled average of both expected number of customers in the system when the predetermined two simple operating policies are applied in sequence repeatedly. In particular, the expected number of customers in the system could be used to derive the expected waiting time in the queue or system by applying the famous Little's formulas. Most of such system characteristics derived would play important roles to construct the total cost functions per unit time for determination of the optimal operating policies by defining appropriate cost elements to operate the desired queueing systems.

Keywords : Controllable Queueing Model, Simple Operating Policy, Alternating Operating Policy, Busy Period, Number of Customers in the System

1. 서 론

서비스를 받기 위해 기다리는 고객에 관련된 사항을 수리적으로 분석하기 위해 개발된 대기모형을 보다 효율적으로 운용하기 위한 다양한 방법들이 제시되고 있다. 효율적 운용을 위한 접근방법들의 가장 기본적인 주안점은 시스템내부에 서비스를 기다리는 고객이 없어 휴무상태로 대기하고 있는 server를 보다 효과적으로 활용하느냐에 주어져 있다고 볼 수 있다. 이러한 관점에 따라 대기모형은 추후 도착할 고객에게 즉시 서비스를 제공할 수 있도록 server가 항상 대기상태에 있는 일반적 대기모형(ordinary queueing model)과는 달리 휴무상태에 있는 server를 다른 업무를 부여하여 효율적으로 활용할 수 있는 조정가능한 대기모형(controllable queueing model)으로 구분된다. 다시 말해 분류된 두 종류 대기모형들의 가

Received 13 January 2016; Finally Revised 4 March 2016; Accepted 5 March 2016
† Corresponding Author : hkrhee@hnu.kr

장 큰 차이점은 서비스를 받기 위해 기다리는 고객이 대기시스템에 없는 경우 server는 서비스창구를 폐쇄하고 다른 업무를 수행하도록 한 것이다. 따라서 서비스창구가 폐쇄된 이후에 대기시스템에 도착하는 고객들은 즉시 서비스를 받을 수 없다는 점이다. 이렇듯 고객들의 불편함을 감수하고도 조정가능한 대기모형이 여전히 중요하게 고려되는 이유는 대기시스템의 운영자의 관점에서 찾을 수 있다. 즉, 일반적 대기모형의 경우 대기시스템 운영자 입장에서는 서비스를 받으려는 고객이 없음에도 불구하고 서비스창구를 항상 운용해야 함으로 server의 업무활용도가 낮아지게 되는 문제점을 간과할 수 없게 된다. 일반적 대기모형에서 나타나는 이러한 문제점, 즉 server의 업무활용도를 보다 더 향상시키기 위해 제안된 조정가능한 대기모형에서는 서비스를 받기 위해 대기시스템에서 기다리는 고객이 없으면 즉시 서비스창구를 폐쇄한 다음, server를 다른 업무에 활용할 수 있도록 함에 주된 목적이 있다. 또한 일단 폐쇄된 창구는 미리 규정된 조건이 만족되면 server는 수행중인 다른 업무를 중단하고 서비스창구로 복귀하여 서비스를 기다리는 고객들에게 다시 서비스를 제공하도록 하고 있다. 따라서 폐쇄된 서비스창구를 다시 재개할 수 있도록 미리 규정된 조건이 필요하게 되는데 이를 조정가능한 대기모형의 운용방침(operating policy)라고 한다. 다양한 형태의 운용방침이 제안되어 활용되고 있으며[18], 이러한 운용방침들은 시스템 상태를 표현하는 입력변수의 개수에 따라 단순 운용방침(simple operating policy), 이변수 운용방침(dyadic operating policy) 그리고 삼변수 운용방침(triadic operating policy)으로 분류할 수 있다.

가장 대표적인 단순 운용방침에는 Yadin과 Naor[19]가 제안한 것으로 대기시스템 내부에 서비스를 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스창구는 그 후 서비스를 받기 위해 기다리는 고객의 수가 처음으로 N($N \geq 1$)명이 되는 순간 폐쇄된 서비스창구의 운용을 재개하여 기다리는 고객에게 서비스를 제공하는 단순 N 운용방침(N-policy)이 있으며, Heyman[6] 등이 제안한 서비스창구가 폐쇄된 후 T 단위시간이 경과한 뒤, 만약 서비스를 기다리는 고객이 있을 경우 서비스창구의 운용을 재개하여 서비스의 제공이 개시되는 단순 T 운용방침(T-policy) 그리고 마지막으로 Balachandran과 Tijms[2]이 제안한 것으로 서비스창구가 폐쇄된 이후 시스템 내부에서 서비스를 기다리는 고객의 예상되는 서비스의 시간의 합이 처음으로 D 단위시간을 초과하는 순간부터 기다리는 고객에게 서비스제공을 재개하는 단순 D 운용방침(D-policy)이 있다.

