대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 26 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 26, No. 2, 269 ~ 285. May 2016

예비수학교사의 ‘내용과 학습자에 대한 지식(KCS)’ 탐색 연구[1)]

박 경 미*

교수학적 내용 지식(PCK)은 수학교육학 분야에서 다각도로 활발하게 탐구되어온 주제이다. 본 연구는 PCK의 구성 요소 중의 하나인 ‘내용과 학습자에 대한 지식(KCS)’에 주목하고, 예비수학교사들의 KCS를 파악하기 위하여 사범대학 수학교육과 재학생 30명을 대상으로 반구조화된 심층면담을 실시하였다. 심층면담은 예비교사들로부터 다양한 답변을 기대할 수 있는 내용을 자유응답형으로 구성하였으며, 네 가지 질문에 대한 예비교사들의 답변을 기술하고 유형화함으로써 연구 문제로 설정한 학습자의 전형적인 오류, 학습자의 내용 이해, 학습자의 발달 계열에 대한 예비교사들의 사고를 파악하고자 하였다. 심층면담 결과, 예비교사들은 설문에 대한 응답에서 수학적 관점 혹은 교육적 관점을 갈등적으로 적용하고 있었다. 학교수학을 구성하고 있는 개념 중 여러 학교급과 학년 혹은 여러 영역에서 중층적으로 설명되는 경우에 대해서는 교사양성 과정에서 각 주제들이 학교급과 학년을 관통하여 어떻게 다루어지는지 종적으로 조망할 필요가 있을 것이다.

Ⅰ. 서 론

지난 20여 년 동안 수학교육을 비롯한 교과교육 분야에서 가장 활발하게 논의되어온 주제 중의 하나가 교수학적 내용 지식(pedagogical content knowledge, PCK)[2)]이다. 실제 PCK는 수학교육학(박선영, 강완, 2012; 박경미, 2009; 임미인, 장혜원, 2015; 전미현, 김구연, 2015; 최승현, 2007; 최승현, 황혜정, 2008 등)과 과학교육학(곽영순, 2007; 조희형, 고영자, 2008 등) 뿐 아니라 일반 교육학(양미경, 2009 등)에서도 관심을 가져왔다. PCK가 학계에 등장한 것은 1980년대 중반이다. 1985년 American Educational Research Association의 회장인 Shulman은 연례학회에서 강연을 했고 이를 정련한 논문 Shulman(1986, 1987)에서 내용과 무관한 기술(content-free skill)과 순수한 내용 지식(mere content knowledge) 사이에 누락된 패러다임(missing paradigm)을 지적하고, 이를 교수학적 내용 지식(PCK)으로 명명했다. Shulman에 의해 내용과 교수학의 특별한 화합물(special amalgam of content and pedagogy)

* 홍익대학교, kparkmath@hotmail.com
1) 이 논문은 2014학년도 홍익대학교 학술연구진흥비에 의하여 지원되었음.
2) PCK는 여러 방식으로 한글화되었다. 한국교육과정평가원은 여러 교과의 PCK를 연구하면서 ‘내용교수지식’이라고 명명했다. 그 이외에도 교과교육학 지식, 교수내용 지식, 교수법적 내용 지식 등으로 매우 다양하게 번역되어 사용되고 있다. 이러한 다양한 버전은 PCK의 의도를 담은 용어를 찾기가 어렵다는 것을 방증한다. 본고에서는 ‘교수학적 내용 지식’이 그 의미를 가장 잘 살리는 용어라고 판단하여 사용하였고, 표기의 용이성을 위해 본문에서는 PCK로 표기하였다.

로 규정된 PCK는 교과교육학이 일반교육학과 차별화되는 고유의 정체성을 보장하는 개념으로, 그리고 수학교사의 전문성을 규정짓는 핵심개념으로 다각도로 탐구되어 왔다.

PCK의 아이디어를 담는 변형된 개념과 용어도 다양하게 제안되었다. Cochran, DeRuiter, King(1993)은 구성주의적 관점에서 PCK를 대체하는 PCKg(pedagogical content knowing)라는 용어를 조어함으로써 교사가 갖추어야 할 지식은 결과론적인 지식(knowledge)이 아니라 계속 발전되어 가는 역동성을 지닌다는 의미에서 알아가는 과정(knowing)이라고 보았다. 이연숙(2006)은 PCK는 그 자체로서가 아니라 수업을 통해 실체를 드러낸다는 측면에서 표상(representation)을 붙여 PCKr(pedagogical content knowledge represented)로 명명할 것을 제안하기도 했다.

PCK의 개념을 어떻게 정의할 것인지에 대한 논의가 이루어지고 있는 가운데, 본 연구에서는 PCK 개념의 일부분으로 Hill과 Ball과 Schilling (2008)이 규정한 '내용과 학습자에 대한 지식(knowledge of content and students, KCS)'에 초점을 맞추고, 예비교사들의 KCS를 탐색하기 위한 문항을 선정하여 심층면담을 실시하고, 그 결과를 분석하였다.

