대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 26 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 26, No. 2, 159 ~ 172. May 2016

‘어떤 실수로의 극한’을 사용하지 않고 무한소수를 정의하기[1)]

박 선 용*

이 연구에서는, 이지현(2014; 2015)이 이중단절의 극복을 위해 제안한 무한소수를 통한 실수 도입방식의 특징에 대해 살펴보고, 그 접근방식의 수학적 기초인 Li(2011)의 제안에 대해 분석하고 전통적인 축소구간열을 활용한 실수도입 방식과 비교하였다. 분석의 결과, 이지현과 Li의 제안에서는 직선의 각 점에 대응하는 무한소수 표현을 만드는 과정에서 ‘순환논리’에 빠질 위험이 있으며, 이에 대한 수학적 그리고 교육적 보완을 위해, 실수의 구성 과정동안 ‘어떤 실수로의 극한’을 사용하지 않는 조치가 이루어져야함을 알 수 있었다. 이에, 이 연구에서는 기하학적 축소구간공리를 사용하여 무한소수를 수열로 정의하는 전통적 방식이 그에 대한 적합한 보완책이 될 수 있음을 제기하였다.

Ⅰ. 서 론

일반적으로, 학교수학에서 무리수는 ‘분수가 아닌 수’, ‘비순환 무한소수’로 도입한다. 이러한 접근에서 실수는 이미 존재한다고 암묵적으로 가정되며 실수 중에서 유리수가 아닌 수로서 무리수를 정의한다고 할 수 있다. 이와 같이 ‘비순환 무한소수’를 통해 실수 체계로 확장하는 과정과 관련해, Forbes(1967)는 “비순환 무한소수를 생각할 수 있다는 사항이 이 기호가 나타내는 수가 실제로 있다고 주장하는 근거가 될 수 있는가? 이와 같이 비순환 무한소수 기호에 대응되는 어떤 수가 있다고 하더라도, 이 수는 비순환 무한소수 기호에 대응되는 수라는 것 밖에 없지 않는가?”라는 의문을 낳는다고 말한다.

이러한 상황에 대해, 이지현(2014; 2015)은 Bronner(1997)와 González-Martín 외 (2013)의 논의에 기초하여 학교수학의 교수학적 변환이 실수 개념의 도입의 어려움을 회피하는 일종의 ‘교수학적 공백’을 야기한다고 주장한다. 그리고 이러한 학교수학에서의 근본적 어려움을 해소하기 위해서는 선순환 관점에서 예비교사 교육을 통해 그 ‘교수학적 공백’을 보충하는 것이 우선 이루어져야 함을 밝히며, 무한소수 기호에 대한 역사적 분석과 Li(2011)의 연구를 바탕으로 하여 대학수학교육 차원에서의 무한소수를 통한 실수 도입방식을 제안하였다.

여기서, 그 무한소수를 통한 실수 도입방식은 직선 위의 임의의 점 x에 대응하는 십진무한소수 표현 $x_0.x_1x_2x_3\cdots$ 을 측정맥락에서 일련의 폐개구간을 이용하여 만들고 그러한 십진무한소수의 집합이 완비순서체를 형성한다는 것을 증명하는 방식이다. 이러한 방식은 Cantor의 코시수열 접근법, Dedekind Cut 방법 등의 구성적 방법이나 처음부터 완비순서체로서의 실수를 도입하는 공리적 방법과 다르게, 무한소수의 도입과정에서 기하학적 직관을 활용한다고 할 수 있다.

* 영남대학교, polya@yu.ac.kr
1) 이 연구는 2014학년도 영남대학교 학술연구조성비에 의한 것임

한편, 이지현은 자신의 분석과 제안이, “왜 학교수학에서는 무한소수에 의존하여 실수 개념을 다룰 수 있는가?”, “무한소수가 분수와 달리 연속적인 수가 될 수 있었던 이유는 무엇인가?”, “임의의 무한소수 전개가 하나의 수에 대응하도록 수 개념을 확장해야 하는 이유는 무엇인가?” 등의 문제를 다룰 수 있기에, 실수 개념에 대하여 학교수학과 대학수학 사이의 이중단절의 문제를 극복하는 데에 도움이 될 것으로 기대하였다.

이러한 교육적 제안에 기초해, 연구자는 2015년 겨울학기에 교육대학원 예비교사를 대상으로 하여 관련내용에 대한 수업을 준비한 바 있는데 그 과정에서 이지현과 Li의 접근에 있어 ‘실수가 이미 있는 것처럼 가정하는 고약한 순환성’의 문제가 해소되지 않음을 알게 되었다. 이에, 연구자는 ‘학교수학으로부터 대학수학으로 연결시킨다는 취지를 유지하면서 무한소수를 통해 실수를 도입하는 이지현의 구성방식(2014; 2015)을 어떻게 수학적으로 보완할 수 있을까?’라는 문제의식을 가지게 되었다.

Boyer(2008)는 19세기 초의 Cauchy 역시도 한때 실수의 구성과 관련해 다음과 같은 착각에 빠졌다고 말한다.

> 수 $\sqrt{2}$ 는 수열 1, ,1.4, 1.41, 1.414, ...의 극한으로 정의될 수 없다. 왜냐하면 이 수열이 극한을 갖는 것을 증명하기 위해서는 극한과 수렴의 정의에 따라서 이 수의 존재가 이전에 증명되거나 정의된 것으로 가정해야 하기 때문이다. 코시는 이것과 관련해 추론의 순환성을 알아차리지 못했던 것으로 보이지만 암암리에 그 자신 안에서 수렴하는 모든 수열은 극한을 갖는다고 가정하였다(Ibid, p.326).

수학사는 이러한 착각이 기하학적 선(또는 길이)로부터 얻은 선입견[2]에서 비롯된 것임을 보여준다. 물론, 이러한 ‘자명성의 착각’으로부터 벗어나기 위해서는 그 착각을 인식하고 ‘어떤 실수로의 극한’을 사용하지 않고 유리수로부터 무리수를 정의하는 작업이 필요했다. 이에 대응해, 19세기 후반에 Cantor와 Dedekind는 유리수로부터 만들어낸 수가 직선의 연속성과 동일한 성질을 가질 수 있도록 하였다. 하지만 Cantor의 코시수열 접근법, Dedekind Cut 방법 등은 직선 자체로부터 수를 구성해내는 모습을 보여주지 않는다는 점에서 ‘기하학적 직선을 채우는 수’라는 기하학적 직관을 결여하고 있다(Abian, 1981; Eves, 1999; Boyer, 2008).

이런 관점에서, 기하학적 직관을 활용하는 실수 구성방식이란 ‘직선은 빠짐없이 점으로 채워져 있다.’는 직관을 활용해 ‘어떤 선분의 길이 또는 직선의 각 점에 대응하는 수를 만들어내는 방식’이라 할 수 있다. 그리고 이에 기초해, 이 연구는 ‘기하학적 직관을 활용하면서, 무한소수 표현을 통해 직선의 각 점에 대응하는 수를 구성해내는 적합한 방식은 무엇일까?’의 문제를 다룬다고 할 수 있다.