기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스창구의 운용을 재개하기 위해 단순 운용방침이 적용되는 조정가능한 대기모형은 server를 일반적 대기모형 보다는 효율적으로 활용할 수 있는 장점이 있다. 그러나 시스템의 상태를 나타내는 다양한 조건들 중에 단지 한 종류의 대기시스템 상태에만 의존하여 폐쇄된 서비스창구의 운용이 재개되기 때문에 시스템 운영에 충분한 유연성이 부여되었다고 볼 수 없다. 이러한 문제점을 보완하기 위해 하나의 단순 운용방침에 또 다른 하나의 단순 운용방침을 적절하게 결합한 새로운 형태의 운용방침, 즉 이변수 운용방침(dyadic operating policy)이 Gakis et al.[4]에 의해 제안되었다. 폐쇄된 서비스창구의 운용이 재개될 수 있는 조건에 두 종류의 단순 운용방침을 활용함으로써 유연성이 증가된 이변수 운용방침은 포함된 두 종류의 단순 운용방침이 특이한 형태로 결합된 것으로 Min(N, T), Min(T, D), Min(N, D), Max(N, T), Max(T, D) 그리고 Max(N, D) 운용방침으로 표현된다. 이러한 이변수 운용방침은, 예를 들면, Min(N, D) 운용방침이 적용될 경우, 서비스를 기다리는 고객이 없어 폐쇄된 서비스창구는 N 혹은 D 운용방침에 따르는 조건 중 어느 것이나 먼저 만족되는 순간 폐쇄된 서비스창구의 운용을 재개하여 즉시 서비스 제공이 개시되어야 하며, Max(N, D) 운용방침이 적용될 경우에는 N 운용방침과 D 운용방침에 따르는 두 조건 모두가 처음으로 만족될 때 폐쇄된 서비스창구의 운용이 재개되어 서비스 제공이 즉시 개시되어야 한다. 다른 이변수 운용방침도 유사한 의미로 정의된다[4, 10, 16]. 이미 언급된 것처럼, 이러한 이변수 운용방침은 단순 운용방침보다는 server에게 혹은 시스템 운용에 어느 정도의 유연성을 부여할 수 있다는 사실로 인해 최근에는 server에게 혹은 시스템운용에 보다 많은 유연성을 확보하기 위한 일환으로 세 가지 단순 운용방침 모두가 결합된 Min(N, T, D), Max(N, T, D) 그리고 Med(N, T, D) 운용방침과 같은 삼변수 운용방침(triadic operating policy)이 Rhee[13, 14, 15]에 의해 제안되었다. 이변수 운용방침들과 유사하게 서비스를 기다리는 고객이 없어 창구가 폐쇄된 후 N 혹은 T 혹은 D 운용방침이 적용되는 세 조건 중 어느 것이나 가장 먼저 충족되는 순간, 혹은 세 조건 모두가 만족되는 순간, 혹은 세 조건 중 어느 두 조건이 만족되는 순간 server는 수행중인 부수업무를 중단하고 폐쇄된 서비스창구에 복귀하여 서비스를 기다리는 고객들에게 서비스 제공을 개시하여야 한다[11].

다양한 형태의 운용방침을 고려할 경우, 고객 혹은 운영자의 관점에서 보면 상호 상반된 장단점으로 인해 실제상황에 적용하기 위해서는 신중한 선택이 필요하다고 할 수 있다. 또한 적용되는 운용방침에 따라 많은 입력변수가 복잡 다양하게 결합되어 있어 대기시스템의 분석과 활용에 커다란 어려움이 동반됨을 고려해야 한다. 이러한 구조적인 문제에 기초하여 보다 현실적인 새로운 운용방침을 개발하여 적용하는 것이 또 하나의 필요한 전략일 수 있다.

본 논문에서는 제 2장에서 새로운 형태의 변동 이변수 (NT), (ND) 그리고 (TD) 운용방침을 정의한 후 적용되는 조정가능한 M/G/1 대기모형에 관련된 연구의 목적이 기술되고 그리고 제 3장에서는 연구에 적용되는 대기시스템이 정의된다. 또한 제 4장과 제 5장에서는 제안된 변동 이변수 운용방침이 적용되는 연구대상의 대기모형 분석을 통하여 필요한 시스템 특성치를 유도하여 제공함으로써 앞으로의 많은 연구에 필요한 기본 정보를 확보하고자 한다.

2. 연구 목적

조정가능한 대기모형을 실제 산업현장에서 직접 활용하기 위해서는 채택된 운용방침이 적용되었을 때 기대되는 비용과 효과를 고려하여 운용방침에 포함되어 있는 입력변수의 최적해를 결정한 다음 그 결과에 따라 운용하는 것이 유리하다. 운용방침에 포함되어 있는 입력변수의 최적해를 유도하기 위한 과정에 필요한 시스템 특성치에는 시스템 내부에 있는 고객수의 기댓값, 고객에게 서비스를 제공하고 있는 server 수의 기댓값, 대기모형이 운용될 때의 busy period의 기댓값, 등이 포함된다. 여기에서 busy period는 서비스를 기다리고 있는 첫 고객에게 서비스를 제공하기 시작하는 순간부터 서비스를 기다리는 고객이 없어 서비스창구를 폐쇄할 때까지의 시간간격으로 정의되며 idle period는 폐쇄된 서비스창구가 다시 재개될 때까지의 시간 간격을 말하며 busy cycle은 동일하게 분포하는 하나의 busy period와 동일하게 분포하는 하나의 idle period와의 합을 의미한다[12].

이러한 중요한 시스템 특성치들은 한 사람의 고객이 시스템 내부에서 단위시간을 기다리는데 필요한 비용, 한 사람의 server가 고객에게 단위시간의 서비스를 제공하는데 필요한 비용 그리고 서비스창구를 폐쇄하고 재개하는데 필요한 비용요소 등과 결합되어 시스템 운용에 필요한 단위시간당 기대되는 총비용함수를 구성하게 된다. 그렇지만 단위시간당 기대되는 총비용함수를 구성하기 위해 필요한 시스템 특성치는 운용방침에 포함되어 있는 입력변수의 수가 증가하거나 구조적으로 복잡한 경우 대기모형의 분석을 어렵게 만들어 최적 운용방침의 결정이 불가능해질 가능성이 존재하는 특징이 있다.

언급된 현실적인 어려움을 고려하고 또한 현장에서의 적용가능성을 높일 수 있는 새로운 형태의 변동 이변수 (NT), (ND) 그리고 (TD) 운용방침을 제안하며 다음과 같이 정의한다. 예를 들어, 변동 이변수 (NT) 운용방침이 적용되는 경우, 시스템에 서비스를 기다리는 고객이 없어 다른 업무를 수행하기 위해 폐쇄된 서비스창구는 단순 N 운용방침에 따른 새로운 busy period가 시작되어 서비스를 기다리는 고객이 없을 때 종료된다. 이후 다시 서비스창구를 재개하기 위해서는 T 단위시간 동안 최소 한 명의 고객이 시스템에 도착하면 새로운 busy period가 시작되는 단순 T 운용방침이 적용되며 다시 서비스를 기다리는 고객이 없으면 busy period가 종료된다. 추후 단순 N 운용방침과 단순 T 운용방침에 따른 순서로 새로운 busy period가 반복된다. 이러한 변동 이변수 운용방침이 적용되는 대기모형은 다양한 영역에서 활용될 수 있으며 특히 설비관리 혹은 교체문제를 해결하는데 활용될 수 있다[5, 9]. 그러기 위해서는 시스템 특성치는 일반적인 대기모형에서 정의된 개념과는 달리 다음과 같이 새롭게 정의되어야 한다.

