

이방성 복합재료의 동적특성에 관한 연구

Dynamic Characteristics of Anisotropic Laminated Plates

Sungjin Park^{a,*}, Jooeun Baek^{b,1}

^a *Dr. of Eng, Professor, Department of Urban Engineering, Incheon National University, 119 Academy-ro, Yeonsu-gu, Incheon 406-772, Korea*

^b *Graduate Student, Department of Urban Construction Engineering, Incheon National University, 119 Academy-ro, Yeonsu-gu, Incheon 406-772, Korea*

ABSTRACT

In this study, the impact problems are brought up and the formulation by isoparametric element is attempted for the purpose of analyzing the response characteristics of laminated plate receiving impact load based on the first-order shear deformation theory expanded from the Mindlin plate theory. The result of static analysis and dynamic analysis is drawn through the numerical analysis rectangular and circular plates of antisymmetric Angle-Ply laminated plate using the finite element method and the analysis on each displacement is compared.

KEYWORDS

FEM
Laminated Plates
first-order shear
deformation
theory

본 연구에서는 충격 문제를 거론하며 Mindlin 판 이론을 확장한 1차 전단 변형 이론에 근거하여 충격 하중을 받는 적층판의 응답 특성의 해석을 목적으로 아이소파라메트릭요소에 의한 정식화를 시도한다. 유한요소법을 이용하여 역대칭 Angle-Ply 적층판의 사각판과 원형판의 수치해석을 통해 정적해석과 동적해석의 결과를 도출하여 각 변위에 대한 분석결과를 비교한다.

유한요소법
복합재료
1차전단변형이론

© 2016 Korea Society of disaster Information All rights reserved

* Corresponding author. Tel. 82-32-835-8775. Fax. 82-32-232-5024

Email. sjpark@inu.ac.kr

1 Tel. 82-32-835-4419, wndmsdl9927@hanmail.net

ARTICLE HISTORY

Received Mar. 09, 2016

Revised Mar. 16, 2016

Accepted Mar. 28, 2016

1. 서론

복합 재료는 두 개 이상의 소재를 일체화시킴으로써, 각각의 단일 소재만으로는 갖고 있지 못한 특성을 실현한 재료이다. 그 대표적인 것으로는 유리 섬유와 탄소 섬유 등을 강화재로 배치 해, 에폭시 등의 플라스틱 수지로 굳힌 것으로, 이들은 「FRP(섬유 강화 플라스틱)」라고 불리고 있다. 이러한 장섬유 복합 재료로 이루어지는 적층판은 기존의 관용 재료에 비해 비강도(강도/비중량)와 비탄성률(탄성계수/비중량)이 매우 높고 강화재의 조합 방법에 따라 요구되는 강도를 목표로 「설계할 수 있는 재료」이기 때문에 구조 경량화가 요구되는 많은 공학적 분야에서 사용되어 그 용도도 점점 확대 되고 있다.

그러나 복합 재료는 일반적으로 강한 이방성을 나타내는데 등방성 재료와는 아주 다른 역학 특성을 가진다. 따라서 복합 재료의 설계에 있어서는 그 동적 거동의 파악이 중요한 과제가 된다.

본 연구에서는 충격 문제를 거론하며 Mindlin판 이론을 확장한 1차 전단 변형 이론에 근거하여 충격 하중을 받는 임의의 형상 적층 응답 특성의 해명을 목적으로 아이소파라메트릭요소에 의한 정식화를 시도한다.

2. 기초방정식

일정한 두께 h의 Lamina의 미소 요소를 생각한다. Fig 1.과 같이 각 Lamina의 자료 주축을 1,2,3으로 한다. 1방향은 섬유에 평행, 2방향은 섬유에 수직 방향, 3방향은 판 두께 방향이다. 또한 평면의 기하학적 축은 Fig 1.과 같이 x, y, z 로 나타낸다.