이에 대한 논의를 위해, 이 연구가 시작한 계기를 제공한 이지현(2014; 2015)의 연구부터 살펴보기로 한다.

Ⅱ. 무한소수를 수에 대응시키는 수 개념 확장

이지현(2014; 2015)은 무한소수로 실수 개념을 전개하는 학교수학과 관련시켜 대학수학교육차원에서 “왜 임의의 무한소수가 하나의 수에 대응할 수 있도록 수 개념을 확장해야만 하는가?” 라는 질문에 제기하고, 이에 대해, ‘무한소수의 집합이 완비성 공리를 만족한다.’는 성질이 무한

2) ‘기하학적 길이를 가지면, 그 길이를 표현하는 급수는 극한값을 가진다.’

소수를 통해 실수를 도입하는 방식의 이론적 정당성과 교육적 장점을 동시에 보여준다고 밝히면서, 그 증명과정을 다음과 같이 소개하고 있다.

> 위로 유계인 임의의 무한소수 부분집합 A의 최소상계는 다음과 같이 무한소수 전개를 이용하여 찾을 수 있다. 이때 일반성을 잃지 않고, A가 적어도 하나의 양수를 포함한다고 가정하자. 집합 A가 유계이므로, A에 속한 무한소수들의 정수부분 최댓값을 a_0라 하자. 즉, a_0는 $\max\{x_0 | x_0.x_1x_2\cdots \in A\}$이다. 이때 정수부분이 a_0인 집합 A의 무한소수 중 소수점 첫째 자리의 최대 digit를 a_1, 또 소수점 첫째자리까지의 값이 $a_0.a_1$인 A의 무한소수 중 소수점 둘째 자리의 최대 digit를 a_2라 하자.
>
> 이를 반복하면, 소수점 k번째 자리의 최대 digit a_k를 $\max\{x_k | a_0.a_1a_2\cdots a_{k-1}x_kx_{k+1}\cdots \in A\}$로 찾을 수 있으며, 이와 같이 얻은 무한소수 $a_0.a_1a_2a_3\cdots$ 는 집합 A의 최소상계이다(이지현, 2015, p.273 재인용).

여기서, “왜 임의의 무한소수가 하나의 수에 대응할 수 있도록 수 개념을 확장해야만 하는가?”의 물음은 정확히 무슨 의미일까? 물론, 이 물음은 학교수학과 대학수학 사이의 이중단절의 극복을 염두에 두고 대학수학교육의 차원에서 제기한 질문이다. 그러므로 여기서의 ‘수’가 ‘실수’인 점을 고려하면 이 질문은 ‘임의의 무한소수가 하나의 실수에 대응할 수 있도록 실수 개념을 확장해서 지도하는 근거는 무엇일까?’와 같이 재-진술할 수 있다. 즉, 예비교사들에게 “학교수학에서 무한소수를 암묵적으로 실수인 것처럼 가정하는데, 그렇게 가정할 만한 근거는 무엇일까?”라고 물어본 것이라 할 수 있다.

물론, 이 질문에 대한 해답을 찾는 대학에서의 수학교육은 학교수학에서 무한소수를 실수로 가정해버리는 ‘교수학적 공백’에 대해 인식하고 그 간격을 채우는 과정이라 할 수 있다. 그런데 이 질문과 관련해, 이지현(2014; 2015)은 그에 대한 해답을 두 가지 접근방식을 통해 동시에 제시한 것처럼 보인다.

첫 번째는, ‘아르키메데스 순서체(Archimedean ordered field)인 유리수가 정의된 상태에서 공리적 접근에 의해 무한소수의 집합을 실수의 집합으로 도입할 수 있기 때문이다.’라고 답한 것으로 볼 수 있다. 이러한 확장은 ‘유리수로부터 실수로의 공리적 확장’이라고 할 수 있는데, 이지현이 Burn(2000)의 논의에 기초해 위의 증명[3]의 의미를 ‘무한소수의 집합이 완비성을 만족한다.’는 명제와 ‘임의의 무한소수에 대응하는 수가 존재한다.’는 명제가 동치임을 보여주는 것이라 언급한 것은 이러한 해석의 증거가 된다(이지현, 2015, p.594).

그런데 Burn(2000)은 무한소수 $d_0.d_1d_2d_3\ldots d_n\ldots$을 그것의 n번째 항이 $d_0+\frac{d_1}{10}+\frac{d_2}{10^2}+\ldots+\frac{d_n}{10^n}$(단, d_0는 정수, $i \geq 1$ 이고 $d_i \in Z_{10}$)인 수열로 정의하고서, ‘모든 무한소수가 수렴한다.’는 공리가 추가된 아르키메데스 순서체를 ‘완비 아르키메데스 순서체(complete Archimedean ordered field)’라 부른다. 그리고 완비 아르키메데스 순서체를 $\mathbb{R}$로 표기하고 그 집합의 원소를 실수라 하였다. 그런 후, ‘모든 유계 단조인 실수열은 수렴한다.’, ‘축소폐구간열의 교집합은 공집합이 아니다.’, ‘실수집합의 위로 유계인 공집합이 아닌 부분집합은 최소상한을 가진다.’ 등등의 명제가 아르키메데스 순서체에서 ‘모든 무한소수가 수렴한다.’와 서로 동치임을 보인다.

---

3) 위의 ‘무한소수의 집합이 완비성을 만족한다.’는 명제에 대한 증명은, ‘임의의 무한소수가 수렴한다.’, ‘임의의 무한소수가 하나의 수에 대응한다.’는 명제로부터 ‘무한소수의 집합의 완비성을 만족한다.’는 명제를 유도한 것이다.

이러한 Burn의 공리적 접근에 기초해, 이지현의 무한소수의 완비성 증명에 대한 논의를 분석하면 <모든 무한소수가 수렴하는 것처럼 가정해보자→이것은 무한소수가 하나의 수인 것처럼 가정하는 것이다→ 이때, 무한소수의 집합은 그것의 공집합이 아닌 모든 부분집합이 최소상한을 가지게 된다. → 이러한 사실은, 무한소수가 실수인 것의 근거가 된다.>는 사고의 흐름을 보여준다.

하지만 무한소수가 실수인 근거를 묻는 질문에 대해 '무한소수가 실수인 것처럼 가정하면 무한소수의 집합이 완비성을 가진다는 것을 보일 수 있기 때문이다.'고 답하는 것은 순환논리인 것처럼 느껴질 수밖에 없다. 왜냐하면 무한소수가 실수인 근거를 묻는 질문은 본질적으로 "무한소수가 수렴한다는 것을 보장하는 근거는 무엇인가?"에 대한 답을 요구하기 때문이다.

한편, 공리적 확장 방식과 대비되게, 이지현은 무한소수가 실수인 근거에 대해 '무한소수 기호를 통해 유리수로부터 실수를 구성적으로 확장할 수 있기 때문이다.'라는 또 다른 답변을 제시한 것으로 보인다. 그리고 이러한 구성방식에 대해 무한소수 표현이 그 표현의 특성으로 인해 완비성을 매우 투명하게 보여줄 뿐만 아니라 이러한 접근방식은 중, 고등학교에서 배웠던 무한소수를 활용하므로 무한소수를 매개체로 하여 유리수(유한소수)로부터 출발해 무한소수를 통해 실수를 구성해가는 대학수학교육이 이루어지면 실수 개념과 관련된 '교수학적 공백'에 대한 인식과 극복이 잘 형성될 수 있을 것이라 주장한다.

