

처짐이론에 의한 현수교의 해석법

Deflection Theory for the Analysis of Suspension Bridges

1. 머리말

교량공학에서 소위 정해는 존재하지도 않을 뿐만 아니라 필요하지도 않다. 특별한 의미도 없는 정밀해석에 시간과 노력을 낭비하기 보다는 구조계의 기본 거동을 이해하면서 실수없이 해를 구하는 것이 실제 설계에서는 보다 중요한 문제가 된다.

80년대 이후에 전자계산기의 급속한 보급과 함께 변위법이 교량구조의 표준해석법으로 적용되면서 연속보, 트러스, 아치교, 현수교 등을 위하여 개발되었던 교량해석의 고전이론들은 점점 잊혀져 가고 있다.

변위법의 도입에 따른 지난 30여년간의 교량해석이론의 확장과 발전은 절대 과소 평가될 수 없지만 모델링 실수와 이에 따른 부정확한 해석 결과를 무비판적으로 받아들이는 전혀 예상치 못한 문제점이 발생하였으며 이러한 관점에서 계산과정이 간단하고 엔지니어들이 계산의 전 과정을 직접 확인할 수 있는 고전이론들은 당연히 재평가되어야 한다.

처짐이론은 대표적인 현수교 해석이론 가운데 하나로서 현수교 전체의 거동을 하나의 수식으로 이해할 수 있으며 현실적으로도 중앙경간 2000m급 장대 현수교¹⁾의 경우에도 충분히 정확한 해를 구할 수 있는 이론으로서 그 중요성은 과소 평가될 수 없다.

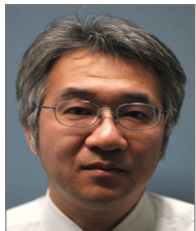
그러나 다른 한편으로는 면내해석 만이 가능하기 때문에 지진해석이나 풍하중해석 등이 불가능한 문제점이 처짐이론의 개발 초기부터 지적되어 왔다.

처짐이론의 기본미분방정식은 Melan²⁾이 확립하였지만 미분방정식의 해를 구하고 실제 현수교의 설계에 적용한 것은 Moisseiff³⁾였다. 여기서는 Moisseiff의 해석이론³⁾을 중



이 승 우

(株)長大 해외사업본부 해외사업부 이사



아리카도 아키라

(株)長大 해외사업본부 해외사업부장



미우라 켄야

(株)長大 해외사업본부장

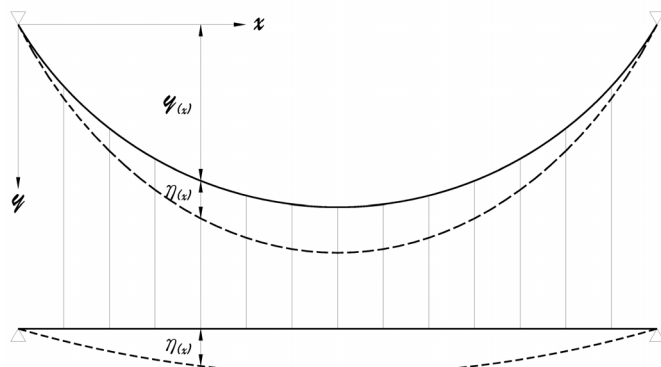


그림 1 단경간 현수교

심으로 처짐이론의 개요를 설명한다.

2. 처짐이론의 기본식

우선 이론 전개에 편의를 위하여 그림 1과 같은 단경간 현수교에 대하여 처짐이론의 개요를 설명하고 특정 하중예를 통하여 3경간 현수교에 대한 처짐이론을 설명한다.

그림 1과 같은 단경간 현수교에서 보강형의 휨 모멘트 $M(x)$ 의 일반식은 다음과 같다.

$$M(x) = M_{0(x)} - H_p y(x) - (H_w + H_p) \eta(x) \quad (1)$$

여기서

$M_{0(x)}$: 현수교 보강형의 단순보로서의 휨 모멘트

H_w : 사하중에 의한 현수교 케이블 장력의 수평성분

(전 경간에 대하여 일정)

H_p : 추가하중에 의한 현수교 케이블 장력의 수평성분

(전 경간에 대하여 일정)

$y(x)$: 사하중 작용시의 현수교 케이블의 연직좌표

사하중 작용시의 케이블의 형상을 포물선으로 가정하면

$$y(x) = \frac{4f}{l^2} x(l-x) \quad (2)$$

여기서 f 는 경간 중앙에서의 새그이다.