(i) busy period : server가 고객에서 서비스를 제공하는 시간 간격으로 정의되기 때문에 먼저 적용되는 단순 운용방침에 따른 busy period와 나중에 적용되는 또 다른 단순 운용방침에 따른 busy period의 합으로 정의된다. 예를 들면 변동 이변수 (NT) 운용방침이 적용되는 경우, busy period는 단순 N 운용방침에 따른 busy period와 단순 T 운용방침에 따른 busy period의 합으로 표현된다.

(ii) idle period : 서비스창구가 폐쇄되어 있는 시간으로 먼저 적용되는 운용방침에 따른 busy period 직전의 idle period와 나중에 적용되는 또 다른 운용방침에 따른 busy period 직전의 idle period로 구성된다.

(iii) busy cycle : 같은 형태로 반복되는 하나의 busy period와 하나의 idle period들의 합으로 정의되기 때문에 여기에서는 먼저 적용되는 운용방침에 따른 busy period와 idle period 그리고 나중에 적용되는 또 다른 단순 운용방침에 따른 busy period와 idle period합으로 표현된다. 다시 말해, 먼저 적용되는 단순 운용방침에 따른 busy cycle과 나중에 적용되는 또 다른 운용방침에 따른 busy cycle의 합으로 주어진다.

(iv) 시스템 내부에 있는 고객수의 기댓값 : 먼저 적용되는 운용방침에 따른 busy cycle 동안의 시스템 내부에 있는 고객수의 기댓값과 나중에 적용되는 또 다른 운용방침에 따른 busy cycle 동안의 시스템 내부에 있는 고객수의 기댓값과의 비중평균(weighted average)으로 표현된다.

제안된 변동 이변수 운용방침에 따라 위에서 새롭게 정의된 시스템 특성치들을 유도하여 제공함으로써 보다 심도 있는 대기모형의 분석을 위한 기본정보로 활용할 수 있도록 함을 본 연구의 목적으로 설정한다.

3. 대기모형의 정의

변동 이변수 운용방침이 적용되는 안정 상태(steady-state)에 있는 M/G/1 대기모형에 관하여 다음과 같은 사항들을 가정한다.

(i) 서비스를 받기 위해 대기시스템에 도착하는 고객들은 단위시간당 평균 λ명인 Poisson 분포에 따른다. 즉 t 단위시간 동안 시스템에 도착하는 고객의 수를 나타내는 확률변수를 X(t)라고 하면, X(t)의 확률질량함수(probability mass function)는 다음과 같이 주어진다.

$$P[X(t)=x] = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^x}{x!},\ x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots \quad (1)$$

다시 말해, 식 (1)은 연속된 두 고객의 평균 도착시간 간격은 평균이 $\frac{1}{\lambda}$인 지수분포(exponential distribution)임을 의미한다.

(ii) 고객에게 소요되는 서비스 시간을 나타내는 확률변수는 평균과 분산이 각각 $\frac{1}{\mu}$와 σ^2인 상호독립이며 동일한(identical) 임의의 확률분포라 가정하며 확률밀도함수를 $f_{S_i}(\cdot)$라고 가정한다. 만약 서비스시간이 지수분포인 M/M/1 대기모형인 경우 $f_{S_i}(\cdot)$는 다음과 같다.

$$f_{S_i}(t) = \mu e^{-\mu t}, \qquad t \geq 0,\ \mu > 0 \quad (2)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mu^2} \quad (3)$$

(iii) $E[X_0]$, $E[B_0]$ 그리고 $E[I_0]$: 일반적(ordinary) M/G/1 대기모형의 시스템내부에 있는 고객 수, busy period 그리고 idle period의 기댓값으로 각각 정의하면 이들은 다음과 같이 주어진며, 여기에서 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$[3, 7].

$$E[X_0] = \rho + \frac{\lambda^2\sigma^2+\rho^2}{2(1-\rho)} \quad (4)$$

$$E[B_0] = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \quad (5)$$

$$E[I_0] = \frac{1}{\lambda} \quad (6)$$

M/M/1 대기모형인 경우, 식 (3)에서 주어진 σ^2을 식 (4)에 대입하면

$$E[X_0] = \frac{\rho}{1-\rho} \quad (7)$$

(iv) $P[B_0]$: 일반적(ordinary) M/G/1 대기모형에서 서비스창구가 열려있을 확률 혹은 server가 서비스창구에서 업무를 수행하고 있을(busy) 확률로 정의하면 다음이 성립하며

$$P[B_0] = \frac{E[B_0]}{E[B_0]+E[I_0]} \quad (8)$$

식 (5)와 식 (6)에서 주어진 $E[B_0]$과 $E[I_0]$를 식 (8)에 대입하면 다음과 같이 주어짐을 확인할 수 있다[4].

$$P[B_0] = \rho$$

(v) 여기에서 언급되지 않은 기타 사항들은 M/G/1 대기모형의 일반적인 가정에 따른다.

4. Busy Cycle의 분석

앞에서 언급된 바와 같이 이변수 변동 운용방침이 적용되는 조정가능한 M/G/1 대기모형에서의 busy cycle은 동일하게 반복되는 busy period와 idle period의 합으로 표현된다. 일반적으로 대기모형에서는 busy cycle은 동일하게 분포하는 하나의 busy period와 동일하게 분포하는 하나의 idle period의 합으로 주어진다. 그러나 변동 이변수 운용방침이 적용되는 경우 다른 두 단순 운용방침이 순서에 따라 반복적으로 적용되기 때문에 동일하게 반복되는 busy period와 idle period의 합은 각각의 운용방침에 따르는 busy period와 idle period의 합, 즉 다른 두 busy period와 다른 두 idle period의 합으로 정의된다. 따라서 변동 이변수 운용방침이 적용되는 대기모형에서의 busy period는 각각의 운용방침에 따른 두 busy period의 합으로 정의되며 idle period 또한 각각의 운용방침에 따른 두 idle period의 합으로 정의된다.

