

이차원 와류 병합에 대한 수치적 연구

박상현¹ · 신동진^{2†} · 장경식² · 곽동기²

¹한서대학교 항공시스템대학원

²한서대학교 항공기계학과

Numerical analysis on two-dimensional vortex merger

Sanghyun Park¹, DongJin Sheen^{2†}, Kyoungsik Chang², DongGi Kwag²

¹Dept. of Aeronautical System Engineering, Hanseo University,

²Dept. of Aero Mechanical Engineering, Hanseo University

Abstract : During flight of the aircraft, the vortex merging phenomenon appears under the certain condition between co-rotating vortices which were generated at the wing tip and lifting-surface. And then these merged vortices at both sides show counter-rotating pattern to affect on the downstream of the aircraft. In this paper, the numerical simulations are conducted assuming this phenomenon in two-dimensional co-rotating or counter-rotating vortices pairs. Two-dimensional incompressible Navier-Stokes equations were converted into Vorticity-Streamfunction form and the Galerkin spectral method was adopted. The third order Runge-Kutta method was used for time integration. The effects on the vortex merger and degree of vortex merger were investigated according to time, Reynolds number, and changes in the distance between two vortices.

Key Words : Vortex merger, Vorticity-Streamfunction, Galerkin spectral method

1. 서 론

이착륙 또는 운항중인 항공기에서는 날개 끝과 조종면에서 발생한 각각의 동회전(Co-rotating) 와류가 특정 조건에서 서로 가까워지면서 합쳐지는 와류 병합 현상이 나타나고 그 이후 역회전(Counter-rotating) 와류쌍이 나타나는데(Fig. 1), 이는 항공기의 후류 발달에 큰 영향을 미치게 된다. 이착륙 동안에 형성된 와류는 지면에 가까이 위치하여 소형 항공기의 운항에 위험을 초래하기도 한다.[1, 2]

이러한 동회전 와류의 병합은 와류 쌍의 거리와 순

환비에 의해서 결정되는데, 두 독립적인 상호회전 와류가 서로 임계거리 이내에 있을 때, 중심 와도의 상당부분은 섞이고 그 결과 병합된다

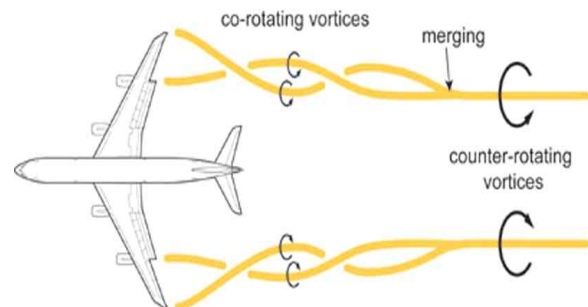


Fig. 1 Schematic of a aircraft wake

Received: Jan. 14, 2016 Revised: Feb. 05, 2016 Accepted: Feb 11, 2016

† Corresponding Author

Tel: +82-10-8981-3068, E-mail: viscous@hanseo.ac.kr

Copyright © The Society for Aerospace System Engineering



Fig. 2 Fujiwhara Effect

또한 기상학적 관점에서는 근접해 있는 두 열대 저기압이 서로 영향을 주고받는 현상인 후지와라 효과가 있는데(Fig 2), 열대 저기압이 대개 가까이에 있는 고기압이나 기압골에 의해 생기는 바람으로 흘러가며 이동한다.

두개의 열대 저기압이 접근하는 경우, 열대 저기압의 회전(북반구에서는 반시계 방향, 남반구에서는 시계 방향)을 통해 붙어오는 바람으로 흘러가는 효과가 더해진다. 이 때문에 때때로 기형적인 진로가 나타나는 경우가 있어 예측에 어려움을 겪기도 한다.

두 열대 저기압의 크기가 다를 때, 큰 열대 저기압은 간섭효과를 지배하고, 작은 열대 저기압은 그에 종속되어 그 주변을 맴돌게 되거나 병합된다.