$\eta(x)$: 추가하중에 의한 현수교 케이블 및 보강형의 연직 처짐(행거의 신축은 무시)

식 (1)을 보면 처짐이론에서는 탄성이론과 달리 보강형의 휨 모멘트 $M(x)$ 가 보강형의 처짐 $\eta(x)$ 의 함수이며 동시에 사하중에 의한 케이블 장력 H_w 의 함수라는 것을 알 수 있다. 이러한 처짐이론의 비선형성은 Rankine이나 Ritter 등이 제안했던 강체이론이나 Mueller-Breslau와 Melan의 탄성이론에서는 설명할 수 없었던 것이며 이렇게 현수교의 경우에는 사하중이 증가할수록 보강형의 휨 모멘트가 감소한다는 사실을 이론적으로 밝혀낸 것은 현대 장대 현수교의 건설에 획기적인 발판을 마련한 것으로 평가된다.

보강형에 임의의 하중 $p(x)$ 가 작용하는 경우의 연직처짐 $\eta(x)$ 는 보강형의 휨 강성 EI가 경간 내에서 일정한 경우에

다음과 같이 4계 미분방정식으로 표현된다.

$$EI \frac{d^4 \eta}{dx^4} - (H_w + H_p) \frac{d^2 \eta}{dx^2} - H_p \frac{d^2 y}{dx^2} = p(x) \quad (3)$$

식 (3)의 미분방정식에 대하여 Moisseiff가 구한 일반해는 다음과 같다.

$$\eta(x) = \frac{H_p}{H_w + H_p} \left\{ C_1 e^{cx} + C_2 e^{-cx} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{p(x)}{H_p} - \frac{8f}{l^2} \right) + \frac{M_{0(x)}}{H_p} - y(x) \right\} \quad (4)$$

식 (4)에서 c_1, c_2 는 적분 상수로서 구조계 및 하중이 정의되면 경계조건으로부터 구할 수 있으며 c 는

$$c^2 = \frac{H_w + H_p}{EI} \quad (5)$$

으로 정의된다.

식 (4)를 살펴보면 처짐이론에서는 보강형의 휨 강성 EI 뿐만 아니라 사하중의 크기도 처짐에 직접 영향을 미친다는 것을 알 수 있다. 다시 말하면 처짐이론에서는 추가하중에 의한 처짐이 추가하중 자체 뿐만 아니라 추가하중 작용 전에 구조계에 이미 작용하고 있는 사하중으로부터도 영향을 받는다.

식 (4)를 식 (1)에 대입하고 차례로 미분하면 보강형의 휨 모멘트, 전단력 및 보강형이 분담하는 등가하중 등을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$M(x) = -H_p \left\{ C_1 e^{cx} + C_2 e^{-cx} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{p(x)}{H_p} - \frac{8f}{l^2} \right) \right\} \quad (6)$$

$$Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -H_p c (C_1 e^{cx} - C_2 e^{-cx}) \quad (7)$$

$$p(x) - (r_1 - r) = \frac{dQ(x)}{dx} = -H_p c^2 (C_1 e^{cx} + C_2 e^{-cx}) \quad (8)$$

식 (8)에서 r_1 및 r 은 각각 추가하중 작용시(사하중 포함)와 사하중 작용시에 케이블이 분담하는 보강형 단위 길이당 하중으로서 $(r_1 - r)$ 은 추가하중 만에 대응하는 케이블의 분담 하중이다.

현수교의 보강형에 임의의 하중 $p(x)$ 가 작용하면 이 가운데 일부를 케이블이 분담하고 식 (8)의 하중 만을 보강형이 분담하

게 된다. 식 (8)을 보면 보강형에 작용하는 하중이 $p(x) = p$ 로서 일정한 경우에도 보강형이 분담하는 하중은 보강형을 따라서 일정하지 않고 이는 케이블의 영향 때문이라는 것을 알 수 있다. 당연한 말이지만 식 (8)의 하중에 대하여 단 순보의 해석을 수행하면 식 (4),(6),(7)의 처짐, 휨 모멘트, 전단력을 구할 수 있다. 따라서 처짐이론에 의한 현수교의 해석이란 결국 적분상수와 H_p 를 구하는 문제로 귀착된다.