Ⅱ. 선행 연구 및 이론적 배경

예비교사와 현직교사의 PCK를 측정하기 위한 국내외의 연구가 활발하게 이루어지고 있어 방대한 선행연구를 일별하기 위해서는 메타분석을 실시해야 할 것이다. 이에 선행연구로는 본 연구와 관련성이 높은 것을 선별적으로 제시하였다. 박선영, 강완(2012)은 설문조사와 수업 관찰을 통해 평면도형의 넓이에 대한 초등학교 교사 3명의 PCK를 조사하였다. 이 연구는 최승현(2007)이 제시한 PCK의 네 가지 측면인 수학 내용 지식, 수학과 교수 방법 및 평가에 대한 지식, 수학 학습에 대한 학생 이해 지식, 수학과 수업 상황에 대한 지식 영역을 중심으로 설문지를 작성하고 초등학교 교사의 PCK를 조사하였으며, 수업 관찰과 면담을 통해 설문조사의 한계를 보완하였다. 전미현, 김구연(2015)은 중등 예비교사들의 교수를 위한 수학적 지식(MKT) 수준을 검증하는 문항 개발을 확장하고 이를 이용하여 중등 예비수학교사 54명을 대상으로 MKT 수준을 측정하였다. 검사 결과 평균은 30.2점이고, 예비교사들은 대체로 문항에서 나타내는 학습 내용에 관한 지식을 정확히 이해하지 못하고 있으며, 학생들이 어려워하는 부분과 이에 대한 정확한 설명 방법을 구체적으로 도입하지 못하는 것으로 나타났다. 임미인, 장혜원(2015)은 수÷0에 대한 초등교사의 PCK를 조사하기 위해 초등교사 30명을 대상으로 개별 면담을 실시하였다. 그 결과 초등교사는 수÷0과 그에 대한 적절한 지도 방법을 알고 있지 못하고 있는 것으로 드러났으며, 이러한 결과로부터 몇 가지 교수학적 시사점을 제안하였다.

Buchholtz et al(2012)은 독일, 중국, 홍콩, 한국의 예비교사를 대상으로 설문조사를 실시하고 그 결과를 분석하였다. 이 연구는 학교수학을 수학자의 관점에서 조망한 Felix Klein의 고전 *Elementary mathematics from a higher standpoint* 의 아이디어를 계승한다는 측면에서 '초보적인 수학을 높은 학문적 관점에서 조망하는 예비교사의 전문적 지식(Future mathematics teachers' professional knowledge of elementary mathematics from an advanced standpoint)'을 측정하는 것으로 주제를 잡았다. 설문조사 대상 예비교사의 수는 독일 106명, 중국(항주) 134명, 홍콩 31명, 한국 74명이다. 설문조사는 총 17문항으로 이루어졌는데, 그 중의 한 문항을 예시하면 다음과 같다.

학교수학에서 유리수와 실수를 가르친다. 유리수 체계를 실수 체계로 확장하는 것은 수학적으로 어떻게 정당화될 수 있을까?

A. 수직선에서 두 유리수 사이에 반드시 무리수는 존재하지만 유리수는 존재하지 않는 경우가 있다. 따라서 무리수를 도입할 필요가 있다.

B. 실수를 도입하지 않으면 $a \neq 0$인 유리수 a에 대해 $a \cdot a' = 1$을 만족하는 a'을 찾지 못할 수도 있다.

C. 실수를 도입하지 않으면 $x^2 = a$ $(a > 0)$의 근을 구하지 못할 수도 있다.

D. 유리수에서 실수로 확장하면 $a < 0$일 때 $\sqrt{a}$를 구할 수 있다.

E. 모르겠다.

이 문항은 수체계의 확장과 관련된 예비교사의 이해 정도를 측정하기 위한 것이다. 선택지 중 B는 정수를 유리수로 확장하는 논리이며, D는 실수를 복소수로 확장하는 근거가 되며, A는 일종의 매력적인 오답으로, 유리수의 조밀성을 고려할 때 적절하지 않다. 따라서 정답은 C가 되는데, 한국 예비교사의 78.4%가 C를 선택했고, 이를 선택한 비율은 중국 38.98%, 독일 37.8%, 홍콩 32.3%였다. 이 문항에 대한 한국 예비교사의 정답률은 나머지 국가들에 비해 월등히 높은 것으로 나타났으며, 다른 문항에서도 유사한 결과를 확인할 수 있었다. 그런데 이러한 지필 설문조사가 갖는 한계는, 각각의 답을 선택한 이면에 있는 사고의 과정을 충분히 파악하기는 어렵다는 점이다. 또한 설문조사 대상이 어떠한 예비교사 교육을 받았는지, 해당 국가의 학교수학에서 수체계의 확장이 얼마나 명시적으로 다루어지는지 등 여러 변수가 작용을 한다는 면에서 우리나라 예비교사의 우위를 일반화하는데 있어서는 신중함이 필요하다. 그러나 이 연구를 포함하여 예비교사들의 이해 수준을 조사한 국제비교 연구(Schmidt, et al, 2007)에서 지속적으로 나타나는 현상은 우리나라 예비교사들은 학문으로서의 고등수학을 이해하는 수준이 높을 뿐 아니라 이를 교수학적으로 변환시킨 학교수학에 대해 풍부한 이해를 하고 있다는 점으로, 이를 대체적인 경향성으로 인정할 수는 있을 것이다.

Hill, Ball, Schilling(2008)은 PCK와 이를 새롭게 조명한 MKT(mathematics knowledge for teaching)에 대한 기존의 다양한 논의를 종합한 후 그 구성요소를 체계화하는 모델을 제안하였다. 이 모델에서 MKT는 우선 '교과 내용 지식(subject matter knowledge, SMK)'과 PCK로 대별되고, SMK와 PCK는 각각 3개의 하위요소로 구성된다. SMK에는 '공통 내용 지식(common content knowledge, CCK)'과 '전문화된 내용 지식(specialized content knowledge, SCK)', 그리고 '수학적 지평으로서의 지식(knowledge at the mathematical horizon)'이 포함되고, PCK에는 '내용과 학습자에 대한 지식(knowledge of content and students, KCS)', '내용과 교수에 대한 지식(knowledge of content and teaching, KCT)', '교육과정에 대한 지식(knowledge of curriculum)'이 포함된다. 이 연구에서는 MKT의 한 축인 PCK, 그 중에서 KCS에 초점을 맞추었다. KCS는 내용에 대한 지식과 학습자에 대한 지식의 결합체로, 특정 내용에 대해 학습자가 어떻게 사고하는지에 주목하며, KCS의 유형을 다음과 같이 규정하였다.