이에 Orlandi[3]는 직접수치모사기법(DNS)을 이용해서 이차원, 삼차원 상호회전 와류 병합에 대해 연구했고, Hemati[4]는 이차원 상호회전 가우스 와류에 대해서 시뮬레이션을 실시하여 수치 결과와 실험 결과를 비교하였다. Josserand와 Rossi[5]는 와류중심부의 크기와 여러 와도영역의 와류 움직임에 대한 영향을 수학적으로 연구했으며, Meunier 등[6]은 평행한 상호회전 와류의 병합과 역학관계에 대해서 이차원 역학관계를 수치적, 실험적으로 연구하였고 삼차원 효과를 고려하여 수치적으로 연구했다.

본 연구는 삼차원 형상의 항공기 후류 발생 현상을 이차원 형상으로 가정하여 와류 거동에 대한 수치해석을 수행하여 그 결과를 직접수치모사 및 이론적 해석 결과와 비교하여 본 연구의 타당성을 살펴보고자 한다.

2. 수치적 방법

상호회전 와류 쌍의 이차원 수치적 시뮬레이션을 수행하기 위하여 비압축성 Navier-Stokes 방정식을 이중주기 경계조건의 갤러킨 스펙트럴 방법을 통한 와도 유선함수 공식에 기반을 두어 해를 구하였다.[4]

2.1 지배방정식

본 연구에서는 이차원 비압축성 Navier-Stokes 방정식에 컬(curl)연산자를 적용해 와도 유선함수 방정식을 구한다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + N(u, \omega) - \nu \nabla^2 \omega = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad (2)$$

일 때, N 과 ω , u 는 아래와 같이 정의된다.

$$N(u, \omega) = u \cdot \nabla \omega, \quad (3)$$

$$\omega = \nabla \times u = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5)$$

이러한 공식화는 자동적으로 비압축성 속도장의 연속방정식을 만족시키는 장점을 가진다. 게다가, 압력은 표시되지 않으므로, ψ 를 푸아송 방정식에서 대신 해결해야 한다. 위 방정식은 와도의 물리적 중요성 때문에 와류 병합 시뮬레이션에 적합하다.

초기조건으로 다음과 같은 와도 조건을 가정한다.

$$\omega(x, y, t_0) = \omega_0(x, y) \quad (6)$$

계산영역은 길이가 2π 인 각 방향에 대하여 이중주기 조건으로 설정하였다. 따라서 경계 조건은 다음과 같은 형태를 만족해야 한다.

$$\omega(x \pm 2\pi, y) = \omega(x, y \pm 2\pi) = \omega(x, y) \quad (7)$$

2.2 푸리에-푸리에 스펙트럴 방법

x 방향과 y 방향 모두 2π 주기인 초기 유동장으로 가정했기 때문에, ω, ψ, u 의 해는 각 장의 항에 대해

$$k_x \in \left[-\frac{N_x}{2}, \frac{N_x}{2} - 1\right] \in N, \quad k_y \in \left[-\frac{N_y}{2}, \frac{N_y}{2} - 1\right] \in N,$$

를 만족할 때 간략화 된 푸리에 급수로 근사화 할 수 있다.[6] 이때, N_x 와 N_y 는 각 방향 격자수이다.

$$\omega(x, y, t) = \sum_{k_x} \sum_{k_y} \hat{\omega}_{k_x}(t) \hat{\omega}_{k_y}(t) e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (8)$$

$$\psi(x, y, t) = \sum_{k_x} \sum_{k_y} \hat{\psi}_{k_x}(t) \hat{\psi}_{k_y}(t) e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (9)$$

$$u(x, y, t) = \sum_{k_x} \sum_{k_y} \hat{u}_{k_x}(t) \hat{u}_{k_y}(t) e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (10)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{k_x} \sum_{k_y} \hat{v}_{k_x}(t) \hat{v}_{k_y}(t) e^{i(k_x x + k_y y)} \quad (11)$$

이중주기 경계조건은 푸리에 기저함수의 주기적인 특성 때문에 만족된다.

