

## 전단변형을 고려한 비선형 보의 동적특성에 관한 연구

# Dynamic Characteristics of Nonlinear Beam Shear Deformation

Sungjin Park<sup>a,\*</sup>, Joeun Baek<sup>b,1</sup>

<sup>a</sup> *Dr. of Eng, Professor, Department of Urban Engineering, Incheon National University, 119 Academy-ro, Yeonsu-gu, Incheon 406-772, Korea*

<sup>b</sup> *Graduate Student, Department of Urban Construction Engineering, Incheon National University, 119 Academy-ro, Yeonsu-gu, Incheon 406-772, Korea*

---

### ABSTRACT

In this study, the applicability and validity of collocation method to nonlinear vibration issues in comparison to other solutions are confirmed, and the applicability of collocation method to nonlinear dynamic response issues in comparison to the response curve with F.E.M results is examined. Also, it is also examined how the influence of axial inertia varies according to the size of slenderness ratio.

---

### KEYWORDS

collocation method  
Nonlinear  
FEM

---

선점법에 대한 연구가 유한요소법처럼 범용화 되어 있지 않아 적용성과 유효성에 대한 연구가 필요하다. 본 연구에서는 범용적으로 사용된 유한요소법과 비교하여 비선형 진동 문제에 대한 선점법의 적용성과 유효성을 확인한다.

또한, 선점법을 미분방정식 조건에 따라 내부법, 경계법, 혼합법으로 나누어 비선형 응답 곡선을 유한요소법 결과와 비교하여 동적 특성 문제의 선점법 적용성과 유효성을 확인한다.

---

선점법  
비선형  
유한요소법

---

© 2016 Korea Society of disaster Information All rights reserved

---

\* Corresponding author. Tel. 82-32-835-8775. Fax. 82-32-232-5024  
Email. [sjpark@inu.ac.kr](mailto:sjpark@inu.ac.kr)

1 Tel. 82-32-835-4419, [wndmsdl9927@hanmail.net](mailto:wndmsdl9927@hanmail.net)

---

### ARTICLE HISTORY

Received May 12, 2015  
Revised May 12, 2015  
Accepted

## 1. 서론

일반적으로 구조해석 중 가장 많이 쓰이는 방법이 유한요소법이다. 이 유한요소법은 1차원인 보부터 3차원의 4면체를 유한개의 요소로 분할을 하여 각 유한요소 모델을 에너지 원리의 근사해법으로 계산하는 계산 방법이다.

현재까지 여러 종류의 유한 요소 모델이 개발되어 구조해석의 선형, 비선형, 정적 문제 해석에서 동적 문제 해석까지 다양하게 쓰이고 있다. 방대한 매트릭스 연산을 통해 구조 해석을 하는 방법이다.

그러나 유한요소법은 구조물의 해석 시간, 자유도수 크기, 방대한 매트릭스 연산으로 인한 고성능의 컴퓨터 필요, 의미 없는 제로에너지 발생 등의 단점이 있다. 본 연구에서는 이러한 결점을 보완하는 해석법인 선점법을 이용하여 해석 값을 내고, 그 값의 유효성과 적용성을 확인한다.

구조물이 외력을 받았을 때 구조물의 강성, 응력분포 및 변형량에 의해 수치계산의 구조 해석은 탄성영역에서의 선형해석과 비선형해석을 할 수 있는데, 유한요소법에서는 연속체를 작은 영역으로 이산화 된 조각들로 표현하여, 시간적으로 변하는 모든 물리현상을 비선형 알고리즘으로 해석 가능한데, 구조물의 변형이 발생한다면 선형 해석보다는 비선형 거동을 해석하는 것이 고품질의 정도 값을 나타내는데 유리하다.

이에 본 연구에서는 선점법을 이용하여 미분방정식 조건에 따라 내부법, 경계법, 혼합법을 이용하여 정도값을 나타내고, 유한요소법과 비교하여 선점법의 적용성과 유효성을 확인한다.

본 연구에서는 먼저, 전단변형, 회전 관성의 영향을 고려한 timoshenko 보 이론에 따라 비선형 자유 진동 해석 방법 및 어떤 외력을 받는 경우의 동적 응답 해석법으로 선점법에 의한 분석 방법을 제안한다. 다음은 이 분석 방법을 사용한 보의 비선형 자유 진동 해석을 수행하고 기존의 연구는 대부분 무시되고 있는 축 방향 관성력의 영향과 전단 변형 회전 관성의 영향을 밝힌다. 또한 단계 하중을 받는 보의 시간 응답에 대한 수치 실험을 수행하고 보의 기본적인 비선형 동적 응답 특성을 검토한다.