무한소수가 실수인 근거에 대해, 이지현의 첫 번째 답변에서는 실수를 완비순서체로 공리적으로 도입한 후 '임의의 무한소수는 실수에 대응한다.'는 명제와 '무한소수의 집합은 완비성을 만족한다.'는 명제의 관계를 다루는 방식으로 답한 것으로 보이고, 두 번째 답변에서는 유리수로부터 무한소수를 통해 완비실수체로서의 실수를 구성하여 도입하는 접근방식을 제기했다고 하겠다. 이러한 두 가지 답변과 관련해, 이지현은 자신의 교육적 접근이 두 번째에 해당함을 주장한다. 사실, 그녀는 실수를 완비순서체로 형식적으로 도입하는 방식을 지양하고 있으며[4], Li(2011)의 논의에 기초해, 무한소수의 집합이 완비순서체의 공리체계를 만족함을 보이는 구성적 접근방식을 지지한다고 할 수 있다.

Ⅲ. 무한소수를 이용한 실수 구성 방식의 타당성에 대한 문제

무한소수 표현을 이용해 유리수로부터 실수로 확장을 하고 그러한 무한소수의 집합이 완비순서체임을 보이는 과정이 타당한지를 판단하기 위해 우선적으로 점검해야 할 중요한 사항이 있다. 서론에서 이미 제기했듯, '무한소수의 집합을 도입하는 과정에서 유한소수만을 가지고 실수를 암묵적으로 사용하지 않으면서 무한소수를 구성했느냐?'는 것이 바로 그것이다. 이러한 사항은, 본질적으로 '유리수만을 가지고 실수를 구성했느냐?'를 말하는 것이며 유리수로부터 실수를 구성하는 방법의 타당성을 판별하는 핵심 기준이며 수학사적으로도 가장 큰 난점 중 하나라고 할 수 있다.

다시 말해, '유한소수로부터 무한소수를 순환논리를 사용하지 않는 방식으로 구성할 수 있느냐?', '유한소수인 유리수로부터 어떤 실수로의 수렴 또는 극한을 암묵적으로 사용하지 않고 무한소수를 도입할 수 있느냐?'의 문제를 명확히

4) 결론적으로, 이지현이 Burn(2000)의 공리적 접근방식에 기초해 '무한소수가 실수인 근거'를 제시한 것은 그녀의 본래 의도에 부합하지 않은 논거를 댄 것이라 할 수 있다.

해결해야만 무한소수의 집합이 완비순서체임을 보이는 구성적 접근이 수학적 타당성을 갖게 된다고 할 수 있다. 이와 관련해, 이지현의 교육적 주장에 대한 수학적 기초를 제공한 Li(2011)는 무한소수를 다음과 같이 도입한다.

> 다소 오래된 기하학적 접근방식으로 실수를 도입한다. “축(axis)” 위의 어떤 점 x 에 대하여, 그 점에 대한 십진소수 표현(decimal representation)은 다음과 같은 절차를 거치며 얻어진다.
>
> 절차 0 : 이 “축”을 셀 수 있을 만큼 많은 서로 분리된 집합들의 합집합 $\bigcup_{z\in\mathbb{Z}}[z, z+1)$ 으로 분할한 후, $x\in[x_0, x_0+1)$ 을 만족하는 유일한 정수 $x_0\in\mathbb{Z}$ 를 찾는다.
>
> 절차 1 : $[x_0, x_0+1)$ 을 10개의 분리된 집합의 합집합으로, $\bigcup_{i=0}^{9}[x_0+\frac{i}{10}, x_0+\frac{i+1}{10})$ 와 같이, 만든 후 $x\in[x_0+\frac{x_1}{10}, x_0+\frac{x_1+1}{10})$ 을 만족하는 유일한 원소 $x_1\in Z_{10}$ 을 찾는다. 계속, Z_{10} 은 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 을 간단히 나타낸 것이다.
>
> 절차 2 : $[x_0+\frac{x_1}{10}, x_0+\frac{x_1+1}{10})$ 을 10개의 분리된 집합의 합집합으로 만든 후, $\bigcup_{j=0}^{9}[x_0+\frac{x_1}{10}+\frac{j}{10^2}, x_0+\frac{x_1}{10}+\frac{j+1}{10^2})$ 와 같이 만든 후, $x\in[x_0+\frac{x_1}{10}+\frac{x_2}{10^2}, x_0+\frac{x_1}{10}+\frac{x_2+1}{10^2})$ 을 만족하는 유일한 원소 $x_2\in Z_{10}$ 을 찾는다.
>
> 절차 ⋮ : ……
>
> 그러면, x 는 십진소수 표현 $x_0.x_1x_2x_3\cdots$ 을 가지게 되며, x_k 를 x 의 k 번째 숫자(digit)라고 부르자. (중략)
>
> 우리의 시작 위치는, 앞에서도 논의했지만 $R \overset{\triangle}{=} \{x_0.x_1x_2x_3\cdots \mid x_0\in\mathbb{Z}, x_k\in Z_{10}, k\in\mathbb{N}\}$와 같이, 다루고자 하는 공간(ambient space)을 선택하는 것이다. 일단 이러한 십진표기법(decimal notation)을 채택한 이후에는, 그것을 마음속에서 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_i}{10^i}$ 급수로 상상할 것을 제안한다. (중략)
>
> 집합 R 은 본질적으로 집합 $\mathbb{Z}\times Z_{10}^{\mathbb{N}}$와 같기 때문에, 우리는 R 위에서 사전식 순서 $\preceq$ 을 도입할 수 있고, $(\mathbb{Z}, \leq)$의 성질로부터 쉽사리 최소상계(least upper bound) 성질과 최대하계(greatest lower bound) 성질을 증명할 수 있다. 경험이 많은 독자는 알고 있겠지만, 이것은 $(R, \preceq)$이 “완비적(complete)”임을 뜻한다. 그러므로 우리는 이렇게 완비성이 구비된 공간에서 상한(supremum) sup(•), 하한(infimum) inf(•), 상극한(upper limit) $\overline{LIMIT}$, 하극한(lower limit) $\underline{LIMIT}$, 극한 $LIMIT$과 같은 다섯 개의 기본적 연산을 도입할 수 있다.
>
> 임의의 두 원소 $x,y\in R$에 대해, $[x]_k \overset{\triangle}{=} x_0.x_1x_2x_3\cdots x_k = \frac{\sum_{i=0}^{k}x_i \cdot 10^{k-i}}{10^k}\in\mathbb{Q}$ 이 x 의 k 번째 숫자까지의 절삭치(truncation)이고 $[y]_k$ 역시 같은 방식의 y 의 절삭치라 할 때,
>
> $x\oplus y \overset{\triangle}{=} LIMIT(\{[x]_k+[y]_k\}_{k\in\mathbb{N}})$
>
> 으로 정의하는 것은 매우 자연스럽다 (Ibid, pp.1 - 4).