2.3 시간 적분법

지배방정식에 low-storage 3차 Runge-Kutta 알고리즘을 사용하여 파수(wave number)공간에서 시간에 대해서 적분하였다. 이 알고리즘은 선형 확산 항을 음의 Crank-Nicholson 시간 적분하는 동안, 비선형 대류 항을 Runge-Kutta 적분하는 것으로 구성 되어있다. Low-storage RK-3 수행에 있어, 지배방정식은 먼저 파수형태로 표현해야한다. Eq. 1에 푸리에 변환을 하면

$$\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial t} = -\nu(k_x^2 + k_y^2) \hat{\omega} - \hat{N} \quad (12)$$

위와 같이 된다. \hat{N} 은 비선형 대류 항의 푸리에 변환을 나타낸다. 비선형 항의 계산은 2.4절에서 자세하다.

Equation 12는 low-storage RK-3 알고리즘의 해를 구하는 비선형 시스템의 상미분 방정식이다.

Low-storage RK-3 알고리즘에 음의 항을 처리함에 있어, 시간 n의 유동장은 시간 n+1에 대해 다음과 같이 진행된다.

1 단계 :

$$\hat{\omega}_1 = \frac{\hat{\omega}_n - \Delta t [\alpha_1 \nu(k_x^2 + k_y^2) \hat{\omega}_n + \gamma_1 \hat{N}_n]}{1 + \Delta t \beta_1 \nu(k_x^2 + k_y^2)}$$

2 단계 :

$$\hat{\omega}_2 = \frac{\hat{\omega}_1 - \Delta t [\alpha_2 \nu(k_x^2 + k_y^2) \hat{\omega}_1 + \gamma_2 \hat{N}_1 + \rho_1 \hat{N}_n]}{1 + \Delta t \beta_2 \nu(k_x^2 + k_y^2)}$$

3 단계 :

$$\hat{\omega}_{n+1} = \frac{\hat{\omega}_2 - \Delta t [\alpha_3 \nu(k_x^2 + k_y^2) \hat{\omega}_2 + \gamma_3 \hat{N}_2 + \rho_2 \hat{N}_1]}{1 + \Delta t \beta_3 \nu(k_x^2 + k_y^2)}$$

여기서 상수 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \rho_i$ 는 다음과 같이 정의 된다.

$$\alpha_1 = \beta_1 = \frac{4}{15}, \gamma_1 = \frac{8}{15}$$

$$\alpha_2 = \beta_2 = \frac{1}{15}, \gamma_2 = \frac{5}{12}, \rho_1 = -\frac{17}{60}$$

$$\alpha_3 = \beta_3 = \frac{1}{6}, \gamma_3 = \frac{3}{4}, \rho_2 = -\frac{5}{12}$$

이 방법은 Δt 와 ν 를 이용하여 상수를 재정립하는데 유용하고, 계산 단계에서 적은 량의 계산을 가능하게 한다.

2.4 비선형 항의 의사스펙트럴 계산

Low-storage RK-3 알고리즘은 비선형 대류 항인 \hat{N} 은 이미 계산되어 있다고 가정한다. 본 절에서는 의사스펙트럴 방법을 이용하여 \hat{N} 을 계산하고자 한다.

