

비정규 공정의 극소 불량률 관리를 위한 Z_p 관리도 적용 방안 연구

김종걸* · 최성원*† · 김혜미* · 엄상준**

* 성균관대학교 산업공학과

** SK 하이닉스

On the Application of Z_p Control Charts for Very Small Fraction of Nonconforming under Non-normal Process

Kim, Jong-Gurl* · Choi, Seong-Won*† · Kim, Hye-Mi* · Um, Sang-Joon**

* Department of Industrial Engineering, Sungkyunkwan University

** SK hynix Inc.

ABSTRACT

Purpose: The problem for the traditional control chart is that it is unable to monitor the very small fraction of nonconforming and the underlying distribution is the normal distribution. Z_p control chart is useful where it controls the very small fraction on nonconforming. In this study, we will design the Z_p control chart in order to use under non-normal process.

Methods: Z_p is calculated not by failure rate based on attribute data but using variable data. Control limit for non-normal Z_p control chart is designed based on α -risk calculated by cumulative distribution function of Burr distribution. β -risk, which is for performance evaluation, obtains in the Burr distribution's cumulative distribution function and control limit.

Results: The control limit for non-normal Z_p control chart is designed based on Burr distribution. The sensitivity can be checked through ARL table and OC curve.

Conclusion: Non-normal Z_p control chart is able to control not only the very small fraction of nonconforming, but it is also useful when Z_p distribution is non-normal distribution.

Key Words : Z_p Control Chart, Non-normal Process, Burr Distribution

● Received 17 February 2016, 1st revised 6 March 2016, accepted 7 March 2016

† Corresponding Author(qndcsw@hanmail.net)

© 2016, The Korean Society for Quality Management

This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0>) which permits unrestricted non-Commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

1. 서 론

최근 다양한 공학기술의 발전으로 수많은 새로운 제품들이 개발되고 있다. 이에 따라 제조산업은 빠르게 발전하고 있으며 제조기술과 제조관리기술 또한 이러한 요구에 발맞추어 발전하고 있다. 제조관리기술의 가장 핵심적인 기법인 통계적 공정관리(SPC : Statistical Process Control) 또한 다양한 연구가 진행되고 있다. 관리도는 SPC의 여러 연구 분야 중에서 가장 핵심이 되는 기법이다. 최근 산업 현장에서 관리도의 이슈는 품질특성치의 비정규성으로부터 발생하는 오류와 극소불량률을 어떻게 효율적으로 관리할 것이냐 하는 문제이다. 관리해야하는 품질 특성치는 점점 다양해지고, 고객의 품질요구수준이 높아지고 있는 상황에서 품질특성치의 기본 가정 분포를 정규분포로 하는 기존의 관리도 기법은 상황에 따라 심각한 오류를 가져올 수 있다. 또한 기존의 불량률 관리도로는 초정밀공정에서 ppm 수준의 불량률을 관리하기 힘들다. 따라서 이러한 비정규성과 극소불량에 대한 연구가 시급한 실정이다.

품질특성치의 비정규성에 대한 영향이 정량적으로 얼마나 오류를 가지고 있는지에 대한 연구는 다음과 같다.

Burr(1967)는 $\bar{X}-R$ 관리도의 비정규성에 대한 영향을 연구하기 위해서 1942년 그가 개발한 Burr 분포를 응용했다. Schilling and Nelson(1976)는 균등분포, 삼각분포, 감마분포($\lambda = 1, r = 0.5, 1, 2, 3, 4$ 일 때), 그리고 두개의 정규분포가 혼합된 것처럼 보이는 이봉분포를 조사했다. 샘플 사이즈가 4 ~ 5 인 경우 정규분포라는 가정을 가지고 관리도를 설계하여도 적당한 강건성을 보였다. 그러나 감마분포에서 $r = 0.5, 1$ 일 경우에는 관리도의 수행도가 현저히 저하되는 것을 발견할 수 있었다. 감마분포에서 $r = 0.5$ 이고 샘플의 수가 4보다 작거나 같을 때, 정규분포에서 이론적인 의 값은 0.0027 이지만 실제로는 0.014가 되거나 더 작아진다고 주장하였다. Chang(2006)은 일변량과 다변량 누적합관리도에서 왜도와 첨도의 변화에 따른 ARL을 비교하여 비정규성의 영향에 대해서 연구했다. 누적합 관리도의 경우 참고값을 0.5 이하로 설정해야 비정규성에 대해서 비교적 강건하다고 주장하였다.

비정규성을 가지는 모수에 대해서 관리도를 어떻게 설계할 것인지에 대한 연구는 다음과 같다.

Zimmer and Burr(1963)은 비정규 모수에서 Burr 분포를 응용하여 변동샘플링계획을 개발하였다. Yourstone and Zimmer(1992)는 비정규 공정에서 평균을 관리하기 위해서 Burr 분포를 활용하여 관리한계선을 계산하고, 비정규성을 고려하지 않은 일반 관리도와 ARL 비교를 통해 그 연구의 타당성을 입증하였고, Chou and Cheng(1997)는 Yourstone and Zimmer(1992)의 연구를 확장하여 범위 관리도의 관리한계선을 설계하는 모델을 확장 연구했다. Chang and Bai(2001)는 비대칭 분포를 서로 다른 표준편차를 갖는 두개의 정규분포를 이용하는 가중표준편차 방법을 제안하고, 이를 이용하여 누적합, 지수가중이동평균 관리도를 설계했다. 모집단이 대수정규, 와이블, 감마분포를 따르는 경우에 대한 비교를 통해 타당성을 제시했다. Chao-Yu Chou et al(2005)는 비정규 분포에 합격판정관리도를 적용하는 방법에 대해서 연구했다. Kim(2012)는 다변량 관리도에서 비정규분포에 대한 T^2 관리도를 연구했으며, Kim(2012)는 신뢰성 특성치를 사용하여 극소불량률관리를 위한 가속수명시험관리도 설계방안을 연구하였다. 다변량 데이터에 대한 비정규 관리도의 연구로는 Kim(2012)가 지역적이고 비정규분포를 갖는 데이터에 대해서 지역기반 T^2 관리도를 연구했다.