## 2. 기초방정식의 유도

선점법에 의한 보의 기초 미분 방정식에서, 단면을 일정하다고 하여 미분하면 다음 식을 구할 수 있다.

$$EA \left( \frac{\alpha^2 u}{\alpha x^2} + \frac{\alpha^2 \omega}{\alpha x^2} \frac{\alpha \omega}{\alpha x} \right) - \rho A \frac{\alpha^2 u}{\alpha t^2} = 0 \tag{1}$$

$$EA \left\{ \frac{\alpha^2 u}{\alpha x^2} \frac{\alpha \omega}{\alpha x} + \frac{\alpha u}{\alpha x} \frac{\alpha^2 \omega}{\alpha x^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{\alpha \omega}{\alpha x} \right)^2 \frac{\alpha^2 \omega}{\alpha x^2} \right\} + kGA \left( \frac{\alpha^2 \omega}{\alpha x^2} - \frac{\alpha \psi}{\alpha x} \right) - \rho A \frac{\alpha^2 \omega}{\alpha t^2} = 0 \tag{2}$$

$$kGA \left( \frac{\alpha \omega}{\alpha x} - \psi \right) + EI \frac{\alpha^2 \psi}{\alpha x^2} - \rho I \frac{\alpha^2 \psi}{\alpha t^2} = 0 \tag{3}$$

미지량  $u, \omega, \psi$  을

$$u(x, t) = u(x) \cos^2 \omega t$$

$$\omega(x, t) = \omega(x) \cos \omega t$$

$$\psi(x, t) = \psi(x) \cos \omega t$$

가정하여, 방정식(1)~(4) 에 대해, t에 대한 평균화 해석을 한다.

우선 식(1)는

$$\int_0^{2\pi} \left[ EA \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \cos^2 \omega t + \frac{d^2 \omega}{dx} \cos^2 \omega t \frac{d\omega}{dx} \cos^2 \omega t \right) - \rho A (-2\omega^2 u \cos 2\omega t) \right] \cos^2 \omega t dt = 0$$

$$\frac{3}{4} EA \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 \omega}{dx^2} \frac{d\omega}{dx} \right) \rho A \omega^2 U = 0 \tag{4}$$

마찬가지로, 식(4)에 대해서는

$$\int_0^{2\pi} \left[ EA \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} \cos^2 \omega t + \frac{d\omega}{dx} \cos \omega t \frac{du}{dx} \cos^2 \omega t \frac{d^2 \omega}{dx^2} \cos \omega t + \frac{3}{2} \left( \frac{d\omega}{dx} \cos \omega t \right)^2 \frac{d^2 \omega}{dx^2} \cos \omega t \right\} \cos \omega t dt = 0 \right. \\ \left. + kGA \left( \frac{d^2 \omega}{dx^2} \cos \omega t - \frac{d\psi}{dx} \cos \omega t \right) - \rho A (-\omega^2 \omega \cos \omega t) \right]$$

위 식을 미분하고 정리하면,

$$\frac{3}{4} EA \left\{ \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d\omega}{dx} + \frac{du}{dx} \frac{d^2 \omega}{dx^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{d\omega}{dx} \right)^2 \frac{d^2 \omega}{dx^2} \right\} + kGA \left( \frac{d^2 \omega}{dx^2} - \frac{d\psi}{dx} \right) + \rho A \omega^2 \omega = 0 \tag{5}$$

식(5)는, 이전 식(4)와 같기 때문에

$$kGA \left( \frac{d\omega}{dx} - \psi \right) + EI \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \rho I \omega^2 \Psi = 0 \tag{6}$$

다음에 미분방정식(5)~(6)에 다음식을 적용하고, 이전 식과 마찬가지로 무차원화한다.

$$u(x) = LU(\xi), \omega(x) = LW(\xi), \Psi(x) = \Psi(\xi), \omega = \frac{C_b}{L} \Omega$$

결과로써, 다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{3}{4} (U'' + W'' W') + \Omega^2 U = 0 \tag{7}$$

$$\frac{3}{4} \left\{ U'' W' + U' W'' + \frac{3}{2} (W')^2 W'' \right\} + \frac{kG}{E} (W'' - \Psi') + \Omega^2 W = 0 \tag{8}$$

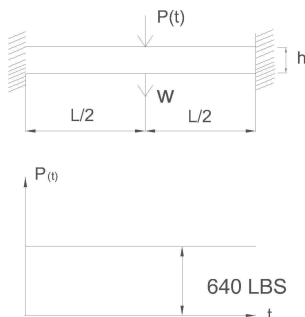
$$S^2 (W' - \Psi) + \Psi'' + \Omega^2 \Psi = 0 \tag{9}$$

여기서  $S^2 = \frac{kGAL^2}{EI}$  이다.