4.1 변동 이변수 (NT) 운용방침

변동 이변수 (NT) 운용방침이 적용되면 단순 N 운용방침에 따른 idle period와 busy period 그리고 단순 T 운용방침에 따른 idle period와 busy period의 순서로 반복된다. 따라서 보다 명확하게 표현하기 위해 $E[I_N]$, $E[B_N]$, $E[I_T]$ 그리고 $E[B_T]$를 각각 단순 N 운용방침에 따른 idle period, busy period 그리고 단순 T 운용방침에 따른 idle

period와 busy period의 기댓값으로 정의한다. 또한 변동 이변수 (NT) 운용방침이 적용될 때의 idle period, busy period 그리고 busy cycle의 기댓값을 각각 $E[B_{(NT)}]$, $E[I_{(NT)}]$, 그리고 $E[C_{(NT)}]$라 정의하면 다음이 성립한다.

$$E[B_{(NT)}] = E[B_N] + E[B_T] \tag{9}$$

$$E[I_{(NT)}] = E[I_N] + E[I_T] \tag{10}$$

$$E[C_{(NT)}] = E[B_{(NT)}] + E[I_{(NT)}] \tag{11}$$

$$= E[B_N] + E[B_T] + E[T_N] + E[I_T] \tag{12}$$

Gakis, Rhee and Sivazlian[4] 혹은 Rhee[10, 16, 17] 혹은 Rhee and Oh[11, 13] 등에 따르면 $E[B_N]$과 $E[B_T]$ 그리고 $E[I_N]$과 $E[I_T]$는 다음과 같이 주어진다.

$$E[B_N] = NE[B_0] \tag{13}$$

$$E[B_T] = \frac{(\lambda T)E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} \tag{14}$$

$$E[I_N] = NE[I_0] \tag{15}$$

$$E[I_T] = \frac{(\lambda T)E[I_0]}{1-e^{-\lambda T}} \tag{16}$$

여기에서 $P[B_N]$와 $P[B_T]$를 N 운용방침과 T 운용방침이 적용되었을 때 server가 서비스창구에서 업무를 수행하고 있을 확률이라고 정의하면 다음이 성립함을 확인할 수 있다.

$$P[B_N] = \frac{E[B_N]}{E[B_N]+E[I_N]} = \rho$$

$$P[B_T] = \frac{E[B_T]}{E[B_T]+E[I_T]} = \rho$$

식 (13)과 식 (14)에서 주어진 $E[B_N]$과 $E[B_T]$를 식 (9)에 대입하면

$$E[B_{(NT)}] = NE[B_0] + \frac{(\lambda T)E[B_0]}{1-e^{-\lambda T}} \tag{17}$$

그리고 식 (5)에서 주어진 $E[B_0]$를 식 (17)에 대입하면 변동 이변수 (NT) 운용방침이 적용될 때의 busy period 기댓값, 즉 $E[B_{(NT)}]$는 아래와 같다.

$$E[B_{(NT)}] = \frac{N}{\mu-\lambda} + \frac{(\lambda T)}{(\mu-\lambda)(1-e^{-\lambda T})} \tag{18}$$

$$= \frac{N(1-e^{-\lambda T})+\lambda T}{(\mu-\lambda)(1-e^{-\lambda T})}$$

같은 방법으로, 식 (10)에 식 (15)와 식 (16)에서 주어진 $E[I_N]$과 $E[I_T]$를 대입하면 변동 이변수 (NT) 운용방침이 적용될 때 idle period의 기댓값, 즉 $E[I_{(NT)}]$는 다음과 같이 표현된다.

$$E[I_{(NT)}] = NE[I_0] + \frac{T}{1-e^{-\lambda T}} \tag{19}$$

또한 식 (6)에서 주어진 $E[I_0]$를 식 (19)에 대입하면 $E[I_{(NT)}]$는 다음과 같이 주어진다.

$$E[I_{(NT)}] = \frac{N}{\lambda} + \frac{T}{1-e^{-\lambda T}} = \frac{N(1-e^{-\lambda T})+\lambda T}{\lambda(1-e^{-\lambda T})} \tag{20}$$

따라서 식 (18)에서 주어진 $E[B_{(NT)}]$와 식 (20)에서 주어진 $E[I_{(NT)}]$를 식 (11)에 대입하거나 식 (13)부터 식 (16)에서 주어진 $E[B_N]$, $E[B_T]$, $E[I_N]$ 그리고 $E[I_T]$를 식 (12)에 대입한 다음 식 (5)와 식 (6)에서 주어진 $E[B_0]$와 $E[I_0]$를 대입한 후 간단히 하면 변동 이변수 (NT) 운용방침이 적용될 때 busy cycle의 기댓값, 즉 $E[C_{(NT)}]$는 다음과 같이 주어진다.

$$E[C_{(NT)}] = \frac{N(1-e^{-\lambda T})+\lambda T}{(\mu-\lambda)(1-e^{-\lambda T})} + \frac{N(1-e^{-\lambda T})+\lambda T}{\lambda(1-e^{-\lambda T})}$$

$$= \frac{N(1-e^{-\lambda T})+\lambda T}{(1-e^{-\lambda T})}\left(\frac{1}{\mu-\lambda}+\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{N(1-e^{-\lambda T})+\lambda T}{\lambda(1-\rho)(1-e^{-\lambda T})} \tag{21}$$

또한 $P[B_{(NT)}]$를 변동 이변수 (NT) 운용방침이 적용되었을 때 server가 서비스창구에서 업무를 수행하고 있을 확률이라고 정의하면 다음이 성립함을 확인 할 수 있다.