- 학습자의 전형적인 오류
- 학습자의 내용 이해
- 학습자의 발달 계열
- 학습자의 전형적인 계산 전략

Hill, Ball, Schilling(2008) KSC를 측정할 수 있는 5개의 선택형과 1개의 개방형 문항을 개발하였다. 수의 연산에 대한 학생들의 오개념과 전략을 중심으로 구성된 이 검사도구는 교사를 대상으로 지필검사로 실시되었고 문항반응이론(IRT)을 이용하여 그 결과를 분석하였다.

Ⅲ. 연구 문제, 방법 및 대상, 절차

1. 연구 문제

본 연구는 Hill, Ball, Schilling(2008)이 구조화한 PCK의 세 가지 하위 영역 중 예비교사로부터 측정하기에 적합한 KCS를 중심으로 이루어졌다. PCK 중 KCT는 수학 수업을 계획하고 수행하는데 필요한 실제적인 측면으로 예비교사들에게 KCT도 매우 중요한 지식이지만 교원양성 과정에서 이와 관련된 실무적인 경험을 충분히 갖기 어렵기 때문에 KCS를 선택한 것이다. 한편 본 연구는 중등 예비교사를 연구 대상으로 하므로 KCS의 네 번째 유형인 계산 전략보다는 첫 번째인 학습자의 오류 유형에 보다 중점을 두어, 이와 관련된 문항을 초등학교와 중학교 수준에서 각각 하나씩 포함시켰으며, 두 번째 유형인 학습자의 내용 이해와 세 번째 유형인 학습자의 발달 계열과 관련된 문항을 하나씩 포함시켜 총 네 개의 문항을 선정하였다. 정리하면 본 연구의 연구문제는 다음과 같다.

- 예비교사는 학습자의 전형적인 오류에 어떻게 대응하는가?
- 예비교사는 학습자의 내용 이해를 어떻게 해석하는가?
- 예비교사는 학습자의 발달 계열을 어떻게 파악하는가?

2. 연구 방법 및 대상

예비교사들의 학교수학에 대한 이해의 정도를 탐색하기 위하여 질적(정성적) 연구방법인 심층면담을 실시하였다. 예비교사들의 KCS를 알아보기 위해 다수의 문항으로 대규모의 설문조사를 실시할 수도 있으나, 소수의 문항으로 사고를 심층적으로 진단하기 위하여 질적 연구방법을 동원한 것이다. 흔히 질은 개별 사물의 고유한 속성이고, 양은 비교와 측정을 통해 인식되는 관계적 속성으로 효율적인 의사소통을 위해 이차적으로 부가된 속성이다. 후자에 초점을 맞춘 양적(정량적) 연구에서는 체계적인 비교를 위해 수치화 하거나 수집된 자료의 범주를 설정하고 표준화, 척도화 하는데, 이 과정에서 부차적인 감환(reduction)이 일어날 수 있다(이용숙, 김영천, 1999). 즉 설문조사의 답변을 선택형으로 구성하거나 개방형 질문에 대한 답변을 코드화하는 과정에서 예비교사들의 이해 상태가 단순화 될 수 있기 때문에 본 연구에서는 심층면담을 실시하고 그 대화의 녹취록을 만들고 분석하여 각 답변들의 맥락의존성을 살리고자 하였다.

본 연구의 대상은 서울 소재 사립대학교의 수학교육과 2학년(일부는 3학년)에 재학 중인 예비교사 30명으로, '수학교육교육론'을 수강하는 학생들이다. 연구자가 예비교사들을 대상으로 일대일 개별 면담을 실시하였다. 연구자가 예비교사를 대면한 후 면담 문항을 제시하면 개인의 순발력의 차이가 답변 수준의 차이를 유발할 가능성이 있기 때문에, 바로 이전 학생이 면담하는 동안 문제지를 제공하여 생각하는 기회를 갖도록 하였다.

3. 연구 절차

면담 질문은 선행연구에서 소개한 Buchholtz et al(2012)의 설문조사 문항을 기반으로 하였다. Buchholtz et al(2012)은 독일, 중국, 홍콩, 한국이 참여한 연구로, 각 국가에서 예비검사를 실시하고 문항의 타당성을 검증하는 다단계의 과정을 거쳤고, 본 연구의 연구자는 Buchholtz et al(2012)에 참여하면서 문항 작성과 한국 자료 수집을 담당하였다. 면담 질문은 Buchholtz et al(2012)의 설문문항을 심층면담에 적합한 방식으로 수정한 것으로, 예를 들어 첫 번째 문항의

<표 III-1> 심층면담 질문의 특성

번호	주제	KCS	학교급과 영역	관련 개념
1	삼각함수의 성질을 이용한 피타고라스 정리의 증명	학습자의 전형적인 오류(중학교)	중학교 3학년 기하 고등학교 <미적분II> 삼각함수	피타고라스 정리, 삼각비, 삼각함수
2	효율성 비교	학습자의 전형적인 오류(초등학교)	초등학교 5~6학년군 규칙성	비와 비율
3	직선의 방정식	학습자의 내용 이해	중학교 2학년 함수의 그래프 미지수가 2개인 일차방정식 고등학교 <수학I> 기하	직선의 방정식, 기울기, 평행이동
4	수열의 일반항	학습자의 발달 계열	초등학교 3~4학년군, 5~6학년군 규칙성 고등학교 <수학II> 수열	규칙찾기, 정비례, 등차수열

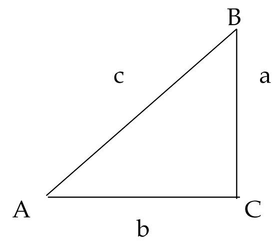
경우 오류가 포함된 증명을 제시하고 이에 대해 어떻게 생각하는지를 선택형으로 물었으나, 본 연구에서는 심층면담을 위해 자유응답형으로 변경하였다. 예비교사들로부터 다양한 답변을 기대할 수 있는 내용이면서, 학습자의 전형적 오류를 파악할 수 있는 초등학교와 중학교 문항 각각 1개, 학습자의 내용 이해에 대한 문항 1개, 학습자의 발달 계열에 대한 문항 1개를 선정하였다. 중등학교 교사들도 초등학교 내용에 대한 충실한 이해가 필요하고, 특히 비와 비율은 중등학교에서도 지속적으로 사용되는 핵심개념이기 때문에 중등 예비교사를 대상으로 하지만 초등학교 내용을 포함시켰다. 본격적인 심층면담을 실시하기 전에 예비면담을 실시하여 질문이 명료한지 등을 확인한 후 본검사를 실시하였다. 심층면담을 위한 질문의 특성은 <표 III-1>과 같다.