극소불량에 대한 연구도 지속적으로 진행되고 있다. Cho(1997)는 100ppm 관리수준에서 공정관리방안에 대해서 연구하였다. Joekes and Pimentel Barbosa(2013)은 불량률 매우 낮으며, 이항분포를 따르는 공정에서 시료수가 적은 경우에 Cornish-Fisher 분위수 수정을 기반으로 한 수정된 p 관리도를 개발했다. 하지만 시료수가 20개 이하로 작으면서 \hat{p} 의 값이 0.001 이하인 경우에는 관리도의 수행도가 현저히 낮아진다는 것이다. 앞서 소개한 연구가 극소불량률을 관리한다는 관점에서는 충분한 가치가 있으나 서론에 제시한 바와 같이 ppm 수준의 공정을 관리하기 위해

서는 지속적인 연구가 필요하다고 판단된다.

본 논문에서는 계량형 데이터를 활용하여 극소불량률을 관리하는 기법인 Z_P 관리도를 비정규 공정에서도 적용할 수 있도록 Burr 분포를 활용하여 관리도를 설계함으로써 비정규 공정에서 극소불량률을 관리할 수 있는 관리도 방법을 연구하고자 한다.

2. 이론적 배경

2.1 Z_P 관리도

기존의 불량률 관리도인 p 관리도, np 관리도, u 관리도, c 관리도 등은 ppm 수준의 극소불량률을 관리하기에 부적합하다. 불량률을 나타내기 위해서는 계수형 데이터를 활용하므로 많은 샘플수가 필요하기 때문이다. 이러한 문제점을 해결하기 위해서 Um and Kim(2013)은 계량형 데이터를 활용하여 극소불량률을 Z_P 통계량으로 나타내었고 이를 활용하여 극소불량률을 관리할 수 있는 Z_P 관리도를 개발하였다. 공정의 불량률을 P 라고 했을 때, P 는 망대 특성인 경우 식(1), 망소특성인 경우 식(2)와 같이 정의할 수 있으며, 표준화 공식에 의하여 변환할 수 있다.

$$P = P\{X < LSL\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{LSL - \mu}{\sigma}\right\} \quad (1)$$

$$P = P\{X > USL\} = P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{USL - \mu}{\sigma}\right\} \quad (2)$$

여기서 각각의 Z_P 를 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{Z}_P = \frac{LSL - \hat{\mu}}{\sigma} \quad (3)$$

$$\hat{Z}_P = \frac{USL - \hat{\mu}}{\sigma} \quad (4)$$

Z_P 관리도는 통계량 Z_P 의 분포가 정규분포라는 가정 하에 Z_P 분포의 모수인 평균과 분산을 MLE와 Fisher Information Matrix 방법으로 추정한 후 Shewhart 가 제시한 방법으로 관리도를 설계하는 것이다.

$\hat{Z}_{P_1}, \hat{Z}_{P_2}, \hat{Z}_{P_3}, \dots, \hat{Z}_{P_n}$ 은 iid(independent identically distributed)이며 $N \sim (Z_P, \frac{1}{n} + \frac{Z_P^2}{2n})$ 이다.

합격공정불량률 P_0 를 관리하기 위해, P_0 일 때 평균을 μ_{P_0} 라고 하고, 불합격공정불량률 P_1 일 때 평균을 μ_{P_1} 라고 하자. 품질특성치 X의 규격한계선에 따라 불량률과 평균의 관계는 <Figure 1> 과 같다. X의 분산은 관리 상태라고 가정한다.

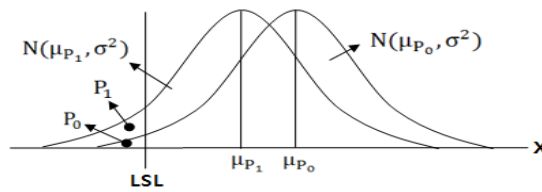


Figure 1. P_0 , P_1 and μ_{P_0} , μ_{P_1}

Z_P 통계량에 대한 정의에 따라 μ_{P_0} 일 때 Z_P 통계량을 Z_{P_0} 라고하고, μ_{P_1} 일 때 Z_P 통계량을 Z_{P_1} 라고 한다면 Z_P 분포를 <Figure 2> 와 같이 나타낼 수 있다.