$$P[B_{(NT)}] = \frac{E[B_{(NT)}]}{E[B_{(NT)}]+E[I_{(NT)}]}$$

$$= \frac{\dfrac{N(1-e^{-\lambda T})+\lambda T}{(\mu-\lambda)(1-e^{-\lambda T})}}{\dfrac{N(1-e^{-\lambda T})+\lambda T}{(\mu-\lambda)(1-e^{-\lambda T})} + \dfrac{N(1-e^{-\lambda T})+\lambda T}{\lambda(1-e^{-\lambda T})}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{(\mu-\lambda)}}{\dfrac{1}{(\mu-\lambda)}+\dfrac{1}{\lambda}}$$

$$= \rho \tag{22}$$

변동 이변수 (NT) 운용방침을 조정가능한 M/M/1 대기모형에 적용할 때의 $E[B_{(NT)}]$, $E[I_{(NT)}]$, $E[C_{(NT)}]$과 $P[B_{(NT)}]$는 식 (18), 식 (20), 식 (21)과 식 (22)에서 주어진 M/G/1의 경우와 동일함을 알 수 있다.

4.2 변동 이변수 (ND) 운용방침

변동 이변수 (NT) 운용방침이 적용될 때와 유사하게 변동 이변수 (ND) 운용방침이 적용되면 N 운용방침에 따른 idle period와 busy period 그리고 D 운용방침에 따른 idle period와 busy period의 순서로 반복된다. 따라서 D 운용방침에 따른 idle period 와 busy period의 기댓값을 각각 $E[I_D]$와 $E[B_D]$라고 정의하고, 또한 변동 이변수 (ND) 운용방침이 적용될 때의 idle period, busy period 그리고 busy cycle의 기댓값을 각각 $E[B_{(ND)}]$, $E[I_{(ND)}]$ 그리고 $E[C_{(ND)}]$라 하면 다음과 같은 관계식이 성립함을 알 수 있다.

$$E[B_{(ND)}] = E[B_N] + E[B_D] \tag{23}$$

$$E[I_{(ND)}] = E[I_N] + E[I_D] \tag{24}$$

$$E[C_{(ND)}] = E[B_{(ND)}] + E[I_{(ND)}] \tag{25}$$

Gakis, Rhee and Sivazlian[4] 혹은 Rhee[13, 15, 16] 혹은 Rhee and Oh[10, 11] 등에 따르면 $E[B_D]$와 $E[I_D]$ 다음과 같이 주어진다.

$$E[B_D] = E[B_0]\Sigma_{n=0}^{\infty} G^{(n)}(D) \tag{26}$$

$$E[I_D] = E[I_0]\Sigma_{n=0}^{\infty} G^{(n)}(D) \tag{27}$$

여기에서 $G^{(n)}(D)$는 아래와 같이 정의되며

$$G^{(n)}(D) = \int_0^D f_S^{*(n)}(t)dt$$

$f_s^{*(n)}(t)$는 서비스시간을 나타내는 확률밀도함수 $f_S(\cdot)$의 n차 중첩(n-fold convolution)을 의미한다.

특히 M/M/1 대기모형에 D 운용방침이 적용될 때의 경우에는 $E[B_D]$와 $E[I_D]$는 다음과 같이 유도된다.

$$E[B_D] = \frac{\mu D + 1}{\mu - \lambda} \tag{28}$$

$$E[I_D] = \frac{\mu D + 1}{\lambda} \tag{29}$$

또한 $P[B_D]$를 D 운용방침이 적용될 때 server가 서비스창구에서 업무를 수행하고 있을 확률을 나타낸다고 가정한 후 식 (26), 식 (27) 혹은 식 (28), 식 (29)에서 주어진 $E[B_D]$와 $E[I_D]$를 사용하면 다음이 성립함을 확인할 수 있다.

$$P[B_D] = \frac{E[B_D]}{E[B_D] + E[I_D]} = \rho$$

식 (13)와 식 (15)에서 주어진 $E[B_N]$와 $E[I_N]$ 그리고 식 (26)와 식 (27)에서 주어진 $E[B_D]$와 $E[I_D]$를 식 (23), 식 (24), 그리고 식 (25)에 대입한 후 식 (5)와 식 (6)에서 주어진 $E[B_0]$와 $E[I_0]$를 대입하여 간단히 하면 $E[B_{(ND)}]$, $E[I_{(ND)}]$와 $E[C_{(ND)}]$는 다음과 같이 유도된다.

$$E[B_{(ND)}] = \frac{1}{\mu - \lambda}\{N + \Sigma_{n=0}^{\infty} G^{(n)}(D)\} \tag{30}$$

$$E[I_{(ND)}] = \frac{1}{\lambda}\{N + \Sigma_{n=0}^{\infty} G^{(n)}(D)\} \tag{31}$$

$$E[C_{(ND)}] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}\{N + \Sigma_{n=0}^{\infty} G^{(n)}(D)\}$$

조정가능한 M/M/1 대기모형인 경우, 식 (13)와 식 (15)에서 주어진 $E[B_N]$와 $E[I_N]$ 그리고 식 (28)와 식 (29)에서 주어진 $E[B_D]$와 $E[I_D]$를 사용하면 $E[B_{(ND)}]$, $E[I_{(ND)}]$와 $E[C_{(ND)}]$는 다음과 같이 유도됨 알 수 있다.

$$E[B_{(ND)}] = \frac{N + \mu D + 1}{\mu - \lambda} \tag{32}$$

$$E[I_{(ND)}] = \frac{N + \mu D + 1}{\lambda} \tag{33}$$

$$E[C_{(ND)}] = \frac{1}{\lambda(1-\rho)}(N + \mu D + 1)$$

또한 $P[B_{(ND)}]$를 변동 이변수 (ND) 운용방침이 적용되었을 때 server가 서비스창구에서 업무를 수행하고 있을 확률이라고 정의하면 조정가능한 M/G/1 대기모형의 경우 식 (30)와 식 (31)에서 주어진 $E[B_{(ND)}]$와 $E[I_{(ND)}]$ 그리고 조정가능한 M/M/1 대기모형인 경우 식 (32)와 식 (33)에서 주어진 $E[B_{(ND)}]$와 $E[I_{(ND)}]$를 사용하면 다음이 성립함을 확인 할 수 있다.