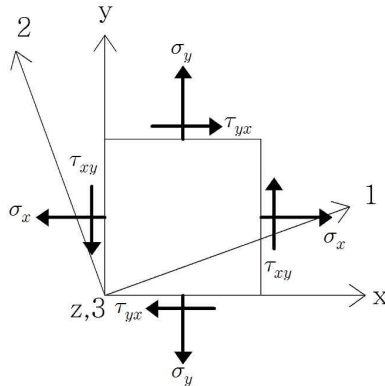


Fig 1. Lamina Model

적층판의 응력-변형 관계식은 식(1)에 나타낸 바와 같이 식(2)로 표현된다.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{44} & A_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial u_0 / \partial x \\ \partial v_0 / \partial x \\ \partial u_0 / \partial y + \partial v_0 / \partial x \\ \partial \psi_x / \partial x \\ \partial \psi_y / \partial y \\ \partial \psi_x / \partial y + \partial \psi_y / \partial x \\ \partial \omega / \partial y + \psi_y \\ \partial \omega / \partial x + \psi_x \end{Bmatrix} \quad (1)$$

응력의 합, 모멘트의 합, 전단력의 합의 각 요소에 대해 나열하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 N_x &= A_{11} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial \nu_0}{\partial y} + A_{16} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial \nu_0}{\partial x} \right) + B_{11} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + B_{16} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\
 N_y &= A_{12} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial \nu_0}{\partial y} + A_{26} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial \nu_0}{\partial x} \right) + B_{12} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + B_{26} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\
 N_{xy} &= A_{16} \frac{\partial u_0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial \nu_0}{\partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial \nu_0}{\partial x} \right) + B_{16} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + B_{66} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right)
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned}
 Q_y &= A_{44} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \psi_y \right) + A_{45} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \psi_x \right) \\
 Q_x &= A_{45} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \psi_y \right) + A_{55} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \psi_x \right)
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots (3)$$

3. 충격문제의 해석방법

변형 에너지 U는 다음 식으로 표시한다.

$$U = \frac{1}{2} \iiint (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dx dy dz \dots\dots\dots (4)$$

여기서 식(4)를 이용하여 판 두께 방향으로 적분하면

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \iint \left[N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial \nu}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial x} \right) \right. \\
 &+ M_x \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + M_{xy} \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\
 &\left. + Q_x \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \psi_x \right) + Q_y \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + \psi_y \right) \right] dx dy
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots (5)$$

따라서, 직접 변형 에너지는

$$U_N = \frac{1}{2} \iint \{\epsilon\}^T \{N\} dx dy = \frac{1}{2} \iint (\{\epsilon\}^T [A'] \{\epsilon\} + \{\epsilon\}^T [B'] \{\kappa\}) dx dy \dots\dots\dots (6)$$

적층판의 운동 에너지 E는 다음 식으로 표시한다.

$$E = \frac{1}{2} \iiint \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 \right] dx dy dz \dots\dots\dots (7)$$

그러나 판의 밀도 ρ는 각층에서 일정하다.

식(7)을 이용하여 판 두께 방향으로 적분하면 다음과 같이 된다.

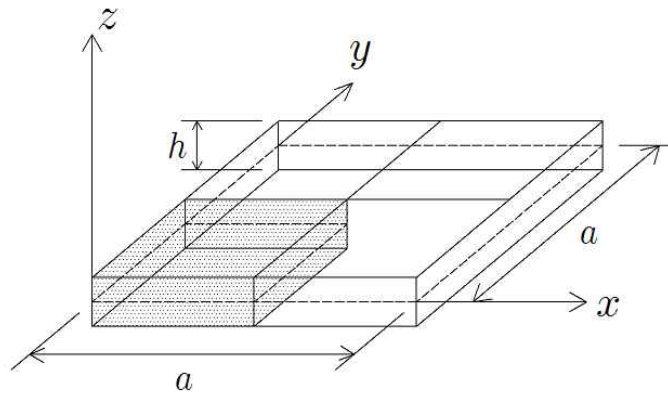
$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2} \iint \left[I_0 \left\{ \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \nu_0}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 \right\} + 2I_1 \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \frac{\partial \psi_x}{\partial t} + \frac{\partial \nu_0}{\partial t} \frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right) \right. \\
 &\left. + I_2 \left\{ \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_y}{\partial t} \right)^2 \right\} \right] dx dy
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots (8)$$

4. 수치해석

해석 모델은 다음과 같다.

- (1) 모델의 형상은 그림 4-1과 같은 변 길이 a , 판 두께 h 사각 판과 이에 접하는 크기의 원형 판이다. 실제 계산은 대칭으로부터 판의 4분의 1의 영역을 그 대상으로 한다.
- (2) 적층 방법은 역 대칭 Angle-Ply 적층으로 한다.
- (3) 요소 분할은 Fig 2와 같이, 사각형 모델은 선택 영역에 대해 3×3 분할을, 원형 모델에 대해서는 12요소 분할을 이용한다.