3. 케이블 방정식

처짐이론의 기본미분방정식 (3)에는 두개의 미지수 $\eta(x)$ 와 H_p 가 포함되어 있기 때문에 기본미분방정식 (3)의 해를 구하려면 이들 두 미지수를 연결시키는 또 하나의 방정식이 필요하며 이를 일반적으로 케이블 방정식이라고 한다.

$$\frac{d^2y}{dx^2} \int_0^l \eta(x) dx = \frac{H_p}{E_c A_c} L_E + \omega L_T \tag{9}$$

여기서

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8f}{l^2} \tag{10}$$

$E_c A_c$: 케이블의 축 강성

ω : 케이블의 선팽창계수

t : 온도 변화로서 온도 상승을 정으로 가정한다.

L_E 와 L_T 는 각각 다음과 같다.

$$L_E = \int_0^l \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 dx \approx l \left\{ 1 + 8 \left(\frac{f}{l}\right)^2 \right\} \tag{11}$$

$$L_T = \int_0^l \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 dx = l \left\{ 1 + \frac{16}{3} \left(\frac{f}{l}\right)^2 \right\} \tag{12}$$

식 (9)에 식 (4)를 대입하고 일부 항의 적분을 수행하면

$$\frac{8f}{l^2} \frac{H_p}{H_W + H_p} \left\{ \int_0^l (C_1 e^{cx} + C_2 e^{-cx}) dx + \frac{1}{H_p} \int_0^l \left(-\frac{1}{c^2} p(x) + M_{0(x)}\right) dx + \frac{1}{c^2} \frac{8f}{l} - \frac{2}{3} fl \right\} = \frac{H_p}{E_c A_c} L_E + \omega L_T \tag{13}$$

식 (13)은 비선형 방정식이지만 전자계산기를 이용하면

반복 계산으로 H_p 를 쉽게 구할 수 있으며 수렴성이 상당히 양호하기 때문에 불과 몇 번의 반복계산 만으로도 충분히 정확한 값을 구할 수 있다.

마지막으로 식 (13)으로 H_p 를 구하는 전통적인 방법을 설명한다.

$$H_p = \frac{\int_0^l \left(-\frac{1}{c^2} p(x) + M_{0(x)}\right) dx}{\left\{ -\int_0^l (C_1 e^{cx} + C_2 e^{-cx}) dx - \frac{1}{c^2} \frac{8f}{l} + \frac{2}{3} fl \right\} + \frac{l^2}{8f} (H_W + H_p)} \tag{14}$$

$$\left(\frac{1}{E_c A_c} L_E + \frac{1}{H_p} \omega L_T \right)$$

우선 식 (13)을 식 (14)와 같이 변경하고 임의로 가정한 H_p 를 적용하여 식 (14)로 구한 H_p 가 가정한 H_p 와 일치할 때까지 반복계산한다. 이때 식 (14)로 구한 H_p 를 다음 단계에서 식 (14)의 우항에 대입하면 수렴성이 향상되어 상당히 빠르게 H_p 를 구할 수 있다.

4. 계산예

이하에서는 그림 2와 같이 중앙경간에서 단부로부터 ξ 의 위치까지 균일한 분포하중 $p(x) = p$ 가 작용하고 온도는 상승인 경우를 예로하여 3경간 현수교에 대한 처짐이론의 적용 방법을 설명한다.