$$P[B_{(ND)}] = \frac{E[B_{(ND)}]}{E[B_{(ND)}] + E[I_{(ND)}]} = \rho$$

4.3 변동 이변수 (TD) 운용방침

변동 이변수 (TD) 운용방침이 적용될 때의 busy period, idle period와 busy cycle의 기댓값을 $E[B_{(TD)}]$, $E[I_{(TD)}]$ 그리고 $E[C_{(TD)}]$라고 정의하면 다음의 관계식이 성립한다.

$$E[B_{(TD)}] = E[B_T] + E[B_D] \tag{34}$$

$$E[I_{(TD)}] = E[I_T] + E[I_D] \tag{35}$$

$$E[C_{(TD)}] = E[B_{(TD)}] + E[I_{(TD)}] \tag{36}$$

식 (14)과 식 (16)에서 주어진 $E[B_T]$와 $E[I_T]$ 그리고 식 (26)와 식 (27)에서 주어진 $E[B_D]$와 $E[I_D]$를 식 (34), 식 (35)와 식 (36)에 대입한 후, 식 (5)와 식 (6)에서 주어진 $E[B_0]$와 $E[I_0]$를 대입하여 간단히 하면 $E[B_{(ND)}]$, $E[I_{(ND)}]$와 $E[C_{(ND)}]$는 다음과 같이 유도된다.

$$E[B_{(TD)}] = \frac{\lambda T + (1-e^{-\lambda T})\sum_{n=0}^{\infty} G^{(n)}(D)}{(\mu-\lambda)(1-e^{-\lambda T})} \tag{37}$$

$$E[I_{(TD)}] = \frac{\lambda T + (1-e^{-\lambda T})\sum_{n=0}^{\infty} G^{(n)}(D)}{\lambda(1-e^{-\lambda T})} \tag{38}$$

$$E[C_{(TD)}] = \frac{\lambda T + (1-e^{-\lambda T})\sum_{n=0}^{\infty} G^{(n)}(D)}{\lambda(1-\rho)}$$

조정가능한 M/M/1 대기모형에 적용하는 경우, 식 (14)와 식 (16)에서 주어진 $E[B_T]$와 $E[I_T]$에 식 (5)와 식 (6)에서 주어진 $E[B_0]$와 $E[I_0]$를 대입한 다음 식 (28)와 식 (29)에서 주어진 $E[B_D]$와 $E[I_D]$를 사용하면 $E[B_{(ND)}]$, $E[I_{(ND)}]$와 $E[C_{(ND)}]$는 다음과 같이 유도된다.

$$E[B_{(TD)}] = \frac{\lambda T + (1-e^{-\lambda T})(\mu D + 1)}{(\mu-\lambda)(1-e^{-\lambda T})} \tag{39}$$

$$E[I_{(TD)}] = \frac{\lambda T + (1-e^{-\lambda T})(\mu D + 1)}{\lambda(1-e^{-\lambda T})} \tag{40}$$

$$E[C_{(TD)}] = \frac{\lambda T + (1-e^{-\lambda T})(\mu D + 1)}{\lambda(1-\rho)(1-e^{-\lambda T})}$$

또한 $P[B_{(TD)}]$를 변동 이변수 (TD) 운용방침이 적용되었을 때 server가 서비스창구에서 업무를 수행하고 있을 확률이라고 정의하면 조정가능한 M/G/1 대기모형의 경우 식 (37)와 식 (38)에서 주어진 $E[B_{(TD)}]$와 $E[I_{(TD)}]$ 그리고 조정가능한 M/M/1 대기모형인 경우 식 (39)와 식 (40)에서 주어진 $E[B_{(TD)}]$와 $E[I_{(TD)}]$를 사용하면 두 경우 모두 다음의 관계식이 성립함을 확인 할 수 있다.

$$P[B_{(ND)}] = \frac{E[B_{(ND)}]}{E[B_{(ND)}] + E[I_{(ND)}]} = \rho$$

5. 시스템 내부에 있는 고객수의 분석

조정가능한 M/G/1 대기모형에 단순 N, T과 D 운용방침이 적용되었을 때 시스템 내부에 있는 고객수의 기댓값을 각각 $E[X_N]$, $E[X_T]$와 $E[X_D]$라고 정의하면 $E[X_N]$와 $E[X_T]$다음과 같이 주어진다[6, 19].

$$E[X_N] = \rho + \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} + \frac{N-1}{2} \tag{41}$$

$$E[X_T] = \rho + \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} + \frac{\lambda T}{2} \tag{42}$$

여기에서 $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ 그리고 σ^2는 각 고객에게 제공되는 서비스시간을 나타내는 확률변수의 분산(variance)을 나타내며 M/M/1 대기모형인 경우의 σ^2은 식 (3)에 주어져 있다.

Li와 Niu[8]가 유도한 M/G/1 대기모형에 단순 D 운용방침이 적용될 때 고객이 시스템에서 기다리는 시간(waiting time in the system)의 기댓값과 Little's formula를 사용하여 $E[X_D]$를 구할 수 있다. 그러나 서비스시간을 나타내는 일반적인 확률밀도함수가 재생함수(renewal function)의 형태로 포함되어 있는 매우 복잡한 구조를 형성하고 있다. 이는 실제로 산업현장에서 직접 활용하기 어려울 뿐만 아니라 최적 운용방침을 결정하는 과정에 해결할 수 없는 어려움을 야기할 수 있다. 그러나 조정가능한 M/M/1 대기모형인 경우 식 (43)에서 주어진 것처럼 $E[X_D]$는 간단한 형태로 표현되기 때문에[1] 위에서 언급한 문제점들을 해결할 수 있는 가능성이 있기 때문에 단순 D 운용방침이 포함된 변동 이변수 운용방침인 경우, 즉 변동 이변수 (ND) 또는 (TD)가 적용되는 M/M/1 대기모형에 한하여 시스템내부에 있는 고객수의 기댓값을 구하기로 한다.