첫 번째로 Eq. 2를 다음과 같이 파수 공간으로 변환시킨다.

$$\nabla^2 \psi = -\omega \leftrightarrow \frac{\hat{\psi}}{k_x^2 + k_y^2} = \hat{\omega} \quad (13)$$

그리고 $\hat{\psi}$ 를 $\hat{\omega}$ 에 대해 나타내면 Eq. 14와 같다.

$$\hat{\psi} = (k_x^2 + k_y^2) \hat{\omega} \quad (14)$$

$\hat{\omega}$ 의 특이성으로 인해 Eq. 14의 해가 $(k_x, k_y) = (0, 0)$ 에서 유효하지 않기 때문에 Peyret의 제안에 따라, $\hat{\psi}(0, 0) = 0$ 으로 설정한다.[8]

Equation 5에서 $\hat{\psi}$ 와 각각의 속도 성분 관계는 Eq. 15, 16과 같다.

$$u(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial y} \leftrightarrow \hat{u} = i k_y \hat{\psi} \quad (15)$$

$$v(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \leftrightarrow \hat{v} = -i k_x \hat{\psi}. \quad (16)$$

$\nabla \omega$ 를 파수 공간에 적용시키면 Eq. 17과 같다.

$$\widehat{\nabla \omega} = \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y} \hat{e}_y = i k_x \hat{\omega} \hat{e}_x + i k_y \hat{\omega} \hat{e}_y \quad (17)$$

콘벌루션 함에 의해서 $\hat{N} = u \cdot \widehat{\nabla \omega}$ 의 계산 대신, Eq. 15, 16, 17의 의사 스펙트럴 계산을 한다.

2.5 계산 조건

본 연구에서는 층류유동 조건에서, 동회전 와류쌍과 역회전 와류쌍의 시간에 따른 거동과 병합 여부를 살펴보고, 이에 영향을 미치는 레이놀즈수(Re)와 와류쌍의 거리에 대한 반지름비(a_0/b_0) 두 변수를 각각 3 경우에 대하여 계산을 수행하였다. 이때, a_0 는 초기 와류 반지름, b_0 는 초기 와류쌍의 거리를 의미한다. 계산 조건을 아래 테이블에 정리하였다.

계산영역은 각 방향 2π 로 설정했으며, 이중주기조건으로 설정했다. 격자는 128×128 로 총 16384개 이며, 시간간격은 0.01초, 각 파수는 $k_x \in [-\frac{N_x}{2}, \frac{N_x}{2}-1]$, $k_y \in [-\frac{N_y}{2}, \frac{N_y}{2}-1]$ 를 만족하는 정수이다.

Table 1 Calculation condition

Simulation parameters			
Type	Co-rotating		Counter-rotating
Re	750	3000	30000
a_0/b_0	0.17	0.21	0.25

각 계산 조건에서 각각의 와류의 반지름은 동일하다고 가정하였으며, 위 테이블 변수들 각각의 조합에 의한 총 18가지 경우에 대해 계산을 수행했다.

2.6 초기조건설정

본 연구에서 초기와도분포는 두 개의 가우스 와류가 동시에 발생하는 것으로 설정하였다.

$$\omega(x, y) = \sum_{i=1}^2 \frac{\Gamma}{\pi a_0^2} \exp\left[-\left(\frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{a_0^2}\right)\right] \quad (18)$$

초기설정은 스펙트럴 방법에서 수치적으로나, 모델 관점에서 불일치가 생기게 되는데 이는 계산영역의 non-zero 순환 때문이다. 순환은 다극 전개에 지배항이기 때문에, 각 주변영역으로 부터 non-zero 순환은 와류 병합 시뮬레이션에 영향을 미친다.

이 문제를 처리하는 한 가지 방법은 각 계산영역에 순 순환이 zero인 균일 와도장을 덮어씌우는 것이다. 이 방법은 확실히 수치적 불일치를 막지만, 모델의 문제는 더 이상 원하는 분석 값과 일치하지 않는다. 본 연구에서 두 와류의 반지름과 간격은 계산영역에 비해 매우 작다. 이는 다극 전개의 순환 항을 충분히 무시

할 수 있고, 인접한 와류 쌍의 영향은 계산에 영향을 미치지 않는다고 가정할 수 있다.