### 3. 비선형 보의 수치계산에

#### 3.1 유한요소법과의 비교

선점법에 의한 동적 응답 해석의 유효성 검토를 위해, 유한요소법(F.E.M)에 의한 분석과 비교를 하였다. 대상으로 한 빔은, 아래와 같은 양단 고정 보에서, 스펜 중앙에 step 상의 집중 하중이 작용한다.



- L = 20 INCHES
- b = 1 INCH (Width)
- h = 1/8 INCH (Depth)
- E = 30,000 KSI
- ν = 0.0
- ρg = 0.098 LB/IN<sup>3</sup> (density)

Fig 1. node elements in half span (F.E.M)

선점법에서는 보의 대칭성을 고려하여 다음 조건을 이용한다.

분별수  $N=1$ , 선점수  $M=11$ , 전단보조수  $k = \pi^2/12$

Fig 1은 스펀 중앙의  $\omega$ 의 시간 응답에 대해, 유한요소법과 본해석법(선점법)을 비교한 것이다.

Fig 2에는 선형 이론 및 비선형 이론에 의해 응답을 나타내고 있지만, 양자의 종축 스케일은 다르다.

유한요소법을 본 해석법에 의한 응답을 비교하면, 선형 및 비선형인 경우 두가지 다 매우 잘 일치한다는 것을 알 수 있다. 비선형 응답 곡선에서 다소 형상이 다른 부분도 있지만, 응답의 최대값의 크기나 최대치의 나타나는 시간은 일치한다.

※ 집중하중  $P = 640\text{ lbs}$  는 정적하중(비선형)에  $\omega = 0.50\text{ in}$  에 해당된다.

이 보의 세장비는  $L/r \approx 554$  에 이어, 하중 수준은  $P_0 \left( \frac{PL^2}{EI} \right) \approx 52$  이다.

양단 단순지지,  $L/r = 50$  의 경우 (Fig 2) 진동 해석에 의해 요구 주기에 응답 주기가 잘 일치하고 있다는 것을 알 수 있다. 이것은 다른 해의 경우에도 말한다.

하중 레벨이 커지면 ( $P_0 = 1.0 \rightarrow 10.0$ ) 진폭이 증대하고 주기가 작아지는 형상을 알 수 있다. 또한 선형 해와의 차도 커지게 된다.

양단 고정지지  $L/r = 50$  의 경우(Fig 3)도 거의 같은 것을 말할 수 있지만,  $P_0 = 1.0$ 의 경우 선형 응답 및 비선형 대응과의 차이는 대부분 볼 수 없는 (진폭과 주기 관하여) 것은 진폭이 작은 것과 같은 진폭도 양단단순지지보다 양단고정지지 쪽이 비선형의 영향이 적다는 것을 알 수 있다.

경계조건의 영향은  $L/r = 50$ 의 경우, 하중 강도가 커지는 만큼 작아지고 있는 것을 알 수 있다.(진폭, 주기에 관하여)

$L/r = 50$ 의 경우와 거의 같은 형상을 나타내고 있지만, 비선형의 영향은  $L/r = 500$ 인 경우가 더 잘 나타나고 있는 것을 알 수 있다.