$$E[X_D] = \frac{\rho}{1-\rho} + \frac{\mu D\{2(1-\rho) + \mu D\}}{2(1+\mu D)} \tag{43}$$

또한 단순 N, T 그리고 D 운용방침이 적용될 때의 busy cycle의 기댓값을 각각 $E[C_N]$, $E[C_T]$와 $E[C_D]$라 하면 다음과 같이 주어진다.

$$E[C_N]=E[B_N]+E[I_N]=\frac{N}{\lambda(1-\rho)} \tag{44}$$

$$E[C_T]=E[B_T]+E[I_T]=\frac{\lambda T}{\lambda(1-\rho)(1-e^{-\lambda T})} \tag{45}$$

$$E[C_D]=E[B_D]+E[I_D]=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}G^{(n)}(D)}{\lambda(1-\rho)}$$

또한 M/M/1 대기모형인 경우 위의 $E[C_D]$는

$$E[C_D]=\frac{\mu D+1}{\lambda(1-\rho)} \tag{46}$$

변동 이변수 (NT), (ND)와 (TD) 운용방침이 적용될 때 시스템 내부에 있는 고객수의 기댓값을 각각 $E[X_{(NT)}]$, $E[X_{(ND)}]$와 $E[X_{(TD)}]$라면 다음과 같이 표현된다.

$$E[X_{(NT)}]=\frac{E[X_N]E[C_N]+E[X_T]E[C_T]}{E[C_N]+E[C_T]}=\frac{E[X_N]E[C_N]+E[X_T]E[C_T]}{E[C_{(NT)}]} \tag{47}$$

$$E[X_{(ND)}]=\frac{E[X_N]E[C_N]+E[X_D]E[C_D]}{E[C_N]+E[C_D]}=\frac{E[X_N]E[C_N]+E[X_D]E[C_D]}{E[C_{(ND)}]} \tag{48}$$

$$E[X_{(TD)}]=\frac{E[X_TE[C_N]]+E[X_D]E[C_D]}{E[C_T]+E[C_D]}=\frac{E[X_TE[C_T]]+E[X_D]E[C_D]}{E[C_{(ND)}]} \tag{49}$$

왜냐하면 다른 두 종류의 단순 운용방침이 독립적으로 정해진 순서에 따라 적용되는 운용방침의 특징에 따라 하나의 통합된 busy cycle에서의 단위시간당 고객수의 기댓값은 각각의 운용방침에 따른 단위시간당 고객수의 기댓값의 비중평균(weighted or polled average)으로 표현될 수 있기 때문이다. 따라서 식 (41)와 식 (42)에서 주어진 $E[X_N]$와 $E[X_T]$ 그리고 식 (21)에서 주어진 $E[C_{(NT)}]$를 식 (47)에 대입하면 조정가능한 M/G/1 대기모형에 변동 이변수 (NT) 운용방침이 적용될 때의 시스템 내부에 있는 고객수의 기댓값, $E[X_{(NT)}]$는 다음과 같이 유도된다.

$$E[X_{(NT)}]=\rho+\frac{\lambda^2\sigma^2+\rho^2}{2(1-\rho)}+\frac{\left(\frac{N-1}{2}\right)N(1-e^{-\lambda T})+\left(\frac{\lambda T}{2}\right)\lambda T}{N(1-e^{-\lambda T})+\lambda T} \tag{50}$$

조정가능한 M/M/1 대기모형인 경우, 식 (3)에서 주어진 σ^2을 식 (41)과 식 (42)에 대입하면 아래와 같은 $E[X_N]$와 $E[X_T]$의 결과를 도출할 수 있다.

$$E[X_N]=\frac{\rho}{1-\rho}+\frac{N-1}{2} \tag{51}$$

$$E[X_T]=\frac{\rho}{1-\rho}+\frac{\lambda T}{2} \tag{52}$$

따라서 식 (51)과 식 (52)에서 주어진 $E[X_N]$과 $E[X_T]$ 그리고 식 (21)에서 주어진 $E[C_{(NT)}]$를 식 (47)에 대입하면 조정가능한 M/M/1 대기모형에 변동 이변수 (NT) 운용방침이 적용될 때 시스템 내부에 있는 고객수의 기댓값, 즉 $E[X_{(NT)}]$는 다음과 같다.

$$E[X_{(NT)}]=\frac{\rho}{1-\rho}+\frac{\left(\frac{N-1}{2}\right)N(1-e^{-\lambda T})+\left(\frac{\lambda T}{2}\right)\lambda T}{N(1-e^{-\lambda T})+\lambda T} \tag{53}$$

또한 같은 방법으로 변동 이변수 (ND)와 (TD) 운용방침이 M/M/1 대기모형에 적용될 때의 시스템내부 고객수의 기댓값은 다음과 같이 유도된다.

$$E[X_{(ND)}]=\frac{\rho}{1-\rho}+\frac{\left(\frac{N-1}{2}\right)N+[\mu D\{2(1-\rho)+\mu D\}](\mu D+1)}{N+\mu D+1} \tag{54}$$

$$E[X_{(TD)}]=\frac{\rho}{1-\rho}+\frac{\left(\frac{\lambda T}{2}\right)(\lambda T)+[\mu D\{2(1-\rho)+\mu D\}](\mu D+1)}{\lambda T+(1-e^{-\lambda T})(\mu D+1)} \tag{55}$$

식 (50), 식 (53), 식 (54) 그리고 식 (55)에서 유도된 시스템 내부에 있는 고객수의 기댓값은 산업현장에서 직접 활용될 수 있을 뿐만 아니라 적용되는 운용방침의 최적상태를 결정하는데 활용할 수 있다. 또한 Little's formulas를 사용하여 또 다른 시스템 특성치, 즉 시스템 내부에 머무는 시간의 기댓값 등을 유도하는데 사용할 수 있다.