이후에 Li가 R 의 순서체로서의 성질을 보이고 있다는 점에 비추어볼 때, 그가 무한소수 표현을 통해 유리수로부터 실수를 구성해나가는 전체적인 과정은 다음과 같다고 할 수 있다.

> ① 축(또는 직선) 위의 임의의 점 x 를 무한소수 표현 $x_0.x_1x_2x_3\cdots$ 으로 나타내기
> ② 무한소수의 집합을 정의하기
> $R \overset{\triangle}{=} \{x_0.x_1x_2x_3\cdots \mid x_0\in\mathbb{Z}, x_k\in Z_{10}, k\in\mathbb{N}\}$
> ③ R 위에 사전식 순서 $\preceq$ 를 도입하기
> ④ R 의 완비성 증명하기
> ⑤ R 위에 sup, inf, $\overline{LIMIT}$, $\underline{LIMIT}$, $LIMIT$ 연산을 정의하기
> ⑥ R 위에 $\oplus, \otimes$ 와 같은 연산을 정의하고 순서체로서의 성질을 증명하기

그렇다면, 이러한 과정 속에서 Li는 '어떤 실수로의 극한'이라는 순환 논리를 사용하지 않았다고 할 수 있을까?

Li (2011)에 따르면, '① 단계'는 직선(또는 축) 위의 모든 점이 유한 또는 십진소수 표현을 가지는 방식으로 무한소수 표현 $x_0.x_1x_2x_3\cdots$를 도입하는 과정이라 할 수 있다. 직관적으로는 직선 위의 모든 점에 대해 무한소수 표현을 할당하는 것이 가능할 듯하다. 하지만 여기서 "직선 위의 모든 점이 무한소수 표현을 가진다."는 것은 암묵적으로 가정된 사항일 뿐이다. 직선 위의 어떤 점에 대해 십진소수를 부여하는 절차 자체가 "직선 위의 모든 점이 무한소수 표현을 가진다."는 명제를 증명한다고 할 수는 없다. 무한소수를 생성하는 절차 0, 1, 2 이후에 Li가 제기한 '절차⋮: ……'의 애매성은 "직선 위의 모든 점이 무한소수 표현을 가진다."는 것에 대한 증명이나 어떤 기본적 전제를 요구하는 것이다.

이와 관련해, '④ 단계'에서 무한소수의 집합 R의 완비성을 증명함에 의해 "직선 위의 모든 점이 무한소수 표현을 가진다."는 명제를 증명한 것은 아닐까라는 생각이 제기된다. Li는 무한소수의 집합 R의 완비성을 보이고 R위에 sup, inf, $\overline{LIMIT}$, $\overline{LIMIT}$, $LIMIT$ 연산을 정의함으로써, 자신의 접근방식이 '어떤 실수로의 극한'과 같은 순환 논리를 사용하지 않았다는 점을 주장하려고 하였을 것이다. 물론, 무한소수의 집합 R의 완비성과 함께 순서체로서의 성질을 보인다면 완비순서체 모델의 유일성[5]에 의해, 직선 위의 모든 점과 1-1 대응관계를 형성하는 실수집합 $\mathbb{R}$과 무한소수의 집합 R이 본질상 동일한 것이기 때문에 "직선 위의 모든 점이 무한소수 표현을 가진다."는 것을 유도할 수 있을 것이다.

사실, 무한소수를 간단히 수열로 정의하고 ② ~ ⑥ 단계만으로 무한소수의 집합 R이 완비순서체임을 보이는 것이 훨씬 간단할 것이다. Li는 왜 '① 단계'를 넣었던 것일까? 오래된 기하학적 방법을 사용했다는 언급에 비추어 본다면, ② ~ ⑥ 단계만으로는 '실직선' 구성과정을 보여주지 못하기 때문에, Li는 기하적 직선 위의 각 점을 무한소수로 표현하는 과정을 통해 기하와 산술이 결합된 '실직선'이 만들어지는 과정을 직관적으로 보여주고 싶었기 때문이라는 것을 짐작할 수 있다.

하지만 직관성의 유지를 위해 도입한 '① 단계'와 '① 단계로부터 ② 단계로 넘어가는 과정'에서 '직선 위의 모든 점이 무한소수 표현을 가진다.'는 명제를 가정한 것은 수학적으로 정당화되지 않는다. 결국, Li가 직선의 어떤 점 x에 대한 무한소수 표현을 만드는 절차 속에서 자명하게 받아들인 '절차⋮: ……' 표현은 본질적으로 '어떤 실수로의 극한'을 암묵적으로 가정하는 모습을 보여준다고 하겠다. 사실, "일단 이러한 십진표기법을 채택한 이후에는, 그것을 마음속에서 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_i}{10^i}$ 급수로 상상할 것을 제안한다(Ibid, p.3)."는 언급에서 알 수 있듯, Li가 '어떤 실수로의 극한'을 사용하지 않고 무한소수 표현을 도입했다고 보기는 힘들다.

여기서, "직선의 각 점을 나타내기 위해 '어떤 실수로의 수렴 개념'을 사용하지 않고 무한소수 표현을 도입하는 방법은 무엇일까?"라는 의문이 제기된다. 도대체, 무한소수를 어떻게 도입해야 하는 것일까?

5) Li는 완비순서체 모델의 유일성을 직접 이용하지 않고, 무한소수의 집합 R과 기존의 완비순서체 모델이 동형임을 보여준다.

Ⅳ. '어떤 실수로의 극한'을 사용하지 않고 무한소수를 정의하기

앞서 제기했듯, 직선을 가지고 유리수로부터 무한소수를 통해 실수로 수 체계를 확장하면서 무한소수의 집합이 완비순서체임을 보이는 과정의 타당성은 무한소수를 도입하는 과정에 달려있다. 물론, 그 도입과정이 수학적 타당성을 확보하는 아주 간단한 방법이 있다. 무한소수 $d_0.d_1d_2d_3 \ldots d_n \ldots$을 수열로 정의하는 것이다. 구체적으로, 그 수열의 n번째 항이 $d_0 + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \ldots + \frac{d_n}{10^n}$ (단, d_0는 정수, $i \geq 1$이고 $d_i \in Z_{10}$)인 수열로 정의[6]하는 것이다. 그리고서, 앞 절의 ② ~ ⑥ 단계를 거치면 무한소수의 집합이 완비순서체임을 보일 수 있다.

물론, Li(2011)도 이러한 방법을 알고 있었을 것이다. 하지만 수열을 활용한 무한소수의 대수적 도입방법은 유리코시수열 및 그 사이의 동치관계의 도입과 마찬가지로 '어떤 실수로의 수렴 개념'을 사용하지 않는 장점이 있는 반면에 기하학적 직관이라는 생명력을 잃게 된다. 정확히 말해, 무한소수를 위의 수열로 도입하면 Cantor의 유리 코시수열에 의한 실수 구성방식과 동일한 논의를 전개할 수밖에 없는 것이다. 그러기에, Li는 무한소수를 그러한 수열로 도입하지 않았을 것이다.