면담을 하면서 우선 예비교사들이 자유롭게 자신의 의견을 개진하도록 하였고, 예비교사의 답변에 따라 필요한 질문을 추가하는 반구조화 방식으로 진행하였다. 면담의 전체 과정은 녹음을 하여 전사록을 만들었고, 예비교사들의 면담 전사록을 반복하여 숙지하면서 유사한 답변들을 모아 유형화를 시도하였다. 예비교사들의 응답을 분류하는 틀을 선험적으로 제시하지 않고, 응답들을 검토하면서 유형을 만드는 상향식 (bottom-up) 방식을 취하였다. 그리고 초기에는 유형들을 세분화 하였으나, 병합가능한 유형은 합치면서 문항별로 3~4개로 범주를 정했다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 질문1의 답변 결과 및 해석

피타고라스 정리를 증명하는 방법은 수없이 많다. 어느 학생이 다음과 같은 증명을 제시하였다.

> 삼각비에서 $\sin A = \dfrac{a}{c}$, $\cos A = \dfrac{b}{c}$이고,
> $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$이므로
> $(\dfrac{a}{c})^2 + (\dfrac{b}{c})^2 = 1$이다. 양변에 c^2을 곱하면
> $a^2 + b^2 = c^2$이 된다.
>
> 
>
>
> 따라서 피타고라스 정리가 성립한다.

이 증명에 대해 어떻게 생각하는가?

<표 IV-1> 질문1의 답변 결과

답변의 유형	증명이 옳다	증명이 옳지 않다			
		순환논리	학교수학에서의 도입 순서	배제의 관점	기타
응답자 수	7	11	4	2	6

이 질문에 대해 30명의 예비교사 중 7명은 증명이 옳다고 응답하였다. 그 대표적인 예시는 다음과 같다.

예비교사12: 삼각함수의 성질을 이용해서 피타고라스의 정리를 증명했기 때문에 오류가 없어요.

예비교사19: 증명은 전제에 대한 합의가 있으면 되는 것이고, 이 학생은 자신이 알고 있는 삼각비의 성질을 전제하고 증명한 거니까 옳은 증명이 아닐까요.

예예비교사28: 논리에 어긋남이 없으니까 증명이 된 것 같은데요...

예비교사 중 23명은 이 증명이 틀렸다고 답하였는데, 그 응답은 세 가지로 유형화할 수 있다. 첫 번째 유형의 답변은 삼각함수의 성질 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$이 피타고라스 정리로부터 도출되었음을 인식하고, 주어진 증명이 순환논리에 빠졌음을 지적한 것이다. 예비교사 중 11명이 이 유형에 해당한다.

예비교사2: $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$이 피타고라스의 정리에 의해 나오는 식이니까 피타고라스의 정리를 증명하는 과정에서 피타고라스의 정리를 이용하게 된 거죠.

예비교사21: 사인과 코사인의 제곱의 합이 1이 된다는 정리는 이미 피타고라스 정리에 의해 증명된 내용이니까 증명이 틀린 거 같은데요.

예비교사9: 삼각함수를 이용할 때 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$이라는 식은 $\sin A = \frac{x}{r}$, $\cos A = \frac{y}{r}$라고 정의하고 $x^2 + y^2 = r^2$임을 이용해서 증명하는데.... 그러니까 여기서 이미 피타고라스의 정리를 사용하니까 순환논리에 빠진거죠.

첫 번째 유형에 해당하는 11명 중 8명은 위와 같이 처음부터 순환논리를 지적했지만, 3명의 학생은 삼각비 혹은 삼각함수 자체가 피타고라스 정리를 이용해서 정의된 것이라는 점에 주목해서 이 증명이 옳지 않다고 설명하였다. 이 경우에는 연구자가 추가 질문을 던졌고 이를 통해 삼각비나 삼각함수 자체가 아니라 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$이 순환논리에 빠지는 지점이라고 정정했다.

예비교사15: 사인, 코사인이 피타고라스의 정리에 기초하여 나왔으니 이걸 증명하려면 다른 방법을 써야 해요.

연구자: 잠깐, 사인과 코사인이 피타고라스의 정리로부터 나온 것인가요?

예비교사15: (생각 후) 아뇨. 사인, 코사인이 직각삼각형에서 정의되기는 하지만 거기서 피타고라스의 정리가 쓰이는건 아니네요. 그러니까 사인 제곱 더하기 코사인 제곱이 1이 된다는 것이 피타고라스의 정리에서 파생되는 거예요.

연구자: 그럼 주어진 증명에 대한 생각을 다시 정리해보면?

비교사15: 사인 제곱 더하기 코사인 제곱이 1이 된다는건 피타고라스의 정리를 이용해 만들어진 이론인데 이걸로 피

타고라스의 정리를 증명하는 게 맞지 않아요.

두 번째 유형은 학교수학에서의 도입 순서를 고려한 것으로, 4명의 학생이 이 측면에서 답변을 하였다. 피타고라스 정리는 중학교 3학년에 배우고, 삼각비는 중학교 3학년이지만 피타고라스 정리 이후에 다루게 되며 삼각함수는 고등학교에서 다루므로 피타고라스 정리를 증명할 때 그 이후에 배울 내용을 이용하는 것이 적절하지 않다는 점을 지적하였다.