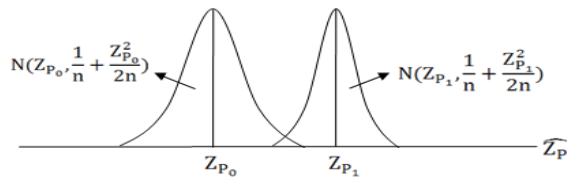


Figure 2. Concept of Z_P distribution

Z_P 분포의 특성에 따라 Shewhart 관리도 방법으로 관리한계선을 설계하면 식(5), 식(6)과 같으며, 그림으로 표현하면 <Figure 3>과 같다.

$$UCL = Z_{p_0} + L_{z_p} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{Z_{p_0}^2}{2n}} \tag{5}$$

$$LCL = Z_{p_0} - L_{z_p} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{Z_{p_0}^2}{2n}} \tag{6}$$

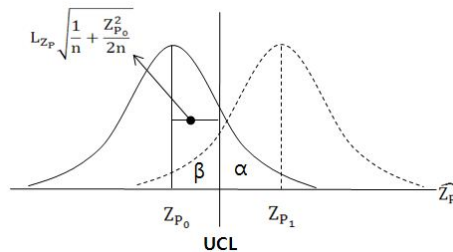


Figure 3. Structure of Z_P control chart

Z_P 관리도는 계량형 데이터를 활용함으로써 ppm 수준의 극소 불량률을 관리할 수 있다는 장점이 있다. Um and Kim(2013)에서는 <Table 1>과 같은 ARL(Average Run Length) 표를 제시하여 Z_P 관리도의 민감도에 관한 예제를 설명하고 있다.

Table 1. Average run Length for the Z_p control chart

Parameters					Z_{p0}				
Z_{P1}	P_1 (ppm)	n	L_{ZP}	ARL_0	-5.0	-5.5	-6.0	-6.5	-7.0
-4.40	5	15	2.8	391.4	135.0	61.3	30.3	16.2	9.4
-4.40	5	30	2.8	391.4	62.2	18.1	6.8	3.3	2.0
-3.09	1000	10	2.8	391.4	26.0	15.2	9.5	6.2	4.4

Um and Kim(2013)의 <Table 1>에 따르면 공정이 $Z_{p0} = -7.0$ 수준으로 관리되고 있다는 가정 하에 5ppm(즉, $Z_{P1} = -4.4$)에 대한 Z_p 관리도를 설계하면 $L_{ZP} = 2.8$, $n = 15$ 를 가지고 관리한계선을 설계하여 $ARL_0 = 391.4$, $ARL_1 = 9.4$ 수준, 그리고 $n = 30$ 으로 늘리면 $ARL_1 = 2.0$ 수준으로 관리를 할 수 있다. 또한 $Z_{p0} = -6.5$ 일 때, 1,000ppm(즉, $Z_{P1} = -3.09$)에 대한 Z_p 관리도를 설계한다면 $L_{ZP} = 2.8$, $n = 10$ 를 가지고 관리한계선을 설계하여 $ARL_0 = 391.4$, $ARL_1 = 6.2$ 으로 ppm 수준의 극소불량관리가 가능하다.

Um and Kim(2013)의 Z_p 관리도에 대한 연구 이후에 Kim et al(2015)는 Z_p 관리도의 수행도 평가를 위한 연구를 진행함으로써 Z_p 관리도의 타당성과 활용성 측면에서 더욱 발전시켰으며, Kim and Um(2015)는 Z_p 관리도의 수행절차에 대한 추가 연구를 통하여 특허에 등록되었다.

2.2 Burr 분포

만약 공정에서 관리하고자하는 품질특성치가 정규분포에 대해서 심하게 왜곡되어 있는 경우에는 표본의 수가 충분히 클 경우를 제외하고는 표본의 평균도 정규분포가 아니다. 이러한 비정규 공정에 대한 관리도를 설계하기 위해서 많은 연구가 진행되고 있으며, 그 중 Burr 분포를 활용하는 연구가 특히 활발히 진행되고 있다.

Burr 분포는 1942년에 Irving W. Burr 가 처음 발표했다. Burr 분포의 누적분포함수는 다음과 같다.

$$F(y) = 1 - \frac{1}{(1 + y^c)^k} \tag{7}$$

(단, $c \geq -1$, $k \geq -1$)

위의 식(9)을 사용하여 Burr(1942)는 Burr 분포의 확률밀도함수를 다음과 같이 정의하였다.

$$f(y) = \frac{kcy^{c-1}}{(1 + y^c)^{k+1}} \tag{8}$$

(단, $c \geq -1$, $k \geq -1$)

Burr(1942)는 c 와 k 의 다양한 조합의 Burr 분포에서 표준편차, 왜도, 첨도의 예상 값을 표로 나타냈다. 왜도는 3차 적률이며 분포의 치우침 정도를 나타내는 척도이다. 또한 첨도는 4차 적률이며 분포의 뾰족한 정도를 나타내는 척도이다. Yourstone and Zimmer(1992)는 1차, 2차, 3차, 4차 적률이 같은 2개의 분포가 반드시 동일하다고 볼 수는 없지만 실용적인 측면에서 그 둘이 다르지 않다고 가정하는 것이 합리적이라고 주장하였다.

Burr(1973)에서는 왜도와 첨도의 다양한 조합에 대해서 일치하는 평균과 표본편차, 그리고 c, k 값을 표로 나타내었다. 또한 이 표를 사용하여 Burr 분포의 확률변수(Y)와 확률변수(X) 사이에 표준화된 변환을 할 수 있도록 다음과 같은 표준화 공식을 제시하였다.

$$\frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{Y - M}{S} \tag{9}$$

<Figure 4>는 X의 분포와 Burr분포로 피팅된 Y의 분포, 그리고 표준화 공식의 관계이다.