3. 결과

3.1 코드 검증

본 연구에서 적용된 푸리에-갤러킨 스펙트럴 방법을 적용하여 동회전 와류 계산을 통해 얻은 결과를 직접 수치모사기법 결과[3] 및 이론적 결과[3]와 비교하여 검증하였다.

이론적 관점에서 살펴보면, 각 와류가 병합하기 전에는 주변을 회전하면서 가우스 분포가 유지되지만 $|\omega|_{\max}(t) = \Gamma/\pi a_0^2$ 의 값은 감소하게 되는데 이는 점성의 영향으로 인하여 와류의 반지름(a)이 시간에 따라 증가하기 때문이다. a 의 증가는 $a^2/a_0^2 = 1 + 4\pi^2 t/Re$ 로 나타낼 수 있고 $|\omega|_{\max}$ 는 정리하면 $|\omega|_{\max}(t) = \Gamma/\pi a_0^2(1 + 4\pi^2 t/Re)$ 가 되며 단위 시간(t_0)은 $t_0 = 1/\omega_0$ 을 사용한다.[3, 9]

초기 와류 반지름(a_0)의 값을 0.35로 모든 방법에서 동일한 값을 사용하였다.

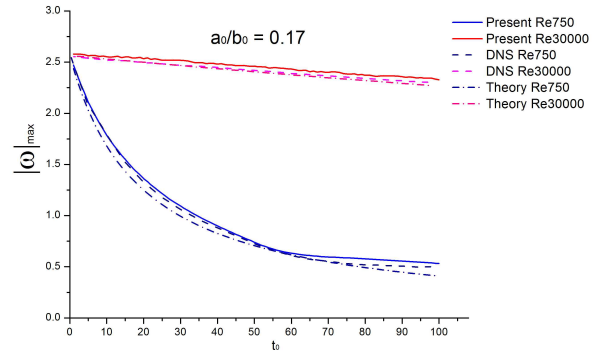


Fig. 3 Comparison with DNS and theoretical results(Co-rotating vortex)

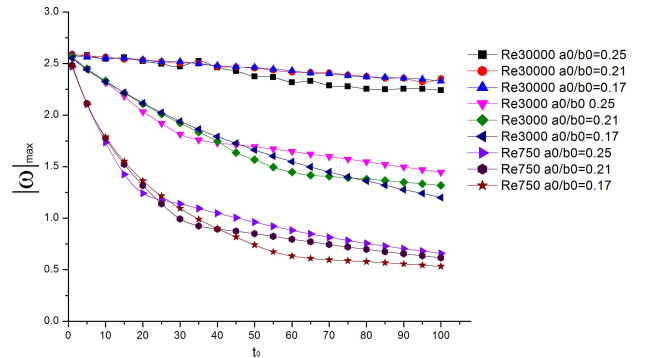


Fig. 4 Results according to Re and a_0/b_0 (Co-rotating vortex)

Figure 3.은 세 가지 방법에 대하여 a_0/b_0 가 0.17일 때 $|\omega|_{\max}$ 의 시간에 따른 변화를 나타낸 그래프이다. 세 방법 모두 $|\omega|_{\max}$ 가 정확히 일치하지는 않지만 시

간에 따른 감소율과 이 감소율이 변하는 지점을 비교적 잘 예측하고 있으므로, 본 연구의 해석 결과의 타당성을 입증하였다.