그러면, 기하학적 직관을 유지하면서 무한소수를 '어떤 실수로의 수렴'을 사용하지 않고 도입하는 방법은 무엇일까? 이와 관련해, Courant & Robbins(2002)은 다음과 같이 "직선 위의 모든 점이 무한소수 표현을 가진다."는 명제를 가정했던 수학사에서의 실수를 지적하며, 무한소수를 도입하고 실수를 구성하는 기하학적 방법을 제안한 바 있다.

> 19세기의 중반까지도 이러한 생각은 유리수와 무리수의 체계를 만족스럽게 설명하는 수의 연속체로 받아들여졌다. 해석기하학, 미적분학의 발전에서 보는 것과 같은 17세기 이후에 수학의 비약적인 발전은 이러한 개념의 수체계를 기초로 안전하게 나아갔다. 그러나 결과를 통합하고 원리를 비판적으로 재검토하게 된 시기에 와서 무리수의 개념은 더욱 자세한 분석이 필요하다는 사실이 인식되었다(Ibid, p.82).

그런데 이러한 Courant & Robbins(2002)의 논의의 출발은 '십진소수 표현에 얽매이는 것이 연속체로서의 실수의 본질을 잘 드러내는 것은 아니다.'는 입장으로부터 출발한다.

> 10진법만이 수의 본성을 나타내는 것은 결코 아니기 때문이다. 2진법이나 다른 진법체계로도 논의를 진행시킬 수도 있다. 이러한 이유로 10진법에 근거하지 않은 수 연속체에 대한 더욱 일반적인 정의가 바람직하다(Ibid, p.89).

기본적으로, 이러한 Courant & Robbins의 입장은 십진소수 표기법(의 한계)에 대한 지속적 보정을 하면서 그 표기법의 특징을 활용해 실수를 구성하려는 Li의 입장과는 대비된다. 구체적으로, Li는 직선 위의 점 중에서 십진소수 표기법에 의해서는 $0.9999\ldots$ 로 표현되는 점이 없다는 사항을 인정하면서 $(R, \leq, \oplus, \otimes)$ 체계에서의 연산 $\oplus, \otimes$ 과 표준적인 덧셈과 곱셈 사이의 상이함을 없애기 위해 다음과 같은 조치를 취한다.

> 이러한 어려움을 극복하기 위해, $0.9999\ldots$ 와 $1.0000\ldots$ 등등을 동일시하는 동치관계 ~을 도입할 것이다. 10진법, 2진법, 16진법 그 어떤 것

6) 이 수열의 존재성이 직선으로부터 무한소수를 도입하는 절차의 타당성을 지지하는 것은 아니다. 이 정의는, '어떤 실수로의 수렴'을 사용하지 않으며, 무한소수를 정의하는 방식 중의 한 가지를 보여줄 뿐이다.

을 채택하는 것에 상관없이, 그러한 관계들을 언제 도입하는 지에 상관없이, 우리는 이 과정을 피할 수 없다.

이러한 준비과정을 거쳐, 우리는 교환, 결합, 분배법식, 덧셈과 곱셈의 항등원과 역원의 존재성을 입증할 것이다(Li, 2011, p.4).

Li 는, 십진소수 표기법에서 나타나는 문제는 다른 집법에 의한 소수표기법에서도 마찬가지로 나타나기 마련인데 직선 위의 점 중에서 $0.9999\ldots$ 을 나타내는 점은 없다는 사항 등의 십진표기법의 문제는 '차이 없음(no gap)'이라는 동치관계를 도입해 $0.9999\ldots$ 와 $1.0000\ldots$ 을 동일시함으로써 해결할 수 있다는 입장[7]을 취한다. 하지만 어떤 적당한 진법을 택했을 때 유한소수로 표현할 수 있다는 것이 바로 유리수의 본질적 특성임을 고려한다면, Li의 접근방식이 체계적이라 하기는 다소 힘들다. 예를 들어, $\frac{1}{3}$와 같은 유리수는 Li 방식의 십진소수 표기법에 의해서는 $0.3333\ldots$ 이지만 3진법에 의해서는 $0.1_{(3)}$ 와 같이 근본적으로 유한소수로 표현할 수 있다. 어떤 유리수라도 적당한 진법에 의해 유한소수로 표현할 수 있다는 사실에 기초하면 $0.3333\ldots$, $0.9999\ldots$ 와 같은 십진소수 표기법은 오히려 유리수로서의 수의 특성을 숨기는 것일 수도 있다.

여기서 중요하게 점검해야 할 사항은, '차이 없음' 동치관계를 이용해 $0.9999\ldots$ 와 $1.0000\ldots$ 을 동일시하는 접근이 유리 코시수열 및 그 사이의 동치관계를 도입하는 전통적 접근에 비해 직선의 기하적 특성을 자연스럽게 활용하는 방식이냐는 점이다. 물론, 어떤 방식이 자연스러운지의 여부 문제는 주관적 판단을 요구하는 사항이다. 하지만 축(또는 직선) 위의 어떠한 점도 $0.9999\ldots$ 로 표현되지는 않은 상태에서 $0.9999\ldots$ 와 $1.0000\ldots$ 을 동일시하는 표기적 특성을 유지하기 위해 무한소수 집합의 연산과 관계를 정의해가는 방식[8]이 직선의 기하학적 특성을 자연스럽게 이용했다고 할 수는 없다.

이런 논의와 관련해, Courant & Robbins(2002)은 직선의 기하학적 특성을 활용하면서 무한소수를 통해 실수를 도입하는 가장 간단하고 자연스러운 방식은 다음과 같이 축소구간열을 활용하는 전통적 방식이라는 제안을 한다.

어쩌면 다음의 방법이 가장 간단한 방법일 것이다.
수직선[9] 위에 유리수인 끝점을 갖는 구간의 수열 $I_1, I_2, I_3, \cdots, I_n, \cdots$ 을 생각하는 데 각 구간은 그 앞의 구간에 포함되고, n 번째 구간 I_n 의 길이는 n 이 증가할 때 0 에 가까워진다고 하자[10]. 이런 수열을 축소구간열이라고 한다. 10진법에 의한 구간의 경우에 I_n 의 길이는 10^{-n} 이 되지만 2^{-n} 으로 하거나 $\frac{1}{n}$ 보다 작은 더욱 다루기 좋은 내용으로 제한할 수도 있다.
이제 기하학의 기본 공준으로 다음을 생각한다. 임의의 축소구간열에 대하여 각 구간에 공통으로 포함되는 수직선 위의 점이 꼭 하나씩 존재한다. (중략) 이 점을 정의에 의하여 실수라고 부른다. 그 점이 유리수가 아니면 무리수라고 부른다. 이 정의에 의하여 점과 수의 완벽한 대

7) Li (2011, p.7)는 R 위에 사전식 순서 $\preceq$에 기초해 R 의 두 원소 x,y 사이에 다른 무한소수가 들어갈 수 없으면 x,y 사이에 '차이 없음'이라는 (동치) 관계를 도입한다.
8) 예를 들어, 덧셈의 역원은 다음과 같이 정의한다.
어떤 원소 $x = x_0.x_1x_2x_3\cdots \in R$ 에 대해, $\psi(x) \overset{\triangle}{=} (-1-x_0).(9-x_1)(9-x_2)/(9-x_3)\cdots$ 을 x 의 "덧셈의 역원"으로 이해할 수 있다(Li, 2011, p.10).
9) 여기서의 수직선(number line)은 실직선(real number line)이 아니며 기하학적인 직선인데, 그 직선의 일부만 유리수에 대응되어 있고 그 직선의 나머지 부분은 어떤 수에도 대응된 상태가 아니다.
10) 이것은 '어떤 실수로의 극한'을 암묵적으로 사용하는 것이 아니다. 이것의 의미는 '$I_n = [s_n, t_n]$ 일 때, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N(n) \in \mathbb{N}\ s.t.\ \forall k \in \mathbb{N}, k \geq N(n) \Rightarrow |s_k - t_k| < \frac{1}{n}$ '이다.