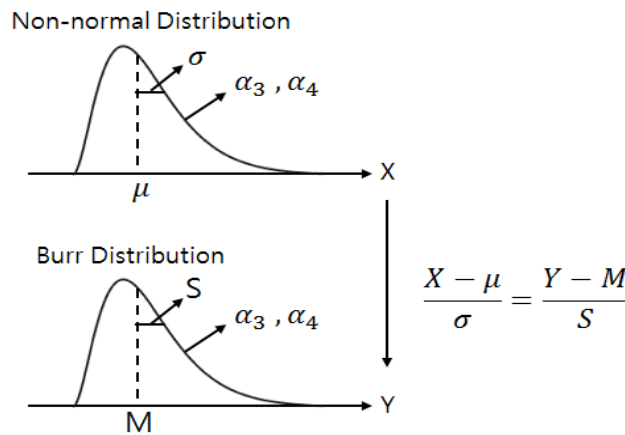


Figure 4. Non-normal distribution and Burr distribution

Burr(1973)은 그의 논문에서 식(7)에 대한 왜도와 첨도의 범위를 확장하기 위해 $G(y) = (1 + y^{-c})^{-k}$ 로 변환한 함수를 연구했으며, 이를 통해 거의 모든 단봉형 분포에 대해서 1차 ~ 4차 적률을 매칭 시킬 수 있다고 했다. 그리고 다양한 적률에 따라서 c, k 값을 결정할 수 있으며 식(9)를 통해 표준화변환이 가능한 적률표를 제시하였다.

예를들어 c=4.85437, k=6.22665 인 Burr 분포는 정규분포에 근사한다. 또한 형상모수가 16 인 감마분포의 경우 왜도가 5, 첨도가 3.375 이며 이 감마분포는 c=3, k=6 인 Burr 분포로 근사될 수 있다.

3. 비정규 Z_p 관리도 설계

Z_p 관리도는 ppm 수준의 극소 불량률을 Z_p 통계량으로 나타내고, 정규분포라는 가정 하에 통계적 특성을 활용하여 관리도를 설계한다. 하지만 관리하고자하는 품질특성치가 정규분포일 때만 적용이 가능하다. 3장에서는 Z_p 통계량의 왜도와 첨도가 계산될 수 있는 경우에 비정규 Z_p 관리도의 관리한계선을 설계하기 위한 절차를 설명한다.

비정규분포를 따르는 품질특성치 X와 합격공정불량률을 P_0 라고 정의하고 P_0 일 때 평균을 μ_{P_0} 라고 정의한다. 또한 불합격공정불량률을 P_1 라고 정의하고 P_1 일 때 평균을 μ_{P_1} 라고 정의하자. X의 규격한계선에 따라 불량률과 평균의 관계는 <Figure 5>와 같다. X의 분산은 관리 상태라고 가정한다.

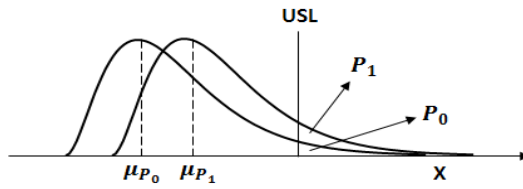


Figure 5. P_0 , P_1 and μ_{P_0} , μ_{P_1} under non-normal

좌우대칭인 정규분포와는 달리 비정규분포에서는 긴꼬리 부분에 대한 불량률의 예측이 중요하다. 비정규성을 고려하지 않으면 이 부분에 대한 불량률의 예측치와 실제 불량률의 차이가 크게 날 수 있다. 본 논문에서는 망대특성일 경우와 망소특성일 경우에 대한 관리한계선을 설계한다. 망대특성일 경우에는 왼쪽으로 긴꼬리 분포, 그리고 망소특성일 경우에는 오른쪽으로 긴꼬리 분포에 대해서 유념하여 비정규 Z_p 관리도를 설계해야 한다.

비정규 Z_p 관리도를 설계하기 위해서 Burr 분포의 특성과 일반적인 Shewhart 관리도의 설계 방법을 응용한다. 앞에서 정의한 Z_p 통계량은 망대특성일 때 식(10), 망소특성일 때 식(11)과 같다.

$$\hat{Z}_{P_i} = \frac{LSL - \hat{\mu}_X}{\sigma} \tag{10}$$

$$\hat{Z}_{P_i} = \frac{USL - \hat{\mu}_X}{\sigma} \tag{11}$$

우선 샘플링에 대한 경제성과 민감도를 고려하여 샘플수를 결정한다. 그리고 공정의 비정규성을 파악하기 위해 앞서 정의한 Z_p 통계량의 공식에 따라 Z_p 통계량의 평균은 식(12), 표준편차는 식(13), 왜도는 식(14), 첨도는 식(15)으로 계산한다.

$$\hat{\mu}_{ZP} = \frac{\sum_{i=1}^n Z_{P_i}}{n} \tag{12}$$

$$\hat{\sigma}_{ZP} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Z_{P_i} - \hat{\mu}_{ZP})^2}{n - 1}} \tag{13}$$

$$\hat{\alpha}_{3Z_p} = \frac{\sum_{i=1}^n (Z_{P_i} - \hat{\mu}_{ZP})^3}{\left[\sum_{i=1}^n (Z_{P_i} - \hat{\mu}_{ZP})^2 \right]^{3/2}} \tag{14}$$

$$\hat{\alpha}_{4Z_p} = \frac{\sum_{i=1}^n (Z_{P_i} - \hat{\mu}_{ZP})^4}{\left[\sum_{i=1}^n (Z_{P_i} - \hat{\mu}_{ZP})^2 \right]^2} \tag{15}$$