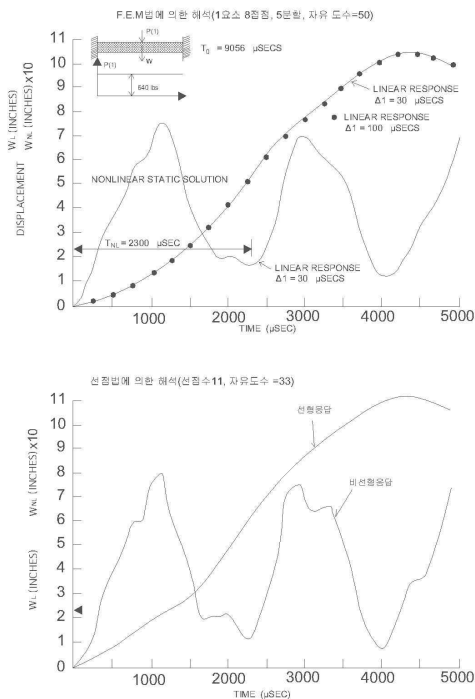


Fig 2. F.E.M vs Collocation Method

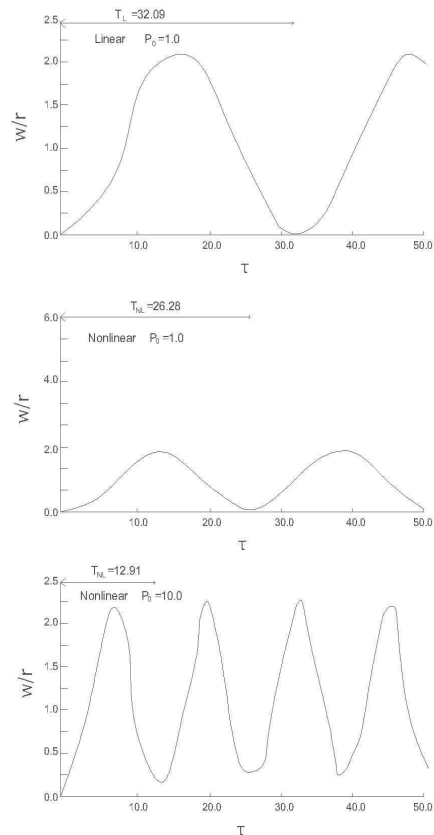


Fig 3 Span deflection response waveform in the center(simply supported at both ends,  $L / r = 50$ )

#### 4. 결론

본 연구에서는 F.E.M 법과 선점법을 비교하여 선점법의 유효성을 분석하였으며, 이에 따라 얻어진 결론은 다음과 같다.

첫째, F.E.M 법과 비교하여 비선형 진동 문제에 대한 선점법의 적용성 및 유효성을 확인하였다. 양단단순지지보의 경우에는 진동모드는 진폭에 의하지 않고, 완전히 독립되어 있지만 양단고정보는 분리되지 않는다. 또한 진폭이 커지면 비선형의 영향은 커지지만 같은 진폭을 비교하면, 양단 고정보보다 양단 단순지지보가 영향이 더 크다. 또한 세장비가 작아지면 선단형태, 회전관성의 영향은 무시할 수 없게 되고 축 방향 관성은 세장비가 작아질 때 그 영향이 나타난다.

둘째, F.E.M 결과와의 응답 곡선에 비교에 의해, 비선형 동적응답문제의 선점법

적용성이 확인되었다. 스티프 하중에 의한 응답주기는 자유진동의 주기와 잘 일치하고 있고, 하중이 클수록 비선형의 영향은 크지만 같은 하중 조건에서는 양단 단순지지보보다 양단 고정보가 비선형의 영향이 작다. 또한 세장비가 작은 경우 축방향 관성이 나타난다.

다시 정리해보면 양단 단순지지, 세장비가 50인 경우 선점법의 진동 해석과 응답 주기가 잘 일치하고 있다는 것을 알 수 있다. 이것은 지지조건과 관계없이 일치한다. 또한 하중 레벨이 1에서 10으로 커지게 되면 진폭이 증대하고 주기가 작아지는 것을 알 수 있다.

#### References

- Mei Chuh(2012) "Finite element displacement method for large amplitude free flexural vibrations of beams and plates." Computers and Structures, Vol. 3 No. 1 pp163-174
- Zakaria Zergoune, Bilal Harras, Rhali Benamar(2015) "Nonlinear Free Vibrations of C-C-SS-SS Symmetrically Laminated Carbon Fiber Reinforced Plastic (CFRP) Rectangular Composite Plates." World Journal of Mechanics, Vol. 5 No. 02 pp20-32
- AMABILI M, PELLICANO F, PAÏDOUSSIS M.P(2011) "NONLINEAR VIBRATIONS OF SIMPLY SUPPORTED, CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS, COUPLED TO QUIESCENT FLUID" Journal Of Fluids And Structures, Vol. 12 No. 7 pp.883-918
- Yüzbaşı Şuayip(2014) "A collocation method based on Bernstein polynomials to solve nonlinear Fredholm - Volterra integro-differential equations." Applied Mathematics And Computation Vol. 273 pp142-154
- Roberto Revelli, Luca Ridolfi(2011) "Generalized collocation method for linear and nonlinear convection-diffusion models." KSCE Journal of Civil Engineering, Vol. 15 No. 3 pp.589-593
- Park Seung-Jin(2005) "A Study on Vibration Characteristics of Laminated Plates by Finite Element Method." Korean Society of Civil Engineers, pp.1727-1729
- T.Kant, J.H.Varaiya, C.P.Arora(1990) "Finite element transient analysis of composite and sandwich plates based on a refined theory and implicit time integration schemes." Computers & Structures, New York, United States, vol.36, No.3, pp.401 - 420.