> 응관계를 만들게 된다. 이는 단지 무한소수를 이용하여 보다 일반적인 정의를 내린 것에 지나지 않는다(Ibid, pp.89-90).

축소구간열을 활용해 실수를 구성하는 방식의 핵심적 아이디어는 바로 '기하학의 기본 공준(또는 공리)'을 활용하는 데에 있다. 구체적으로, 그 핵심은 '어떤 축소구간열에 공통으로 포함된 단 하나의 직선 위의 점이 존재한다.'는 기하학의 공준을 바탕으로 그 유일한 점에 대응하는 유리 축소구간의 수열 또는 그것의 동치류로 실수를 정의하는 것이다. Courant & Robbins(2002)은 이러한 접근방식이 기하학적 특성을 활용하는 것에 주안점을 두고 있음을 다음과 같이 밝힌다.

> 유리수로 된 끝점을 가지는 축소구간[11]으로 이루어진 모든 구간에 속하는 점이 수직선[12] 위에 존재한다는 것은 기하학의 기본적인 공준이다. 이러한 공준을 논리적으로 다른 수학적 사실로 바꿀 수는 없다. 우리는 이러한 사실을 수학에서 다른 공리나 공준을 받아들이는 것과 마찬가지로 그냥 받아들이는데, 그 이유는 수학적 사고의 무모순인 체계를 만드는 데 유용성과 직관적인 타당성이 있기 때문이다. 단순히 형식적인 관점에서 볼 때, 유리수점만으로 이루어진 직선에서 시작하여 축소유리구간의 수열에 대한 기호로 무리수점을 정의한다(Ibid, p.90).

그렇다면, 유리축소구간열을 활용해 실수를 구성하는 방식에서 (십진) 무한소수는 어떻게 정의되고 그 역할은 무엇일까? 기본적으로, 무한소수는 유리축소구간열에 공통적으로 포함된 점에 대응하는 수학적 대상인 '유리축소구간열 (또는 그것의 동치류) 자체'에 대한 기호라 할 수 있는데, 이 수학적 대상의 집합이 완비순서체의 성질을 가지고 됨을 보이면 무한소수는 실수를 나타내는 표현이 된다고 할 수 있다.

예를 들어, 직선위의 어떤 점을 공통적으로 포함하는 어떤 유리축소구간열 $\{ I_n | n \in \mathbb{N} \}$ 또는 유리축수구간열의 동치류[13]의 대표원을 나타낸다고 하자. $I_n = [x_0.x_1x_2 \cdots x_n , y_0.y_1y_2 \cdots y_n]$ $(x_0, y_0 \in \mathbb{Z}, x_k, y_k \in Z_{10}, k \in \mathbb{N})$ 인 경우에 유리축소구간의 수열을 $\{ I_n | n \in \mathbb{N} \}$으로 표현하는 대신에 $x_0.x_1x_2x_3 \cdots$ 또는 $y_0.y_1y_2y_3 \cdots$ 으로 표기하는 것이다. 이때, 유리축소구간을 수열 x_0, $x_0.x_1$, $x_0.x_1x_2$, $x_0.x_1x_2x_3, \ldots$ 또는 수열 y_0, $y_0.y_1$, $y_0.y_1y_2$, $y_0.y_1y_2y_3, \ldots$ 와 동일시 할 수 있는데[14], 무한소수 $x_0.x_1x_2x_3 \cdots$와 $y_0.y_1y_2y_3 \cdots$는 수열 x_0, $x_0.x_1$, $x_0.x_1x_2$, $x_0.x_1x_2x_3, \ldots$와 수열 y_0, $y_0.y_1$, $y_0.y_1y_2$, $y_0.y_1y_2y_3, \ldots$을 각각 나타내는 것으로 정의된다고 할 수 있다.

이처럼 무한소수를 처음부터 수열로 정의하지 않고 직선 위의 어떤 점에 대응하는 유리축소구간열 자체를 나타내는 표현으로 정의하게 되면, 무한소수는 직선 위의 점에 대응하는 수학적 대상인 실수를 표현하는 수단이 된다. 무한소수는 '처음부터 정의하는 것'이 아니라 직선 위의 점

11) 이후, '유리축소구간'이라 부르고, 유리축소구간으로 이루어진 수열은 '유리축소구간열'이라 부른다.

12) 앞에서와 같이, 기하학적인 직선을 뜻한다.

13) 유리축소구간열 $\{ I_n | n \in \mathbb{N} \}$와 $\{ J_n | n \in \mathbb{N} \}$ 사이에 다음과 같 동치관계를 줄 수 있다.
$I_n = [a_n , b_n]$ 이고 $J_n = [c_n , d_n]$ 이라 할 때, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N(n) \in \mathbb{N} \; s.t. \; \forall k \in \mathbb{N}, k \geq N(n) \Rightarrow |a_k - c_k| < \frac{1}{n}$.
여기서, $|a_k - c_k| < \frac{1}{n}$ 대신에 $|a_k - d_k| < \frac{1}{n}$, $|b_k - c_k| < \frac{1}{n}$, $|b_k - d_k| < \frac{1}{n}$ 를 사용해도 동치관계를 줄 수 있다.

14) 축소구간열의 정의에 의해, '$I_n = [s_n , t_n]$ 일 때, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists N(n) \in \mathbb{N} \; s.t. \; \forall k \in \mathbb{N}, k \geq N(n) \Rightarrow |s_k - t_k| < \frac{1}{n}$'이 성립하는 데, 이것을 이용해, 수열 $\{ s_n \}$과 $\{ t_n \}$ 사이의 동치관계를 정의할 수 있다.

에 대응하는 수를 창조하는 과정 속에서 '정의하게 되는 것'이다.