(a) Rectangular plate model



(b) Circular plate model

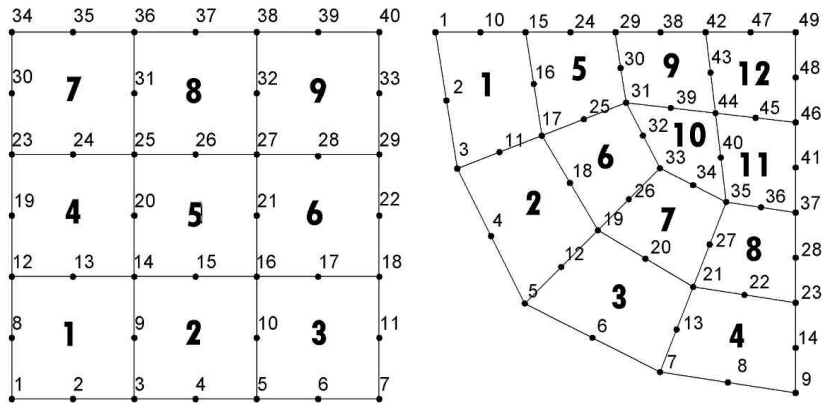
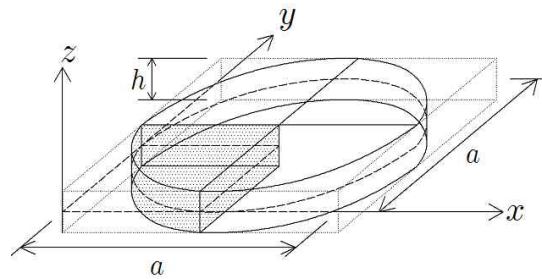


Fig. 2 FEM Element Model

4.1 정적 해석의 예

정적 분석은 다음 2가지 경우에 대한 변위 응답을 요구한다.

- ① 두께를 변화 시켰을 때의 변위 응답 (Fig. 3)
- ② 적층 각도를 변화 시켰을 때의 변위 응답 (Fig. 4)

전단 변형의 영향을 나타내는 것이며, 또한 이번 분석에서 이용한 차수 감소 적분법 (reduced integration)의 효과를 나타낸다. Fig. 3은 4변단순지지 사각 판에 두께 a/h 을 10에서 1000까지 변화 시켰을 때의 변위 응답을 구한 것이다. reduced integration은 아이소 파라 메트릭 요소가 플레이트 휨에 전단 변형을 고려한 곡면 판의 설계가 용이하다. 두꺼운 판이나 셸에는 아주 좋은 솔루션을 제공하는 한편, Lamina에 관해서는 매우 강한 강성을 미칠 수 있다. 이에 대한 해결책으로 강성을 도출 할 때 Gauss의 수치 적분 점을 실제 적분 값을 찾는데 필요한 값보다 적게 취하는 방법이다.

②는 적층 각도 θ 의 변화에 따른 영향을 나타낸 것이다. Fig. 4는 3개의 지지 조건의 사각 판과 원형 판에 적층 각도 θ 를 0° 에서 45° 까지 변화 시켰을 때의 변위 응답을 구한 것이다.