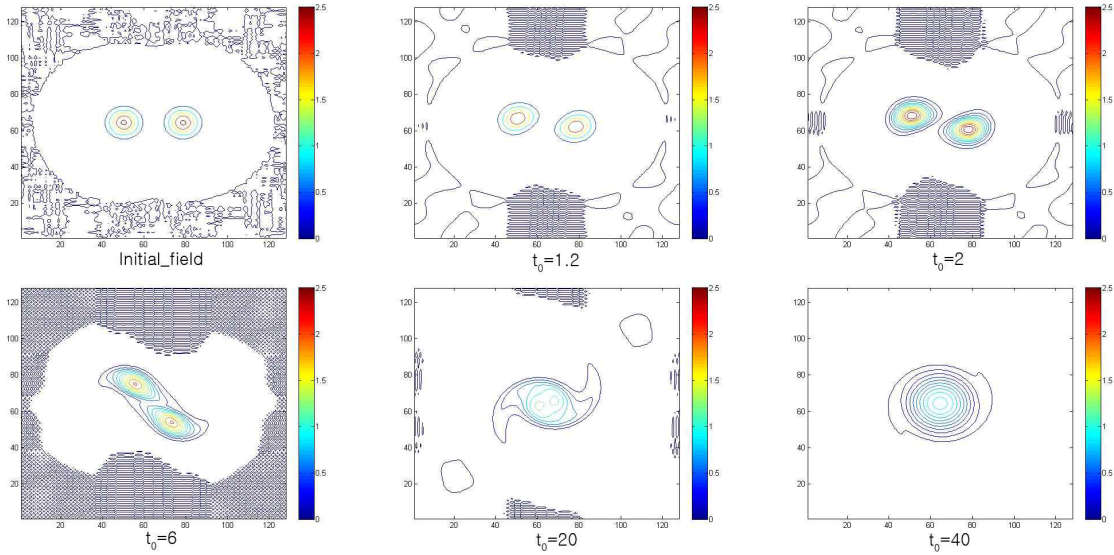


Fig. 5 Vortex merging process at $Re = 750$, $a_0/b_0 = 0.25$ conditions (Co-rotating vortex)

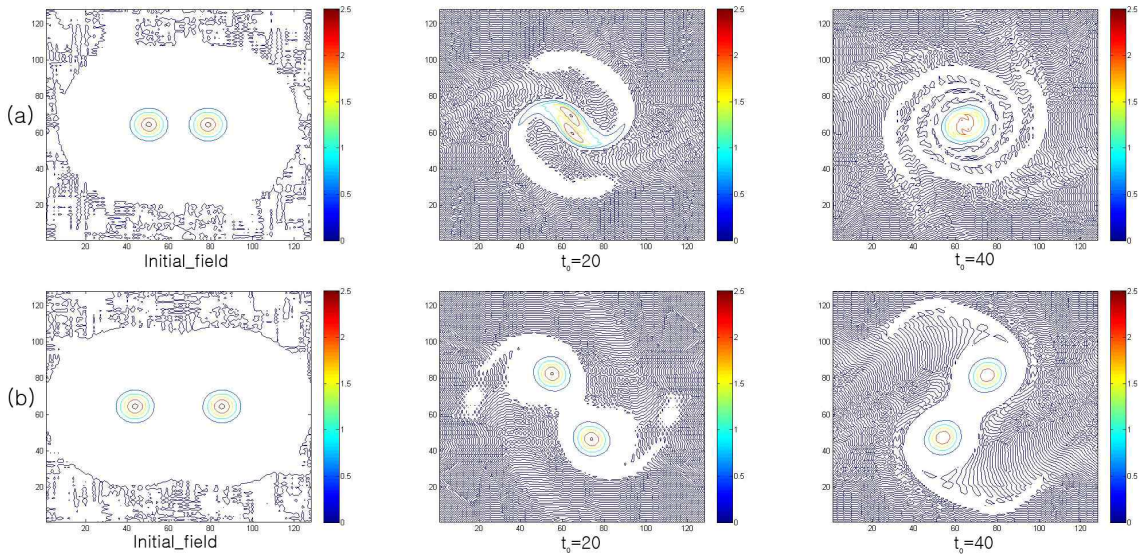


Fig. 6 Vortex merging process at $Re = 30000$, $a_0/b_0 = 0.25$ (a), $a_0/b_0 = 0.17$ (b) conditions (Co-rotating vortex)