예비교사10: 잘 생각해보니까 피타고라스의 정리보다 삼각비의 성질을 더 이후에 배우니까 피타고라스의 공식을 이해하는데 적절하지 않을거 같아요. 그니까 피타고라스의 정리를 배울 때 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$이라는 것이 증명 없이 그냥 나와야 하지 않나요...

세 번째 유형은 삼각비와 피타고라스 정리가 서로 다른 영역에 속하는 주제라는 '배제'의 관점에서 설명을 하였고, 이 측면에서 답변한 학생은 2명이다.

예비교사7: 사인과 코사인은 함수이고, 피타고라스의 정리는 기하니까 둘을 연관 지어서는 안돼요.

기타 의견은 6명이다. 그 중에서 1명은 이 증명이 옳지 않다고 답했지만 그 이유를 말하는 과정에서는 정당하다는 논지를 펼쳤다. 즉 증명 과정이 순환논리를 따르는 것임을 인정하지만, 삼각함수의 성질을 공리로 받아들이면 그 증명의 과정 자체에는 문제가 없다는 의견이다.

예비교사29: 이 증명 과정이 순환논리이기는 하지만 학생이 아는 바를 활용하여 모순됨 없이 풀어냈다는데 의의를 둬야 할 것 같구요. 대상이 중학생이라면 사인 제곱 쎄타 더하기 코사인 제곱 쎄타가 1이라는 것을 일종의 공리로 받아들이고 그러면 이 답은 충분히 의미가 있다고 생각해요.

또 다른 의견으로 한 명은 증명에서 직각삼각형임을 명시하지 않은 점을 지적하고, 한 명은 A가 복소수일 가능성을 언급하면서 증명이 틀렸다고 답변했다.

예비교사11: 그림에 직각삼각형이 주어지기는 했지만 증명에서는 직각삼각형이라는 가정이 없으므로 사인 제곱 더하기 코사인 제곱이 1이라는 사실이 성립하지 않는거 아닌가요?

예비교사8: A가 복소수이면 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$이 아니게 되는 걸로 알고 있는데요...

증명이 옳지 않다는 답변 중 첫 번째 유형은 피타고라스 정리를 증명할 때 이를 이미 이용하여 정의한 삼각비나 삼각함수의 성질을 이용하는 것은 순환 논리에 해당한다는 점을 지적한 수학적인 답변이다. 그에 반해 두 번째는 학교수학에서 도입이 피타고라스 정리→삼각비→삼각함수의 순서로 다루어진다는 점에서 삼각비를 이용한 피타고라스 정리의 증명이 부당함을 지적하였고, 세 번째는 특정 영역의 증명은 다른 영역과 결합되지 않는 것이 바람직하다는 배제의 측면이므로, 두 번째와 세 번째 유형은 모두 교육적 측면을 고려한 답변이라고 할 수 있다.

2. 질문2의 답변 결과 및 해석

컴퓨터 대리점에서 일하는 A는 오늘 한 대의 컴퓨터도 팔지 못했고, B는 한 대의 컴퓨터를 팔았다. B는 자신이 A보다 100% 더 효율적이라고 말했다. 수학적 관점에서 볼 때 B의 생각이 옳은지 옳지 않은지 답하고 그 이유를 설명하여라.

이 문항에 대해 2명의 예비교사는 B의 생각이 옳다고 답변했고, 나머지 28명은 옳지 않다고 답변했는데, 그에 대한 이유는 대략 네 가지 유형으로 구분할 수 있다.

첫 번째 유형은 효율성을 계산하는 분수와 곱셈식을 이용하여 설명한 수학적인 답변으로, 7명의 예비교사가 이 유형에 해당한다.

예비교사14: A라는 사람 a대, B라는 사람이 b대의 컴퓨터를 팔았다고 할 때 B의 A에 대한 효율성을 생각해보면 $(\frac{b}{a}\times 100)$%가 되요. 그런데 문제에서 A는 컴퓨터를 0대 팔았으니까 분모가 0이 되어 ∞가 나오게 되겠죠. 그러니까 효율성을 논하기 곤란해요.

예비교사29: A와 B가 컴퓨터를 판 것을 비교하면 0대와 1대를 판매한 건데, 그 효율성은 $\frac{1}{0}\times 100 = \infty$가 되요. 그러니까 100% 효율적이라는 B의 말은 거짓이에요.

예비교사3: A가 한 대도 못 팔고 B는 팔았는데 $0\times x=1$이 될 수 없으니까 몇 배 더 효과적이라고는 말할 수 없는거 같아요.

두 번째 유형은 비에 초점을 맞춘 수학적인 설명으로, 5명의 예비교사가 이 유형에 해당한다.

예비교사18: 0과 1의 비는 무한대가 되니까 틀린 말이에요.

예비교사9: 수학적 관점에서 보면 0:1의 값은 무한대가 되죠... 값이 0인 수와의 비교는 불가능해요. 200%나 300%가 될 수도 있구요.

세 번째 유형은 A의 효율이 0이므로 비교 불가라는 점을 언급한 경우로, 4명의 예비교사가 이에 해당하는 답변을 했다.

예비교사10: 효율을 일한 시간 분에 판매 수라고 본다면 A의 효율은 0이 되겠죠. B가 더 효율적인 것은 맞지만 100%라 할 수 없을거 같아요.

예비교사26: 일의 효율을 비교하려면 일한 양이 있어야 하는데 A는 일한 양이 없으므로 비교를 할 수 없어요.