Burr(1942) 또는 Burr(1973) 의 테이블을 이용해서 $\hat{\alpha}_{3ZP}$ 와 $\hat{\alpha}_{4ZP}$ 에 가장 가까운 Burr 분포의 모수인 c, k 값과 Burr 분포의 평균 M , 표준편차 S 를 결정할 수 있다. Z_P 분포의 c, k 값을 사용하여 Burr 분포의 누적밀도함수가 정의되면, 1종 오류인 α 를 기준으로 관리한계선을 결정한다. 보통 Shewhart 관리도에서 3σ 관리한계선을 선택할 경우 $\alpha = 0.0027$ 이다. Burr 분포로 정의된 분포의 α 를 기준으로 관리한계선을 선택한 후 Z_P 분포로의 변환을 위하여 식(16)과 같은 Burr 분포의 표준화 공식을 사용한다.

$$\frac{Y - M}{S} = \frac{Z_P - \hat{\mu}_{ZP}}{\hat{\sigma}_{ZP}} \tag{16}$$

식(16)의 표준화 공식에서 Z_P 에 대한 공식으로 변환하면 식(17)과 같다.

$$Z_P = \frac{\hat{\sigma}_{ZP}}{S} Y - \frac{\hat{\sigma}_{ZP}}{S} M + \hat{\mu}_{ZP} \tag{17}$$

Burr 분포의 누적밀도함수인 식(7)을 사용하여 α 에 대한 공식으로 나타내면 망대특성인 경우 식(18), 망소특성인 경우 식(19)과 같다.

$$\alpha_U = (1 + Y_U^c)^{-k} \tag{18}$$

$$\alpha_L = 1 - (1 + Y_L^c)^{-k} \tag{19}$$

식(18), 식(19)로부터 Y 에 대한 식으로 정리하면 식(20), 식(21)과 같다.

$$Y_U = (\alpha_U^{-1/k} - 1)^{1/c} \tag{20}$$

$$Y_L = [(1 - \alpha_L)^{-1/k} - 1]^{1/c} \tag{21}$$

여기서 α_U 과 α_L 는 설계하고자 하는 관리한계선에 대한 확률이고, Y_L 은 Burr 분포에서 확률 α_L 에 대한 관리한계선이다. <Figure 6>는 α_U, α_L 과 관리한계선의 관계를 그림으로 나타낸 것이다.

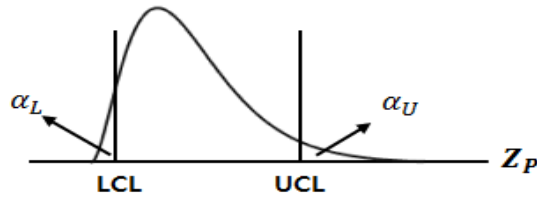


Figure 6. α_U, α_L and control limit

표준화 공식으로부터 도출된 식(17)과 Burr 분포에서 확률 α_U, α_L 에 대한 식(20), 식(21)을 활용하여 비정규 Z_P 관리도에 대한 관리한계선을 계산할 수 있다. 망대특성인 경우 하한스펙(LSL)을 가지므로 Z_P 통계량은 커질수록 불량률이 커지며 관리상한선(UCL)을 통해 관리한계선을 설계할 수 있다. 또한 망소특성인 경우 상한스펙(USL)을 가지며, Z_P 통계량은 작아질수록 불량률이 커지므로 관리하한선(LCL)을 통해 관리한계선을 설계할 수 있다. 위의 계산과정으로부터 도출된 UCL과 LCL은 식(22), 식(23)과 같다.

$$UCL = \hat{\mu}_{ZP} + \left[\frac{[(\alpha_U)^{-(1/k)} - 1]^{1/c}}{S} - \frac{M}{S} \right] \hat{\sigma}_{ZP} \tag{22}$$

$$LCL = \hat{\mu}_{ZP} - \left[\frac{M}{S} - \frac{[(1 - \alpha_L)^{-(1/k)} - 1]^{1/c}}{S} \right] \hat{\sigma}_{ZP} \tag{23}$$

위 관리한계선 공식은 α 를 따로 계산할 필요 없이 바로 원하는 수준을 결정해서 관리한계선을 설계할 수 있다는 장점이 있다. 일반적으로 Shewhart 가 제시한 3σ 관리법을 기준으로 한다면 $\alpha = 0.0027$ 로 하여 관리한계선을 설계할 수 있다.

4. 비정규 Z_P 관리도의 수행도 평가

4.1 비정규 Z_P 관리도의 민감도

관리도의 민감도를 평가하는 방법은 일반적으로 ARL 표와 OC 곡선을 사용한다. 4.1장에서는 ARL과 OC 곡선을 계산하기 위해 2종 오류 β 를 구하는 식을 유도한다. Montgomery(2013, 254-257)는 관리도의 β 를 식(24)와 같이 정의하였으며 이를 바탕으로 비정규 Z_P 관리도의 β 함수를 식(7)과 식(9)를 사용하여 유도할 수 있다.

$$\beta = P\{LCL \leq \bar{X} \leq UCL \mid \mu = \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma\} \tag{24}$$

식(24)를 기반으로 Z_P 관리도의 β 에 대한 식을 유도하면 망대특성인 경우 식(25), 망소특성인 경우 식(26)이다. 또한 <Figure 7>과 같이 나타낼 수 있다.