3.2 동회전 와류의 레이놀즈수(Re)와 a0/b0 에 따른 와류 병합

레이놀즈수와 와류 간 간격에 따른 $|\omega|_{\max}$ 의 변화를 살펴보고자 한다. 와류 반지름은 이전과 같이 0.35의 고정 값을 사용하였다. Figure 4.는 레이놀즈수와 와류

쌍의 거리에 따른 결과를 나타낸 것으로, 시간에 따라 $|\omega|_{\max}$ 값이 감소하고 있음을 확인할 수 있다. 레이놀즈수가 증가함에 따라 $|\omega|_{\max}$ 값의 감소율이 적어지는데, 이는 레이놀즈수가 증가해 점성의 영향이 줄어들면서 전단층의 혼합이 줄어들음을 의미한다. 와류 쌍의 간격은 와류 병합의 진행에 큰 영향을 주는 것을 확인할

수 있다. Fig. 4. 그래프에서 레이놀즈수 750에서의 결과를 보면 $|\omega|_{\max}$ 변화율이 크게 변하는 구간 ($a_0/b_0 = 0.25$ 의 경우 약 $t_0 = 20$, $a_0/b_0 = 0.21$ 의 경우 약 $t_0 = 35$, $a_0/b_0 = 0.17$ 의 경우 약 $t_0 = 55$)이 있는데 이 구간을 기점으로 와류 병합의 징후가 보인다.

Figure 5.와 Fig. 6.(a)에 $t_0 = 20, 40$ 일 때 와류의 모습을 비교해보면, 와류간의 간격이 가까운 경우 레이놀즈수는 와류 병합의 진행에는 큰 영향을 주지 않고 병합되는 와류의 크기에 영향을 준다.

Figure 6.(b)에서와 같이 와류 간 간격이 멀 경우, 고 레이놀즈수 영역에서 병합이 되지 않는 것을 확인하였다.

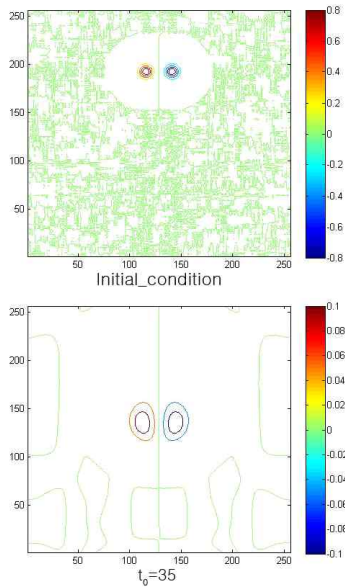


Fig. 7 Vortex pair behavior at $Re = 3000$, $a_0/b_0 = 0.25$ (Counter-rotating vortex)

3.3 역회전 와류쌍의 거동

좌측와류가 시계방향, 우측와류가 반시계 방향으로 역회전하는 와류쌍의 경우, 본 연구에서 고려된 모든 레이놀즈수와 거리에서는 일정 거리를 유지한 채 병합되지 않았으며 아래 방향으로 계속 움직이는 현상을 확인할 수 있었다.(Fig. 7) 주기 조건에 의해 아래로 내려간 와류는 다시 위에서 연결되어 내려오는 것을 확인하였다. 하지만 직접수치모사를 이용한 3차원 해석 결과[3]를 살펴보면 와류의 병합되지 않더라도 가까워졌다가 다시 멀어지는 과정을 반복하게 되는데 2차원 해석에서는 이러한 현상을 예측하지 못함을 확인하였다.[9]

4. 결론

본 연구는 2차원 와류-유선함수 방정식에 푸리에-갤러킨 스펙트럴 방법을 적용[4]하여 동회전 와류쌍의 거동에 대한 계산을 수행하여 DNS 및 이론치와 구체적인 비교검증을 수행하였으며, 역회전 와류쌍의 계산을 통해 기존 방법론의 가능성과 한계를 살펴보았다. Table.1에 명시된 계산 중 동회전 와류쌍의 경우, $a_0/b_0=0.17$, $Re=30000$ 를 제외한 모든 계산에서 와류 병합이 진행되었다. 역회전 와류쌍의 경우 모든 계산에서 와류 병합이 진행되지 않았다.