네 번째 유형은 100% 더 효율적이기 위해서는 판매대수의 비가 1:2가 되어야 한다는 점을 지적한 답변이다. 즉 첫 번째, 두 번째, 세 번째 유형의 답변은 B가 A보다 100% 더 효율적이라는 결론이 틀렸음을 직접적으로 설명했다면, 네 번째 유형은 문제의 결론대로 B가 A보다 100% 더 효율적이기 위해서는 다른 수치적 조건이 주어져

<표 IV-2> 질문2의 답변 결과

답변의 유형	B의 생각이 옳음	B의 생각이 옳지 않음				
		분수와 곱셈식으로 효율성 설명	비로 효율성 설명	A와의 비교 불가	판매대수가 1:2이어야 함	비수학적 이유
응답자 수	2	7	5	4	5	7

야 함을 설명한 경우로, 예비교사 5명의 답변이 이에 해당한다.

> 예비교사20: 0과 1은 곱셈 관계로 표현될 수 없죠. 1과 2의 관계는 100%로 볼 수 있지만요.
> 예비교사4: A는 한 대로 못 팔았으므로 효율이 0이기 때문에 B와 비교할 수 없어요. 그렇지만 1대:2대인 경우는 효율이 100%라고 할 수 있겠죠.
> 예비교사11: 0과 1은 100%의 차이가 아니죠. 하지만 1과2는 100% 차이가 있어요.

다섯 번째 유형은 비수학적인 이유를 들어서 B의 결론이 틀렸음을 설명한 경우로, 예비교사 7명의 답변이 이에 해당한다.

> 예비교사17: A가 컴퓨터를 팔지 못했지만 고객관리라던가 컴퓨터 개발 관련된 일을 했다면 A가 더 효율적이라고 할 수 있을거 같아요.
> 예비교사21: 오늘 하루만으로 보면 B의 생각이 옳지만 전체 일수로 보면 옳다고 할 수 없다고 생각합니다.
> 예비교사1: 오늘 한대도 못 팔았다고 해서 항상 못 파는 것이 아닌데 오늘 하루의 경우만을 가지고 100% 더 효율적이지 않다고 보기는 무리가 있어요. 뭐 내일은 A가 5대를 팔고, B가 한 대도 팔지 못할 수도 있겠죠.
> 예비교사5: 하루 일한 것으로 100% 더 효율적이라고 말하는 것은 근거가 부족해요. 며칠간의 판매량을 비교도 해보고 평균, 표준편차까지 비교해보면 더 좋을 것 같아요.

예비교사들은 효율성을 계산하는 분수, 곱셈식, 비 등을 통해 수학적으로 접근한 경우가 많았지만, 맥락이 동원된 문제이니만큼 효율성에 대한 다른 접근이 필요하다는 식으로 상황과 관련된 비수학적인 설명을 한 경우도 적지 않았다.

3. 질문3의 답변 결과 및 해석

학생들이 한 점 (x_1, y_1)을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식에 대해 배우고 있다. 은주와 명희는 다음과 같은 방정식을 제시했다. 은주: $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=m$ ………… (1) 명희: $y-y_1=m(x-x_1)$ ………… (2) 은주와 명희의 방법 사이에 차이가 있는지 없는지 답하고 그 이유를 설명하여라.

예비교사 30명 중 2명은 두 방법 사이에 차이가 없다고 답변했고 나머지 28명은 모종의 차이가 있다고 답하였다. 우선 차이가 없다고 답한 답변의 예시는 다음과 같다.

> 예비교사2: 은주는 x와 y의 증가비를 분수를 이용하여 구했고 명희는 x와 y의 비율을 곱셈식으로 구했으니까 두 방법은 같아요.
> 예비교사25: 은주의 식을 변환하면 바로 명희의 식이 되는데요.

두 직선의 방정식 사이에 차이가 있다고 답한 28명의 예비교사의 답변은 대략 세 가지 유형으로 분류할 수 있다. 첫 번째 유형은 은주의 방정식에서 $x=x_1$인 경우를 제외시켜야 하고 그런 면에서 명희의 방정식이 더 적절하다고 설명하였다. 첫 번째 유형에 해당하는 경우는 12명으로, 답변 예시는 다음과 같다.

> 예비교사13: 은주가 제시한 방정식은 x는 x_1이 될 수 없어요. 그니까 문제에서 제시한 점 x_1, y_1을 지날 수 없어요. 명희가 제시한 방정식을 답으로 하

<표 IV-3> 질문3의 답변 결과

답변의 유형	차이가 없다	차이가 있다			
		두 직선의 방정식은 $x=x_1$에서 차이	‘함수’ 그래프의 기울기 vs. ‘기하’ 직선의 방정식	기울기 vs. 평행이동	이유를 제시하지 않음
응답자 수	2	12	5	5	6

는게 맞아요.

예비교사8: 은주의 방법은 x가 x_1인 경우에 대해 정의할 수 없는 함수이고... 그래서 명희와 은주의 방법은 차이가 있어요.

예비교사22: 은주의 방법은 x 마이너스 x_1이 0이 아닐 때만 되요.

예비교사5: 은주는 x 마이너스 x_1이 분모에 있으니까 x 마이너스 x_1이 0인 경우는 제외해야 되요. 그렇지만 명희는 상관 없으니까 x 마이너스 x_1이 0인 경우도 포함해요.

예비교사19: 차이가 있어요. (1)번 식은 엄밀히 말해 옳지 않아요. 점 x_1, y_1을 나타낼 수 없기 때문에요.

수학적인 관점에서 볼 때, 은주와 명희의 직선의 방정식은 $x=x_1$일 때 성립하느냐의 문제이고 명희의 방정식은 은주의 방정식과 달리 모든 경우를 포괄할 수 있다는 점에서 차이를 갖는다. 직선은 초등학교와 중학교에서 지속적으로 다루어지지만 직선의 방정식이 본격적으로 정의되는 것은 고등학교 <수학I>의 기하 영역이다. <수학I> 교과서는 직선이 (x_1, y_1)을 지나는 경우 $x \neq x_1$일 때 기울기는 $m=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$이고, 양변에 $x-x_1$을 곱하면 $y-y_1=m(x-x_1)$이 되는데, 이 경우 $x=x_1$일 때에도 성립하기 때문에 이를 (x_1, y_1)을 지나고 기울기 m인 직선의 방정식이라고 명시적으로 설명하고 있다.