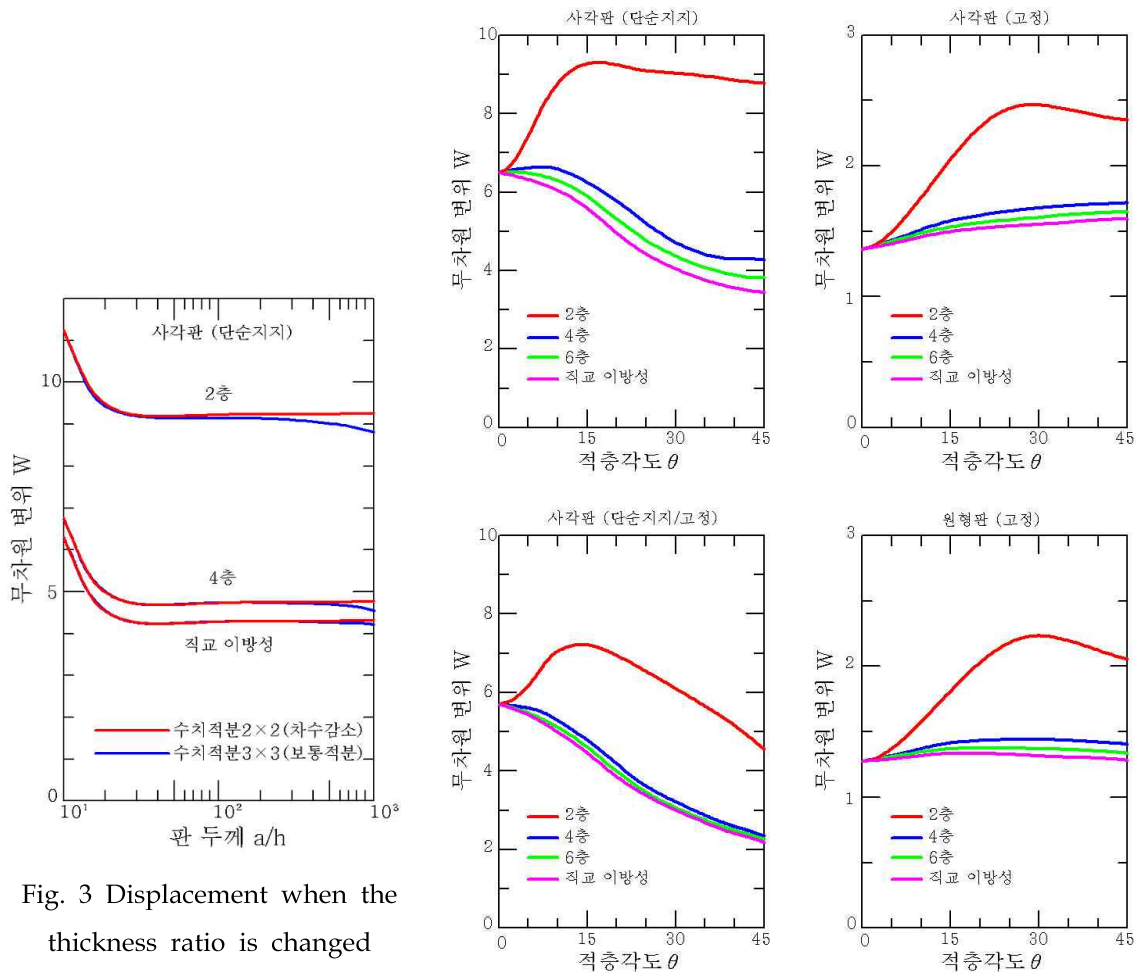


Fig. 3 Displacement when the thickness ratio is changed

Fig. 4 displacement is changed the stacking angle

4.2 동적 해석의 예

동적 분석은 다음 경우에 대한 변위 응답을 요구한다.

- ① 적층 각도를 변화 시켰을 때의 변위 응답 (Fig. 5)

또한 그래프의 세로축에 대해서는 정적해석 예와 같이 무차원 변위 W 을 취하고, 가로축은 경과 시간 t 을 판주기 T 에서 무차원화 한 것을 나타낸다.

①은 정적 분석 예에 대응시킨 것이며, 적층 각도 θ 가 15°, 30°, 45°의 경우 변위 파형을 구한 것이다. 각각의 판에 각각 적층 수 2의 경우와 직교 이방성 판에 대해 구했다.