$$\beta_U = P\{Z_{P1} \leq UCL \mid Z_{P1} = Z_{P0} + \delta\sigma_{ZP}\} \tag{25}$$

$$\beta_L = P\{LCL \leq Z_{P1} \mid Z_{P1} = Z_{P0} - \delta\sigma_{ZP}\} \tag{26}$$

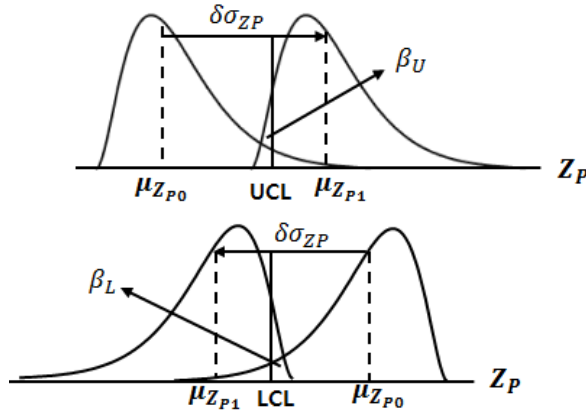


Figure 7. Z_p shift and β

β 의 함수를 유도하기 위해 식(7), 식(20), 식(21)을 사용한다. 먼저 Burr 분포로 피팅된 Y에서 공정의 이동수준을 구하기 위하여 식(18)의 표준화 공식을 응용하여 식(27)와 같이 나타낸다.

$$\frac{(Y + \Delta) - M}{S} = \frac{(Z_{P0} + \delta\sigma_{ZP}) + \mu_{ZP}}{\sigma_{ZP}} \tag{27}$$

식(27)을 통하여 Δ 값을 식(28)으로 나타낸다.

$$\Delta = \delta S \tag{28}$$

망대특성인 경우 식(20), 식(25), 식(30)에 의해서 관리상한선에 대한 β_U 를 식(29), 망소특성인 경우 식(21), 식(26), 식(30)에 의해서 관리하한선에 대한 β_L 을 식(30)와 같이 나타낼 수 있다.

$$\beta_U = 1 - \frac{1}{\left[1 + \left[\left[\alpha_U^{-1/k} - 1\right]^{(1/c)} - \delta S\right]^c\right]^k} \tag{29}$$

$$\beta_L = \frac{1}{\left[1 + \left[\left[(1 - \alpha_L)^{-1/k} - 1\right]^{(1/c)} + \delta S\right]^c\right]^k} \tag{30}$$

식(29), 식(30)을 사용하여 비정규 Z_p 관리도의 ARL 표와 OC 곡선을 나타낼 수 있다. 4.1장에서는 다음 <Table 2>과 같이 6가지 경우에서 왜도와 첨도에 대한 ARL 표와 OC 곡선을 나타내고자 한다. 각 왜도와 첨도에 따른 Burr

분포의 모수 c , k 와 평균(M), 표준편차(S)는 Burr(1973)의 표에서 찾을 수 있다.

Table 2. Parameter for Burr distribution

	왜도	첨도	c	k	M	S
case 1	0.1	3	4.297698	6.283287	0.607662	0.171429
case 2	0.5	4	4.548291	2.540631	0.788396	0.236949
case 3	1	5	2.347094	4.428629	0.506046	0.262382
case 4	1	6	3.587147	2.199033	0.792649	0.312572
case 5	1.5	7	1.598009	6.815789	0.291987	0.208693
case 6	1.5	8	2.034632	3.663584	0.522485	0.323722

위 <Table 2>에서 제시한 6가지 case에 따른 ARL 표는 <Table 3>이며, OC곡선은 <Figure 8>이다.

Table 3. Average run length for non-normal Z_p control chart

	Parameter	Z_p shift (δ)																						
		α	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.25	2.50	2.75	3.00	3.25	3.50	3.75	4.00	4.25	4.50	4.75	5.00	
case 1	0.0027	370.4	197.9	108.0	60.4	34.9	20.9	13.0	8.4	5.7	4.1	3.0	2.3	1.9	1.6	1.4	1.3	1.2	1.1	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
case 2	0.0027	370.4	252.7	171.1	115.2	77.2	51.6	34.4	23.0	15.5	10.6	7.3	5.2	3.8	2.8	2.2	1.8	1.5	1.3	1.2	1.1	1.0	1.0	1.0
case 3	0.0027	370.4	267.2	191.8	137.1	97.7	69.3	49.2	34.8	24.7	17.6	12.6	9.1	6.6	4.9	3.7	2.8	2.2	1.8	1.5	1.3	1.2	1.2	1.2
case 4	0.0027	370.4	279.7	209.5	155.7	114.7	83.9	60.9	43.9	31.4	22.4	15.9	11.3	8.1	5.8	4.3	3.2	2.4	1.9	1.6	1.4	1.2	1.2	1.2
case 5	0.0027	370.4	282.4	214.5	162.4	122.6	92.2	69.2	51.8	38.7	28.9	21.5	16.1	12.0	9.0	6.8	5.1	3.9	3.0	2.4	1.9	1.5	1.5	1.5
case 6	0.0027	370.4	289.4	224.8	173.5	133.1	101.5	77.0	58.0	43.5	32.5	24.1	17.9	13.2	9.8	7.3	5.4	4.1	3.1	2.4	1.9	1.6	1.6	1.6