두 번째 유형의 답변은 은주의 식이 중학교 함수 그래프의 기울기와 관련되고, 명희의 식이 고등학교 기하에서 다루는 직선의 방정식과 관련된다는 점을 지적하였다. 이에 해당하는 경우는 5명으로 답변 예시는 다음과 같다.

예비교사12: 은주는 중학교 함수 그래프, 거기에서 배우는 기울기의 정의에 의해 직선의 방정식을 유도하고자 했고... 명희는 고등학교에서 배우는 직선의 방정식 공식에 의해서 유도했어요.

예비교사29: 차이는... 은주는 $\varDelta$을 이용하여 기울기가 dx 분의 dy와 같음을 알고 이를 식으로 표현했고, 명희는 공식을 이용해서 식을 제시했어요. 기울기는 함수 그래프이고 직선 공식은 기하 공식이고.

예비교사23: (1)은 기울기에 대한 생각이고.. (2)는 직선의 방정식으로 생각한 것 같아요.

세 번째 유형의 답변은 두 번째와 유사한 면이 있지만 명희와 관련하여 평행이동을 강조한 것으로, 은주는 기울기를 구하는 식으로부터 직선의 방정식을 구한 반면 명희는 원점을 지나는 직선을 평행이동시켜 직선의 방정식을 구했다는 점을 지적했다. 이에 해당하는 경우는 6명으로 답변 예시는 다음과 같다.

예비교사1: 은주의 답은 x의 증분에 대한 y의 증분을 m이라고 놓고 기울기의 정의를 이용한 것이고... 명희의 답은

원점을 지나면서 기울기가 m인 직선 $y=mx$에서 (x_1, y_1)을 지나게끔 평행이동 해서 얻은 식이에요.

예비교사17: 은주는 기울기에 중점을 두고 x의 증가량 분의 y의 증가량이 기울기라는 식을 이용했구요... 명희는 원점을 지나는 $y=mx$ 그래프의 평행이동을 생각하고 방정식을 세웠어요.

예비교사9: 먼저 명희는 우리가 알고 있는 일반적인 직선의 방정식 $y=mx$를 (x_1, y_1) 만큼 평행이동인 직선을 나타냈고, 은주는 직선 위의 임의의 점과 (x_1, y_1)를 이은 직선의 기울기가 m이라는 것을 표현했어요.... 수학적인 이유를 말하라면 은주는 양변의 결과가 기울기값을 의미하는 것이고 명희는 함수값을 의미하는 것인데....

예비교사22: 은주는 기울기를 구하는 방법을 이용하여 방정식을 나타냈고 명희는 $y=mx$라는 직선을 x축으로 x_1만큼 y축으로 y_1만큼 평행이동 하는 방법을 이용하여 방정식을 나타냈어요.

두 번째 유형인 '기울기'와 '직선의 방정식', 세 번째 유형인 '기울기'와 '평행이동'의 관점은 직선의 방정식이 다루어지는 교육적인 측면에 초점을 맞춘 답변이다. 도종훈(2008)은 좌표평면에서의 직선 및 직선성으로서의 기울기 개념이 학교수학에서 어떻게 다루어지는지를 분석한 연구에서, 직선을 좌표평면에 표현하는 과정에서 '곧음'이라는 직선의 고유한 성질은 삼각형의 닮음에 의해 x값의 변화량에 대한 y값의 변화량의 비가 일정하다는 성질로 구체화되고 이것이 바로 '기울기'이며, 일정한 비로서의 기울기가 지닌 성질을 대수적으로 표현한 식이 '직선의 방정식'이라고 보았다. 도종훈(2008)의 연구 결과에서 적시한 미묘한 차이는 심층면담 결과에 나타난 두 번째 유형과 세 번째 유형의 답변에서 찾아볼 수 있다. 한편 예비교사 중 6명은 두 방법이 다르다고는 답했지만 그 이유를 제시하지 못하였다.

4. 질문4의 답변 결과 및 해석

수열에서 첫째항부터 넷째항까지가 3, 6, 9, 12일 때, 다섯째항에는 어떤 수가 와야 할까?

이 수열에서 다섯째항이 15라고 답한 학생은 10명이었고, 나머지 학생들은 다섯째항에 15가 올 수도 있지만 다른 수가 올 수도 있다고 답하였다. 이 문항과 관련해서는 추가의 질문이 여러 번 이루어지게 되었다. 우선 다섯째항이 15로 정해진다고 답한 학생에 대해 그 이유를 물었을 때 일반항이 $3n$이기 때문에 15라고 답한 학생은 4명으로 답변의 예시는 다음과 같다.

예비교사3: 이건 공차가 3인 등차수열이고 일반항이 3n이기 때문에 5항의 답은 15가 되요.

예비교사28: 수열은 수를 일정한 규칙에 의해 나열된 수니까 일반항은 3n꼴로 유지되고 15가 오게 되요.

다섯째항이 15라고 답한 10명의 예비교사 중 6명은 다른 각도에서 그 이유를 설명하였다. 학생들이 수의 규칙성과 수열에 대해 배우고 있다는 전제 하에 15라고 답한 것이다. 즉 수학적으로는 다섯째항에 15 이외의 수가 올 수도 있지만 수의 규칙성을 다루는 수업이라는 제약으로 인해 15라고 한정했다고 답하였다.