6. 결 론

조정가능한 M/G/1 대기모형에 적용될 수 있는 다양한 형태의 운용방침이 개발되어 소개되고 있지만 대부분의 경우 각각의 운용방침의 적용에 따른 시스템 특성치가 매

우 복잡한 형태로 주어지기 때문에 시스템 운용에 따른 비용요소를 고려한 단위시간당 기대되는 총비용함수를 활용한 입력변수들의 최적해 유도에 많은 어려움이 따른다. 따라서 다양한 형태의 새로운 운용방침의 개발도 중요하지만 그러한 운용방침에 포함된 입력변수들의 최적해를 유도할 수 있는 가능성 또한 고려되어야 한다. 이러한 문제를 고려하여 제안된 변동 이변수 (NT), (ND)와 (TD) 운용방침이 적용되는 조정가능한 M/G/1 혹은 M/M/1 대기모형을 분석하여 busy period, idle period, busy cycle의 기댓값 그리고 시스템 내부에 있는 고객수의 기댓값 등의 중요한 시스템 특성치를 성공적으로 유도하였다. 이들은 산업현장에서 직접적으로 활용할 수 있을 뿐만 아니라 또 다른 형태의 시스템 특성치, 예를 들면 Little's formulas를 사용하여 고객이 시스템 내부에 머무는 시간 (waiting time in the system)의 기댓값을 유도하는데 사용할 수도 있다. 또한 적절한 비용요소와 결합하여 적용되는 운용방침의 최적상태를 결정 또한 다양한 형태의 운용방침이 적용되었을 때 비교분석을 통하여 보다 효율적인 모형의 개발 등의 가능성을 제시하였다고 볼 수 있으며 아울러 복잡한 형태의 운용방침, 예를 들면, 이변수 혹은 삼변수 운용방침들이 교대로 적용되는 경우의 대기모형의 분석에 필요한 기초자료로 활용할 수 있으며 이는 미래의 연구과제로 남겨두고자 한다.

Acknowledgement

This study has been partially supported by the 2015 Internal Research Fund of the Hannam University, Daejon, Korea.

References

[1] Artalejo, J.R., On the M/G/1 Queue with D-policy, *Applied Mathematical Modelling*, 2001, Vol. 25, No. 12, pp. 1055-1069.

[2] Balachandran, K.R. and Tijms, H., On the D-policy for the M/G/1 Queue, *Management Science*, 1975, Vol. 9, pp. 1073-1076.

[3] Conolly, B., *Lecture Notes on Queueing Systems*, Halsted, New York, 1975.

[4] Gakis, K.G., Rhee, H.K., and Sivazlian, B.D., Distributions and First Moments of the Busy and Idle Periods in Controllable M/G/1 Queueing Models with Simple and Dyadic Policies, *Stochastic Analysis and Applications*, 1995, Vol. 13, No. 1, pp. 47-81.

[5] Ham T.J. and Song T.Y., Structural Analysis for an Optimum Maintenance Policy, *Journal of the Korean Institute of Plant Engineering*, 2001, Vol. 6, No. 4, pp. 31-43.

[6] Heyman, D., The T-policy for the M/G/1 Queue, *Management Science*, 1977, Vol. 23, No. 7, pp. 775-778.

[7] Kleinrock, L., *Queueing Systems, Vol. 1 : Theory*, John Wiley and Sons, New York, NY, 1975.

[8] Li, Jingwen and Niu, Shun-Chen, The waiting-time Distribution for GI/G/1 Queue under the D-Policy, *Probability in the Engineering and Information Science*, 1992, Vol. 6, pp. 287-308.

[9] Moon, G.J. and Kim, M.Y., Optimization of Delivery Facility Operation under Restricted Conditions, *Journal of the Korean Institute of Plant Engineering*, 2005, Vol. 10, No. 1, pp. 5-17.

[10] Rhee, H.K. and Oh, H.S., Derivation of Upper and Lower Bounds of the Expected Busy Periods for Min (N, D) and Max (N, D) Operating Policies in a Controllable M/G/1 Queueing Model, *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2009, Vol. 32, No. 3, pp. 71-77.

[11] Rhee, H.K. and Oh, H.S., Development of the Most Generalized Form of the Triadic Operating Policy and Derivation of its Corresponding Expected Busy Period, *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2009, Vol. 32, No. 4, pp. 161-168.

[12] Rhee, H.K. and Sivazlian, B.D., Distribution of the Busy Period in a Controllable M/M/2 Queue Operating under the Triadic (0, K, N, M) Policy, *Journal of Applied Probability*, 1990, Vol. 27, pp. 425-432.

[13] Rhee, H.K., Construction of a Relation Between the Triadic Min (N, T, D) and Max (N, T, D) Operating Policies Based on their Corresponding Expected Busy Period, *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2010, Vol. 33, No. 3, pp. 63-70.

[14] Rhee, H.K., Decomposition of the Most Generalized Triadic Operating policy Using its Corresponding Expected Busy, *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2011, Vol. 34, No. 4, pp. 162-168.

[15] Rhee, H.K., Derivation of Upper and Lower Bounds of the Expected Busy Period for a Controllable M/G/1 Queueing Model Operating under the Triadic Max (N, T, D), *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2011, Vol. 34, No. 1, pp. 67-73.

[16] Rhee, H.K., Development of a New Methodology to

find the Expected Busy Period for Controllable M/G/1 Queueing Models Operating under the Multi-variable Operating Policies : Concepts and Application to the Dyadic Policies, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, 1997, Vol. 23, No. 4, pp. 729-739.

[17] Rhee, H.K., System analysis of a Controllable Queueing Model Operating under the {T:Min(T, N)} Policy, *Journal of the Society of Korea Industrial and Systems Engineering*, 2015, Vol. 38, No. 1, pp. 21-29.

[18] Teghem, J., Control of the Service Process in a Queueing System, *European Journal of Operational Research*, 1986, Vol. 23, pp. 141-158.

[19] Yadin, M. and Naor, P., Queueing System with Removable Service Station, *Operational Research Quarterly*, 1963, Vol. 14, pp. 393-405.

ORCID

Hahn-Kyou Rhee | http://orcid.org/0000-0002-7629-3116