와류 병합을 이해하는데 있어, 이론적인 접근 방법에서는 와류 최댓값에 대한 레이놀즈수의 영향은 표현되지만, 와류 간 간격에 대한 영향은 예측할 수 없는 단점이 있으며, 전산수치해석 기법중의 하나인 직접수치모사기법은 결과에 대한 예측 능력은 뛰어나지만 장시간의 해석시간을 필요로 한다. 이에 비해 본 연구에서 사용한 푸리에-갤러킨 스펙트럴 방법을 사용한 2차원 해석은 직접수치모사기법 보다 짧은 해석 시간을 필요로 하면서 합리적인 결과를 얻을 수 있었다. 특히 동회전 와류쌍의 경우에는 3차원 직접수치모사와 유사한 거동을 예측함을 확인하였다.

하지만, 3차원 거동을 보이는 역회전 와류쌍 거동의 예측에는 적용이 어려울 것으로 판단된다. 추후에는 3차원 해석적 방법을 통해 역회전 와류쌍의 거동에 대한 연구와 다른 세기를 가지는 동회전 와류쌍의 병합에 대한 연구를 수행하고자 한다.

후 기

이 논문은 2013년도 한서대학교 교내 연구지원사업에 의하여 연구되었음

참고문헌

- [1] P. Orlandi, "Vortex dipole rebound form a wall," Phys. Fluids A 3, 1429, 1990
- [2] 박영민, 강형민, 정덕진, 이해창, "2차원 고양력장치의 플랩형상 및 위치 최적화," 항공우주시스템공학회지 제 7권 제 3호, 2013
- [3] P. Orlandi, "Two-dimensional and three-dimensional direct numerical simulation of co-rotating vortices," Physics of Fluids, Vol. 19, NO. 1, pp. 1~18, 2007
- [4] Maziar Hemati, "Vortex Merger: A Numerical Investigation," UNIVERSITY OF CALIFORNIA-LOS ANGELES, 2009

- [5] Ch. Josserand, M. Rossi, "The merging of two co-rotating vortices : a numerical study," European Journal of Mechanics B/Fluids, 25, pp. 779~794, 2007
- [6] Patrice Meunier, Stephane Le Dizès, Thomas Lewke, "Physics of vortex merging," C.R. Physique, 6, pp. 431~450, 2005
- [7] Lloyd N. Trefethé, "Spectral Methods in Matlab," SIAM, Philadelphia, pp. 9~28, 2000
- [8] R.Peyret, "Spectral Methods for Incompressible Viscous Flow," Springer -Verlag, 2002
- [9] KEIKO K. NOMURA, HIDEAKI TSUTSUI, DANIEL MAHONEY, JAMES W. ROTTMAN, "Short-wavelength instability and decay of a vortex pair in a stratified fluid," J. Fluid Mech. (2006), vol. 553, pp. 283~322, 2006



곽 동 기

2011년 한국항공대학교 박사. 2014년~현재 한서대학교 항공기계학과 교수. 관심분야는 재료역학, 진동제어

저 자 소개



박 상 현

2015년 한서대 항공기계학과 졸업.
2015년~현재 동 대학원 석사과정.
관심분야는 공기역학, 천이



신 동 진

1999년 2월 한국항공대학교 박사. 1999년 3월~현재 한서대학교 항공기계학과 교수. 관심분야는 공기역학, CFD, 비행 시험



장 경 식

2007년 한국과학기술원 박사. 2011년~현재 한서대학교 항공기계학과 교수. 관심분야는 공기역학, 난류, 천이