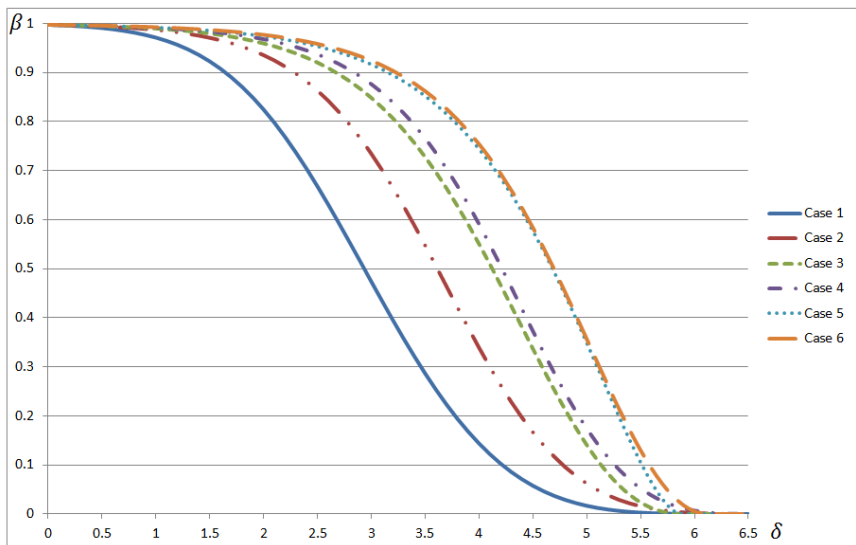


Figure 8. Operating-characteristic curves for non-normal Z_p control chart

4.2 수치 예제

4.2 장에서는 수치 예제를 통해 비정규 Z_P 관리도의 수행도를 평가한다. 예제는 Um and Kim(2013)과 Chou et al(2005), Yourstone et al(1992)를 참고하였다.

품질특성치 X 는 망소특성을 가지며 다음과 같은 통계량과 변수를 가진다고 가정한다.

$$\mu_X = 12.5, \sigma_X = 1.5, n = 5, USL = 20$$

식(11)로부터 각각의 X_1, X_2, X_3, \dots 로부터 $Z_{P1}, Z_{P2}, Z_{P3}, \dots$ 를 계산할 수 있으며 각각의 Z_P 통계량으로부터 식(12), 식(13), 식(14), 식(15)를 통해 Z_P 통계량의 평균, 표준편차, 왜도, 첨도를 계산할 수 있다. 또한 계산된 Z_P 의 왜도와 첨도로부터 Burr(1942) 또는 Burr(1973)의 테이블을 이용해서 Burr 분포의 c, k 를 구할 수 있다. Z_P 분포는 다음과 같은 통계량을 가진다고 가정한다.

$$\mu_{ZP} = 5, \sigma_{ZP} = 1.64, \alpha_{3ZP} = 1.218, \alpha_{4ZP} = 5.832, c = 2, k = 5, M = 0.42951, S = 0.25596$$

X 는 망소특성이므로 식(23)을 통해서 LCL을 계산할 수 있다. $\alpha = 0.002555$ 로 계산한다.

$$\begin{aligned} LCL &= \hat{\mu}_{ZP} - \left[\frac{M}{S} - \frac{[(1 - \alpha_L)^{-(1/k)} - 1]^{1/c}}{S} \right] \hat{\sigma}_{ZP} \\ &= 5 - \left[\frac{0.42951}{0.25596} - \frac{[(1 - 0.002555)^{-(1/5)} - 1]^{1/2}}{0.25596} \right] \cdot 1.64 = 2.392971 \end{aligned}$$

다음으로 비정규성을 고려하지 않은 Z_P 관리도를 설계하여 비교하고자 한다. 앞서 제시했던 품질특성치 X 에 대한 가정에 의해서 Z_P 분포를 정의하고 관리한계선을 계산하면 다음과 같다.

Um and Kim(2013)에 의해서 Z_P 분포는 $N\left(Z_P, \frac{1}{n} + \frac{Z_P^2}{2n}\right)$ 이므로 $\mu_{ZP} = 5, \sigma_{ZP} = 1.64$ 이며, 정규분포에서 $L_{ZP} = 2.8$ 일 때, $\alpha = 0.002555$ 이므로 식(6)에 의해 다음과 같이 관리한계선을 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned} LCL &= Z_{P0} - L_{ZP} \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{Z_{P0}^2}{2n}} \\ &= 5 - 2.8 \sqrt{\frac{1}{5} + \frac{5^2}{2 \cdot 5}} = 0.408 \end{aligned}$$

위에서 가정한 비정규 Z_P 분포에서 비정규성을 고려했을 경우와 고려하지 않았을 경우의 관리한계선을 그림으로 비교하면 <Figure 9> 과 같다.