중앙 경간에서의 처짐 방정식은 다음과 같다.

$$0 \leq x \leq \xi, \eta(x) = \frac{H_p}{H_W + H_p} \left\{ C_1 e^{cx} + C_2 e^{-cx} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{p}{H_p} - \frac{8f}{l^2} \right) + \frac{M_{0(x)}}{H_p} - y(x) \right\} \tag{15}$$

$$\xi \leq x \leq l, \eta(x) = \frac{H_p}{H_W + H_p} \left\{ C_3 e^{cx} + C_4 e^{-cx} - \frac{1}{c^2} \left(-\frac{8f}{l^2} \right) + \frac{M_{0(x)}}{H_p} - y(x) \right\} \tag{16}$$

중앙경간의 양단 $x=0$ 과 $x=1$ 에서 $\eta(x)=0$ 이며 또한 $y(x)=0, M_{0(x)}=0$ 이므로

$$C_2 = -C_1 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{p(x)}{H_p} - \frac{8f}{l^2} \right) \tag{17}$$

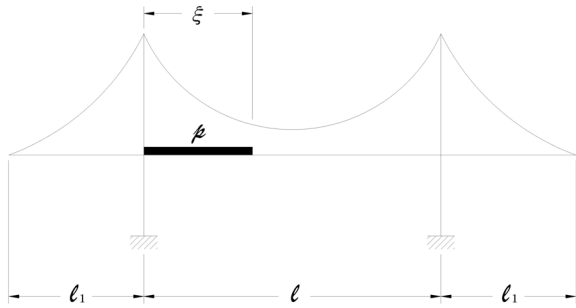


그림 2 하중 재하도

$$C_4 = -C_3 e^{2cl} + \frac{1}{c^2} \left(-\frac{8f}{l^2} \right) e^{cl} \quad (18)$$

식 (15),(16)에서 $x = \xi$ 에서의 처짐은 동일하다는 조건으로부터

$$C_1 e^{c\xi} + C_2 e^{-c\xi} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{p(x)}{H_p} \right) = C_3 e^{c\xi} + C_4 e^{-c\xi} \quad (19)$$

식 (4)를 미분하면 처짐각에 대한 미분방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d\eta(x)}{dx} = \frac{H_p}{H_w + H_p} \left\{ cC_1 e^{cx} - cC_2 e^{-cx} + \frac{d}{dx} \frac{M_{0(x)}}{H_p} - \frac{dy(x)}{dx} \right\} \quad (20)$$

$x = \xi$ 에서의 처짐각은 동일하다는 조건을 고려하면

$$C_1 e^{c\xi} - C_2 e^{-c\xi} = C_3 e^{c\xi} - C_4 e^{-c\xi} \quad (21)$$

식 (19),(21)로부터

$$C_3 = C_1 - \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \frac{p(x)}{H_p} e^{-c\xi} \quad (22)$$

식 (19),(21)에 식 (17),(18)을 대입하고 C_3 를 소거하면

$$C_1 = \frac{1}{(e^{cl} - e^{-cl})} \left\{ -\frac{1}{c^2} \frac{8f}{l^2} (1 - e^{-cl}) + \frac{1}{2} \frac{1}{c^2} \frac{p(x)}{H_p} (-2e^{-cl} + e^{e^{-c(l-\xi)}} + e^{c(l-\xi)}) \right\} \quad (23)$$

측경간의 경우에는 하중이 작용하지 않으므로 $p_{1(x)} = 0$, $M_{10(x)} = 0$ 이며 같은 방법으로 적분 상수를 구하면

$$B_1 = \frac{1}{1 + e^{c_1 l_1}} \frac{1}{c_1^2} \left(-\frac{8f_1}{l_1^2} \right) \quad (24)$$

$$B_2 = B_1 e^{c_1 l_1} \quad (25)$$

여기서 첨자1은 측경간에 대한 값을 의미한다. 케이블 방정식 식 (14)의 분모에서 중앙경간에 대응하는 적분항은

$$-\int_0^\xi (C_1 e^{cx} + C_2 e^{-cx}) dx - \int_\xi^l (C_3 e^{cx} + C_4 e^{-cx}) dx = \frac{1}{c} (C_1 - C_2 - C_3 e^{cl} + C_4 e^{-cl}) \quad (26)$$

측경간에 대응하는 적분항은

$$-\int_0^{l_1} (B_1 e^{c_1 x} + B_2 e^{-c_1 x}) dx = \frac{2}{c_1} (B_1 - B_2) \quad (27)$$