한편, 유리축소구간열을 이용해 실수를 구성하는 방식은 크게 두 가지 특징을 가졌다고 할 수 있다. 첫째는 직선 위의 점과 유리축소구간열 사이의 대응을 선명히 보여준다는 면에서 직관성과 엄밀성을 모두 충족시킬 수 있다는 것이다. 즉, 직선 위의 임의의 점 x 에 대해 그에 대응하는 유리축소구간열을 쉽게 찾을 수 있다. 예를 들어, 직선 위의 임의의 점 x 에 대해 그 점 x 를 포함하는 어떤 구간 $[s_1, s_2]$(단, s_1, s_2 는 유리수)을 첫째 구간으로 택하고, 첫째 구간을 절반씩으로 나눈 두 구간 $[s_1, \frac{s_2+s_1}{2}]$ 과 $[\frac{s_2+s_1}{2}, s_2]$ 중에서 점 x 를 포함하는 구간을 둘째 구간으로 택하는 방식으로, 나머지 구간들도 마찬가지 방식으로 택하게 되면 점 x 를 공통점으로 가지는 유리축소구간열을 찾을 수 있다.

유리축소구간열을 이용한 방식이 가진 두 번째 특징은 실질적으로 실수가 구성[15]된 이후에 무한소수의 도입이 이루어지는 것이다. 구체적으로, 이 방식에서는 유리수로부터 (기하학적 직선 위의 점에 대응하는 수로서의) 실수를 구성할 때 '어떤 실수로의 극한'이라는 순환논리를 피하면서 만들어 놓은 '유리축소구간열'을 나타내는 표현으로 무한소수를 도입해야 함을 보여주고 있다.

이러한 두 번째 특징은 유리축소구간열을 이용한 실수 구성의 계열을 살펴봄으로써 파악할 수 있는데, 그 계열은 다음과 같다: 직선의 축소구간열에 대해 '각 구간에 공통으로 속한 유일한 점'이 존재한다. 따라서 직선의 유리축소구간열에 대해서도 '각 구간에 공통으로 속한 유일한 점'이 존재한다. 그런데 직선 위의 어떠한 점에 대해서도 그에 대응하는 유리축소구간열을 적어도 1개 찾을 수 있다. 이때, 유리축소구간열은 동치류를 형성하게 되는데, 동치인 두 유리축소구간열에 속한 공통점은 서로 같다. 여기서, 직선 위의 점과 유리축소구간열의 동치류의 대응에 주목하자. 한편, 유리축소구간열의 동치류의 집합은 완비순서체를 이룬다. 그러므로 유리축소구간열의 동치류는 직선 위의 각 점에 대응하는 실수라고 간주할 수 있다.

이러한 계열에서, 무한소수는 유리축소구간열의 동치류의 대표원, 즉 어떤 유리축소구간열을 나타내는 한 표현으로 도입된다. 이것을 고려하면, 이 계열은 유리수로부터 직선을 메우는 수로서의 실수를 구성할 때 '어떤 실수로의 극한'을 암묵적으로 사용하지 않기 위해서는 기하학의 공준을 활용해야 하고 실질적으로 실수를 구성한 이후에야 그에 대한 표현으로 무한소수를 도입해야 함을 잘 드러낸다고 하겠다[16].

Ⅴ. 결 론

실수는 학교수학에서 제일 다루기 어려운 주제 중 하나임에 분명하다. 그래서 무리수를 도입하는 데에 있어, $x^2=2$ 을 만족하는 x 에 해당하는 길이 또는 직선에서 원점으로부터의 그 위치에 해당하는 수가 '이미 있는 것'처럼 간주하면서, 그 수가 유리수가 아님을 다루고 그것을 $\sqrt{2}$ 로 나타내고 그와 같은 수를 무리수라 가르친다. 그리고 유리수는 '유한소수 또는 순환소

15) 아직 완비순서체임을 보이지 않았지만, 기하학적 직선 위의 임의의 점에 대응하는 대상에 대해 유리수를 가지고서 수학적으로 타당한 방식으로 구성해 놓은 것이다.

16) 한편, 이러한 결과에 기초해 기하학적 직선과 무관하게 무한소수를 처음부터 수열로 정의함으로써 유한소수(유리수)로부터 실수를 구성하는 방안도 가능하다는 것을 알 수 있는데, 이러한 구성방안은 본질적으로 Cantor의 코시수열을 이용한 실수의 구성방식과 같다고 할 수 있다.

수'이므로 무리수는 '순환하지 않는 무한소수'라고 가르치므로, 이러한 접근은 '실수가 이미 존재하는 것'으로 가정하는 '자명성의 착각'을 유발한다.

물론, 학교수학에서 학생의 수준과 주제의 어려움을 고려할 때, 실수에 대한 이와 같은 방식의 교수학적 변환은 불가피할 수도 있다. 우리나라 수학과 교육과정에서 제기하고 있는 '무리수 도입의 필요성'17)은 사실상 직선위의 각 점에 해당하는 길이나 위치를 나타내는 수의 필요성 이외의 것은 없다. 그렇다면, 학생의 수준 측면에서 그런 수를 유리수로부터 구성적으로 만드는 교수-학습을 할 수 없는 상황에서는 '직선의 각 위치에 해당하는 수가 있는 것이 당연하다.'는 듯이 다루는 교수학적 공백을 남길 수밖에 없을 것이다.

하지만 교사는 학교수학의 이러한 교수학적 공백을 인식하고 메울 수 있어야 하지 않겠는가? 다시 말해, 교사는 '직선의 각 위치에 해당하는 수가 있고, 그 수는 유한소수나 무한소수로 표현할 수 있다.'는 명제가 성립하는 이유를 설명할 수 있어야 한다. 이 주장을 수용하기에, 연구자는 실수와 관련해 이지현(2014; 2015)이 제안한 예비교사교육 방안을 기본적으로 지지한다. 실수에 대한 '자명성의 착각'에 대한 인식을 시작으로 '직선을 채우는 실수로서의 무한소수'를 다루는 구성적 접근방식은 학교수학과 대학수학 사이를 연결하는 가교로서 기능한다고 생각한다.

그런데 이지현(2014; 2015)의 무한소수 도입방식이 '실수에 대한 자명성의 착각'을 극복하는 것인지에 대해서는 의문이 제기된다. 그녀는, Li(2011)의 연구에 기초해, 직선 위의 임의의 점 x 에 대해 폐개구간을 이용한 측정을 통해 그 점에 대응하는 십진소수 표현 $x_0.x_1x_2x_3\cdots$ 을 만들고 그러한 십진소수의 집합이 완비순서체를 형성함을 보임으로써, 실수에 대한 '자명성의 착각' 문제를 해소할 수 있을 것으로 판단하였지만, 이러한 무한소수 도입 방식은 여전히 실수에 대한 '자명성의 착각' 요소를 가지고 있다.

실수에 대한 '자명성의 착각'에 대한 자각은 '직선위의 각 점은 무한소수로 표현할 수 있다.'는 명제를 자명하게 받아들이지 않는 데에 달려있다. 즉, '무한소수가 수렴한다.'는 것을 오히려 증명해야 하는 것인데, 이를 위해 '무한소수가 수렴한다.'는 것과 같은 '어떤 실수로의 극한'을 암묵적으로 사용하지 않고 무한소수를 도입할 수 있어야 한다. 하지만 이지현과 Li의 무한소수 도입방식은 순환논리의 악순환을 끊지 못한다.