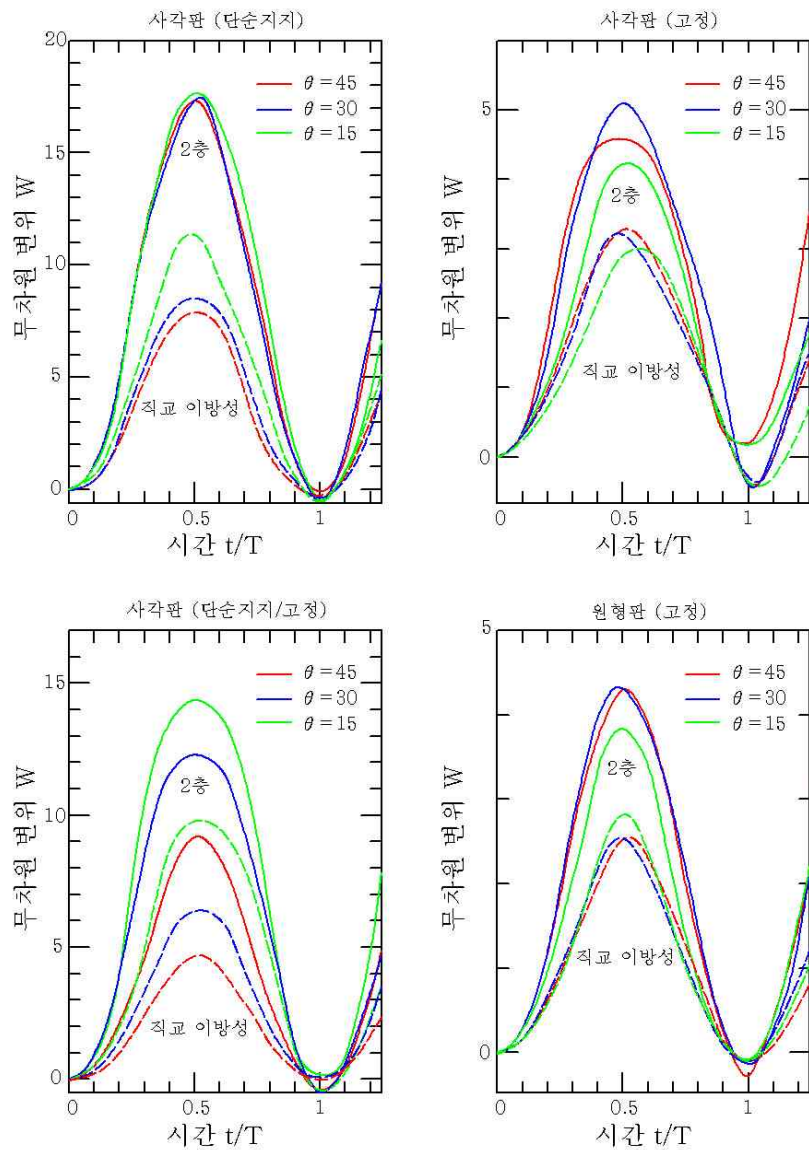


Fig. 5 Displacement is changed the stacking angle

5. 결론

본 연구에서는 적층판의 충격 문제에 대해 아이소파라메트릭 요소에 의한 공식화를 시도했다. 구체적인 수치 계산 예로서 역대칭 Angle-Ply 적층 사각판과 원형판에 대해

- (1) 등분포 적재 하중에 의한 정적 변위
- (2) 충격 하중으로 동적하중을 단계 하중으로 재하 한 경우의 동적 변위에 대한 분석을 실시했다. 이를 통해 얻어진 결과를 다음과 같이 요약한다.

A 정적 분석

- ① 변위는 적층 수가 적을수록 커지고, 적층 수의 증가에 따라 직교 이방성 해석에 접근하고 약 10 층 정도에 수렴한다.
- ② 탄성계수비가 작을수록 변위는 커지고 비율이 커질수록 변화율은 작아진다.
- ③ 적층 각도에 따른 영향은 지지조건에 크게 의존하고, 적층수 2의 경우를 제외하고 고정지지는 적층 각도의 증가에 따라 변위는 완만하게 증가하고 단순지지로 감소한다. 2대변고정 2대변단순지지로 적층 각이 작으면 단순지지의 영향이 크고, 적층 각이 증가 하면 고정지지의 경우 변위에 접근한다.
- ④ 전단 변형에 의한 영향은 두께 비율이 20 이하로 현저하게 나타난다.

B 동적 해석

- ① 적층 수, 적층 각도, 탄성 계수 비에 관계없이 변위 응답은 동일한 파형이 된다.
- ② 등분포 하중은 정적 인 경우의 거의 2배의 최대값을 취한다.
- ③ 동적 응답 비율은 경계조건과 관계없이 거의 유사한 거동을 보이며 주기적으로 50%에서 약 2배의 값을 취한다.
- ④ 면적의 거의 동일한 사각형 판과 원형 판에서도 동적 응답 비율은 거의 동일하다.

References

- Chuen, Yuan-Chia(1980) "Nonlinear Analysis of Plates", McGRAW-HILL, New York
- M.A.Dokainish, K.Subbaraj(1989) "A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics-I. Explicit methods" Computers & Structures, New York, United States, vol.32, No.6, pp.1371 - 1386.
- K.Subbaraj, M.A.Dokainish(1989) "A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics-II. Implicit methods" Computers & Structures, New York, United States, vol.32, No.6, pp.1387-1401.
- T.Kant, J.R.Kommineni(1994) "Geometrically non-linear transient analysis of laminated composite and sandwich shells with a refined theory and C0 finite elements" Computers & Structures, New York, United States, vol.52, No.6, pp.1243 - 1259.
- T.Kant, J.H.Varaiya, C.P.Arora(1990) "Finite element transient analysis of composite and sandwich plates based on a refined theory and implicit time integration schemes" Computers & Structures, New York, United States, vol.36, No.3, pp.401 - 420.