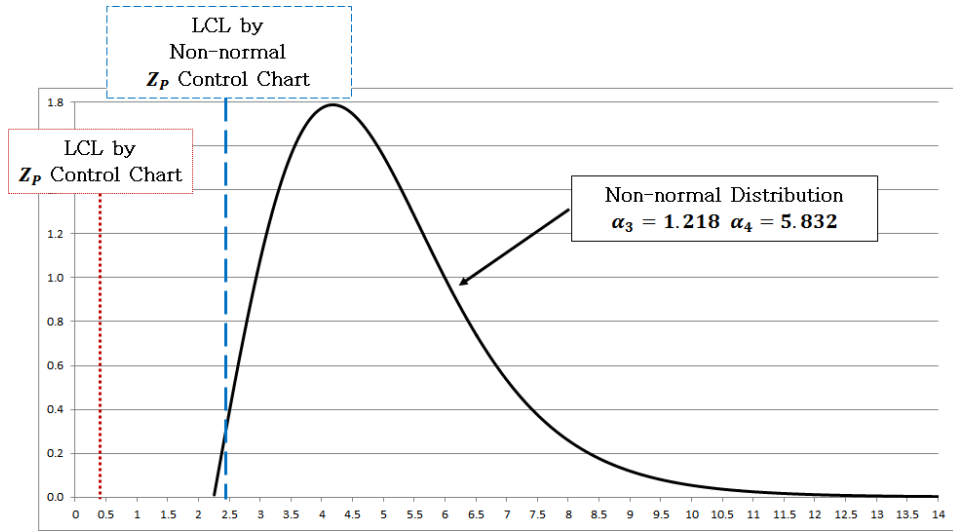


Figure 9. Control Limit Comparison of Z_p control chart and non-normal Z_p control chart

<Figure 9>에서 보는 것과 같이 비정규성을 고려하지 않을 경우 처음에 설계한 관리도의 1종 오류 α 와는 크게 차이가 날 수 있으며 이에 따른 민감도 또한 크게 차이가 날 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 최근 관리도의 주요 이슈 중 하나인 극소불량과 비정규성에 대한 대안을 제시하였다. 계수형 데이터를 활용하는 불량률 관리도의 한계를 극복하기 위해서 계량형 데이터를 활용한 Z_p 통계량을 사용하였으며, 비정규 공정에 대한 확실적인 관리한계선 설계를 위해서 Burr 분포를 활용하였다.

본 연구의 결과로 극소불량률을 Z_p 통계량으로 나타낼 수 있으며, Z_p 통계량이 정규분포가 아닌 비정규 분포를 따르더라도 Burr 분포로 피팅하여 비정규 Z_p 관리도의 관리한계선을 설계할 수 있다.

추후 연구과제로는 Burr 분포의 모수를 추정하는 방법의 최적화와 표본의 수에 따른 Burr 분포의 변화와 민감도의 변화를 연구하여 경제적, 통계적으로 최적의 관리한계선을 설계할 수 있는 연구가 필요하다.

REFERENCES

- Burr, I. W. 1942. "Cumulative Frequency Distribution." *Annals of Mathematical Statistics* 13:215-232.
- Burr, I. W. 1967. "The Effects of Non-normality on Constants for and R charts." *Industrial Quality Control* 23:563-568.
- Burr, I. W. 1973. "Parameter for a General System of Distributions to Match a Grid of α_3 and α_4 ." *Communications in Statistics* 2(1):1-21.
- Chang, Youngsoon., Bai Dosun. 2001. "Control charts for positively-skewed populations with weighted standard deviations." *Quality and Reliability Engineering International* 17(5):397-406.

- Chang, Youngsoon. 2006. "Effects of Non-normality on the Performance of Univariate and Multivariate CUSUM Control Charts." *Journal of the Korean Society for Quality Management* 34(4):102–109.
- Cho, Namho., Shin, Sukhyun. "Real Time Process Control System under 100PPM Management System." *Journal of the Korean Society for Quality Management* 25(1):116–134.
- Chou, C. Y., Cheng, P. H. 1997. "Ranges Control Chart for Non-normal Data." *Journal of the Chinese Institute of Industrial Engineers* 14:401–409.
- Chou, C. Y. et al. 2005. "Acceptance Control Charts for Non-normal Data." *Journal of Applied Statistics* 32(8):25–36.
- Joekes, S., Pimentel Barbosa, E. 2013. "An Improved Attribute Control Chart for Monitoring Non-conforming Proportion in High Quality Processes." *Control Engineering Practice* 21(4):407–412.
- Kim, Jeonghun., Kim, Seoungbum. 2012. "Local T^2 Control Charts for Process Control in Local Structure and Abnormal Distribution Data." *Journal of the Korean Society for Quality Management* 40(3):337–346.
- Kim, Jonggurl., Um, Sangjoon. 2012. "Design of ALT Control Chart for Small Process Variation." *Journal of Korea Safety Management and Science* 14(3):167–174.
- Kim, Jonggurl., Um, Sangjoon. 10–1538548–0000. 2015. "Controlling Method of Very Small Fraction of Nonconforming." Korea patent.
- Kim, Jonggurl., Kim Changsoo., and Kim Jinkuk. 2015. "Performance of Z_p Control Chart for a Small Fraction Nonconforming." *Journal of the Korean Institute of Plant Engineering* 20(4):29–37.
- Montgomery, D. C. 2013. *Introduction to Statistical Quality Control*. 7th Edition. New York: Wiley.
- Schilling, E. G., Nelson, P. R. 1976. "The Effect of Non-normality on The Control Limits of X-bar charts." *Journal of Quality Technology* 8(4):183–188.
- Um, Sangjoon., Kim, Jonggurl. 2013. "A Simultaneous Control Scheme for Mean and Fraction Nonconforming in Small Process Variation." *Communications in Statistics - Theory and Methods*. Accessed March 10, 2013. doi:10.1080/03610926.2013.784989.
- Yourstone S. A., Zimmer W. J. 1992. "Non-normality and Design of Control Charts for Averages." *Decision Sciences* 23:1099–1113.
- Zimmer, W. J., Burr, I. W. 1963. "Variables Sampling Plans Based on Non-normality Popultions." *Industrial Quality Control* 20:18–26.