이지현(2015, p.273)이 무한소수 도입에 있어 유리수의 유계집합 $\{0, 0.1, 0.101, 0.101001, ...\}$의 최소상계를 찾게 하고 이 집합의 최소상계가 비순환무한소수 $0.101001000\cdots$임을 다루거나 Li(2011, p.3)이 무한소수를 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_i}{10^i}$ 급수로 상상하라고 제안하는 것은, 본질적으로 '무한소수가 수렴한다.'는 명제를 암묵적으로 가정하는 것이다. 다시 말해, 이지현과 Li는 무한소수를 도입하는 과정에서 이미 '어떤 실수로의 극한'을 가정하고 있는 것이다.

그렇다면, 순환논리를 사용하지 않고 직선 위의 각 점에 대응하는 무한소수를 도입하는 방안은 무엇일까? 이 연구에서는 이 질문에 주목하였고, Courant & Robbins(2002)의 논의에 기초해 '직선은 빠짐없이 점으로 채워져 있다.'는 직관으로부터 '어떤 선분의 길이 또는 직선의 각 점에 대응하는 수를 구성해내는 방식'에 의해 이 질문에 답하였다.

구체적으로, '직선은 빠짐없이 점으로 채워져

---

17) 우리나라 수학과 교육과정에서는 '실생활에서 사용되는 무리수의 예를 찾아보는 활동을 통해 무리수의 필요성과 유용성을 인식하게 한다(교육부, 2015, p.29)'라고 언급한다.

있다.'는 직관에 기초해 '유리수로 된 끝점을 가지는 축소구간[18])으로 이루어진 모든 구간에 속하는 점이 직선 위에 존재한다.'는 기하학의 축소구간공리를 수용하고, 이 공리에 의해 직선위의 각 점과 어떤 유리축소구간열이 서로 대응되도록 하고, 이 유리축소구간열(의 동치류의 대표원)을 나타내는 표현으로 무한소수를 도입하는 것이다. 여기서, 유리축소구간열의 동치류의 집합이 완비순서체의 성질을 가지고 있음을 증명하게 되면, 무한소수는 실수를 나타내는 표현으로서의 자격을 갖게 된다.

앞서 강조했지만, 실수와 관련한 '자명성의 착각'을 자각하기 위해서는 '직선위의 각 점을 무한소수로 표현할 수 있다.'는 명제를 자명하게 받아들이지 않아야 한다. 그리고 그 착각에 대한 극복을 위해 '무한소수가 수렴한다.'는 것과 같은 '어떤 실수로의 극한'을 사용하지 않고서 무한소수를 도입하고 그 명제를 증명해야 한다.

이러한 논의를 바탕으로, 이 연구에서는 다음과 같은 주장을 제기할 수 있을 것이다 : 실수와 관련된 학교수학과 대학수학 사이의 이중단절을 해소하기 위해서는 예비수학교사교육에서 무한소수를 유리축소구간열을 나타내는 표현의 하나로 도입하는 것이 바람직할 것이다.

그런데 유리축소구간열로 정의되는 수는, 완비성을 지닌 직선의 기하학적 성질에 기초해 만드는 것이므로, 그 자체가 완비성을 가짐을 쉽게 이해할 수 있고 증명할 수도 있다. 이에 비해, 유리축소구간열로 정의된 대상이 순서체로서의 성질을 가진다는 것을 입증하는 것은 간단하지만 매우 지루한 작업이다. 그러한 일은 열의를 갖고 수학을 배우고자 하는 사람에게 오히려 지겨움을 안겨줄 수도 있다(Courant & Robbins, 2002, p.91).

그러기에, 기초 해석학을 가르치는 대학수학교육에서는, 유리축소구간열을 이용해 실수를 구성함에 있어 기하학의 성질을 이용해 유리수만으로 실수를 구성한다는 사항에 초점을 두어야 하고, 그 반면에, 그렇게 구성한 수가 순서체임을 입증하는 과정은 언급하는 정도로 다루는 것이 바람직해 보인다.

참고문헌

교육부(2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74호[별책 8].

이지현(2014). 무한소수 기호 : 불투명성과 투명성. **수학교육학연구, 24**(4), 587-597.

이지현(2014). 유리수와 무리수의 합집합을 넘어서 : 실수가 자명하다는 착각으로부터 어떻게 벗어날 수 있는가? **수학교육학연구, 25**(3), 263-279.

Abian, A. (1981). Calculus must consist of the study of real numbers in their decimal representation and not of the study of an abstract complete ordered field or nonstandard real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 12*(4), 465-472.

Bergsten, C., Jablonka, E., & Klisinska, A. (2010). A remark on didactic transposition theory. In Mathematics and mathematics education: Cultural and social dimensions: Proceedings of MADIF7, The Seventh Mathematics Education Research Seminar, Stockholm, January 26-27. 2010. Linköping: Svensk förening för matematikdidaktisk forskning (SMDF).

18) 직선의 부분집합으로서의 선분인 축소구간이며, 여기서의 직선은 기하학적인 직선일 뿐이고 그 일부만이 유리수에 대응된 상태이고 그 직선의 나머지 부분은 어떤 수에도 대응된 상태가 아니다.

Boyer, C. B.(2008). **미분적분학사-그 개념의 발달**. (김경화 역), 서울 : 교육사. (영어원작은 1949년 출판)

Bronner, A. (1997). Les rapports d'enseignants de troisième et de seconde aux objets «nombre réel» et «racine carrée». *Recherches en didactique des mathématiques, 17*(3), 55-80.

Burn, R. P.(2000). *Numbers and functions: steps to analysis*. Cambridge: Cambridge University Press.

Courant, R. & Bobbins, H. (2002). **수학이란 무엇인가**. (박평우, 김운규, 정광택 역), 서울 : 경문사. (영어원작은 1947년 출판, 영어개정판은 Ian Stewart에 의해 1995년 출판)

Eves, H.(1999). **수학의 기초와 기본 개념**. (허민, 오혜영 역), 서울 : 경문사. (영어원작은 1965년 출판)

Forbes, J. E. (1967). The most difficult step in the teaching of school mathematics: from rational numbers to real numbers-with meaning. *School Science and Mathematics, 67*, 799-813.

Li, L.(2011). A new approach to the real numbers. available at http://arxiv.org/abs/1101.1800.

Defining the Infinite Decimal without Using the 'Limit to a Real Number'

Park, Sun Yong (Yeungnam University)

This study examines the approach of introduction of the real numbers through the infinite decimal, which is suggested by Lee Ji-Hyun(2014; 2015) in the aspect of the overcoming the double discontinuity, and analyses Li(2011), which is the mathematical background of the foregoing Lee's. Also, this study compares these construction methods given by Lee and Li with the traditional method using the nested intervals. As a result of analysis, this study shows that Lee Ji-Hyun(2014; 2015) and Li(2011) face the risk of the circulation logic in making the infinite decimal corresponding each point on the geometrical line, and need the steps not using the 'limit to a real number' in order to compensate the mathematical and educational defect. Accordingly, this study raises the opinion that the traditional method of defining the infinite decimal as a sequence by using the geometrical nested intervals axiom would be a appropriate supplementation.

* Key Words : definition of infinite decimal(무한소수의 정의), real numbers(실수)

논문접수 : 2016. 3. 5
논문수정 : 2016. 5. 4
심사완료 : 2016. 5. 12