하중은 중앙경간에만 작용하며 중앙경간에서 단순보로서의 휨모멘트를 구하면

$$0 \leq x \leq \xi, M_{0(x)} = p\xi \frac{l - \frac{\xi}{2}}{l} x - \frac{px^2}{2} \quad (28)$$

$$\xi \leq x \leq l, M_{0(x)} = p\xi \frac{\xi}{l} (l - x) \quad (29)$$

케이블 방정식 식 (14)의 분자는 식 (28),(29)로부터

$$\int_0^\xi \left(-\frac{1}{c^2} p(x) + M_{0(x)} \right) dx + \int_\xi^l M_{0(x)} dx = p\xi \left\{ \frac{\xi}{12} (3l - 2\xi) - \frac{1}{c^2} \right\} \quad (30)$$

식 (26),(27),(30)을 케이블 방정식 식 (14)에 대입하면 다음과 같이 그림 2의 하중상태에 대응하는 케이블 방정식을 구할 수 있다.

$$H_p = \frac{p\xi \left\{ \frac{\xi}{12} (3l - 2\xi) - \frac{1}{c^2} \right\}}{\left\{ \frac{1}{c} (C_1 - C_2 - C_3 e^{cl} + C_4 e^{-cl}) - \frac{1}{c^2} \frac{8f}{l} + \frac{2}{3} fl \right\}}$$

$$\begin{aligned}
 & + 2 \left\{ \frac{2}{c_1} (B_1 - B_2) - \frac{1}{c_1^2} \frac{8f_1}{l_1} + \frac{2}{3} f_1 l_1 \right\} \frac{f_1}{l_1^2} \\
 & + \frac{l^2}{8f} (H_W + H_p) \left(\frac{1}{E_c A_c} L_E + \frac{1}{H_p} \omega l T \right) \quad (31)
 \end{aligned}$$

식 (31)을 이용하여 H_p 를 반복계산으로 구할 수 있으며 이렇게 구한 H_p 를 식 (4),(6),(7),(8)에 대입하면 중앙경간 및 측경간에 대한 처짐, 휨 모멘트, 전단력, 보강형의 분담 하중을 쉽게 구할 수 있다.

5. 결론

이상에서 처짐이론의 이론적 개요와 함께 특정 하중상태를 예로 하여 3경간 현수교에 대한 처짐이론의 적용방법을 설명하였다.

과거에는 케이블 방정식을 이용하여 반복계산으로 H_p 를 구하는 과정에 어려움이 있었으나 전자계산기의 이용이 자유로운 현 시점에서 H_p 를 구하는 과정에 아무런 어려움이 없다.

개개의 하중상태에 대하여 적분상수와 단순보로서의 휨 모멘트를 구하는 과정은 수식의 전개과정이 다소 복잡하기는 하지만 이론적으로는 매우 단순하며 3경간 현수교의 경우에는 이미 Moisseiff⁴⁾, Steinman⁵⁾, 平井⁶⁾ 등이 실제 설계에서 필요한 다양한 하중 상태에 대하여 적분상수와 단순보로서의 휨 모멘트를 이미 구하여 놓았으므로 이들 자료들을 편리하게 이용할 수 있다.

이와 같이 처짐이론은 계산과정이 간단하기 때문에 해를 쉽게 검증할 수 있으며 현수교의 설계 자체 뿐만 아니라 변위법 결과에 대한 비교 및 검토를 위해서도 효율적으로 적용할 수 있다. 다른 형식의 교량에서도 마찬가지로지만 현수교의 해석에 있어서도 복잡하고 화려한 모델링에 치중하기 보다는 엔지니어가 구조계의 거동을 이해하고 필요한 최소한의 노력으로 해를 구하는 것이 중요하다.

6. 참고문헌

1. (株)長大, 明石海峽大橋設計報告書
2. Melan, J., Theorie der eisernen Bogenbruecken und der Haengebruecken, 2nd ed. 1888.
3. Moisseiff, L., "The Towers, Cables and Stiffening Trusses of the Bridge over the Delaware River between Philadelphia and Camden", Journal of the Franklin Institute, 1925.
4. Final Report of the Board of Engineers to the Delaware River Bridge Joint Commission of the States of Pennsylvania and New Jersey, 1927.
5. D. B. Steinman, A Generalized Deflection Theory for Suspension Bridges, Transactions of the American Society of Civil Engineers, Vol. 100, No. 1, January 1935, pp. 1133-1170
6. 平井敦, 鋼橋III, 技報堂, 1967. 