예비교사10: 학생들이 수의 규칙성, 수열에 대해 배우는데, 예외적인 것에 비중

<표 IV-4> 질문4의 답변 결과

<table>
<tr><td rowspan="2">답변의 유형</td><td colspan="2">다섯째항은 15</td><td colspan="3">다섯째항에는 15 이외의 수가 올 수 있음</td></tr>
<tr><td>일반항이 $3n$</td><td>규칙성을 다루는 수업으로 인한 제한</td><td>수열의 일반항은 무한개</td><td>수열의 일반항은 유한개</td><td>기타</td></tr>
<tr><td>응답자 수</td><td>4</td><td>6</td><td>11</td><td>7</td><td>2</td></tr>
</table>

을 둘 필요는 없다고 생각해요.

예비교사18: 학생들이 수열에 대해 처음 배우기 때문에 쉽게 찾을 수 있는 일반항을 찾고 수를 선택하는게 맞을 것 같아요.

예비교사22: 여기는 '규칙찾기'이기 때문에 1×3, 2×3, 3×3,‥으로 일반항은 3n이 옳다고 생각해요.

다섯째항에 15 이외의 수가 올 수 있다고 답한 20명의 예비교사에게 추가로 질문을 던져 다섯째항에 올 수 있는 수가 유한개인지 무한개인지를 물었다. 이 중 7명의 학생은 유한개라고 답하였고, 나머지 11명은 무한개의 수가 올 수 있다고 답하였다. 연구자는 연이어 처음 네 개의 항은 3, 6, 9, 12이지만 다섯째항이 15가 아닌 수열의 일반항을 만들어보도록 요구했고, 그와 관련된 대화의 예시는 다음과 같다.

연구자: 다섯째항에 15 이외의 수가 올 수 있다고 했는데, 그런 수는 유한개 존재할까요? 아니면 무한히 많이 존재할까요?

예비교사13: 여러 개 만들 수는 있겠지만 무한개까지 되지는 않을 것 같아요.

연구자: 그럼 3, 6, 9, 12이고 다섯째항이 15가 아닌 수열의 일반항을 만들어보겠어요? 칠판을 이용해도 되고.

예비교사13: (1분 정도 생각한 후 적는다)

만약에 $a(n)=\begin{cases}3 & n\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)\\ 6 & n\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)\\ 9 & n\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)\\ 12 & n\equiv 0(\mathrm{mod}\,4)\end{cases}$

로 정의하면 처음 네 항은 3, 6, 9, 12이고 이 항들이 계속 반복돼요. 이런 수열을 몇 개는 만들 수 있겠지만.... 무한히 많은 일반항을 만들 수는 없을 것 같아요.

연구자: 자, 15가 아닌 수도 올 수 있다고 했는데, 그런 수는 유한개일까 아님 무한개일까?

예비교사21: 무한개일 것 같아요. 제가 문제지 받고 수열 두 개를 생각해 놓았거든요. 그러니까 이런 식으로 계속 만들어갈 수 있어요.

연구자: 수열의 일반항 생각한거 칠판에 적어보겠어요?

예비교사21: (식을 적으며) 가우스 기호를 써서 $[\frac{n}{5}]+3n$으로 잡으면 처음에는 $[\frac{n}{5}]$이 0이니까 그냥 3, 6, 8, 12가 되잖아요. 그렇지만 5항은 $[\frac{n}{5}]$이 1이 되니까 1+15 해서 16이 되고, 17, 18, 19 이렇게 갈거구요. 이걸 변형해서도 많이 만들 수 있어요. 그리고 또 하나 생각한거는.. 이건 제가 좀 잘 만든거 같은데요. (웃음) 1항과 3항이 3, 9니까 3의 거듭제곱이고, 2항과 4항이 6과 12니까 6의 배수잖아요. 그걸 이용해서 (칠판에 적는다) $a(n)=\begin{cases}3^k\ (n=2k-1,\ k\in N)\\ 6k\ (n=2k,\quad k\in N)\end{cases}$ 으로 하면 5항은 홀수니까 $a(5)=3^3=27$이 되요.

최근 들어 교육계에서 창의성을 강조하고 있기 때문인지 2명의 예비교사들은 이 문항에 대한 답변 과정에서 다소 본질에 벗어난 언급을 하였다.

연구자: 수열의 제5항에 15가 아닌 수가 올 수 있다고 했는데, 그런게 유한개일까 아님 무한히 많을까요?

예비교사 30: 수업에서는 일반성과 예외성을 같이 언급해주어야 해요. 그리고 규칙성에 대해 배우고 있지만 항상 모든 가능성에 대해 열린 사고를 해야 하구요.

연구자: 수열의 제5항이 15가 아닌 수열을 무한히 많이 만들 수 있다고 했는데, 생각한 수열의 일반항이 있으면 이야기 해보겠어요?

예비교사 7: 수학을 배우다 보면 모든 수열이 일반항이 정해진다는 편견을 갖고 있어요. 하지만 불규칙한 수열이 존재할 가능성이 있어서 무한히 많은거에요. 수열은 '어떤 규칙에 따라 늘어놓은 수의 배열'이라고 정의하고 있지만, 수열이 어떤 규칙도 갖지 않을 수 있어요.

초등학교의 '규칙찾기'와 '정비례' 혹은 중학교의 '일차함수' 차원에서는 3, 6, 9, 12 다음에 15가 온다는 단선적인 생각을 할 수 있다. 그러나 고등학교 <수학II>에서 수열은 자연수 전체의 집합을 정의역으로 하고 실수 전체의 집합을 공역으로 하는 함수로 도입하며, 처음 몇 개의 항을 공유하는 상이한 수열이 존재할 수 있기 때문에 일반항이 명시되지 않으면 나머지 항을 제시하기 어렵다는 점을 강조한다. 따라서 상당수의 예비교사들은 고등학교의 수열을 염두에 두고 제5항이 달라질 수 있으며 이러한 수열을 유한개 혹은 무한개 만들 수 있다고 답하였다. 그에 반해 규칙찾기와 정비례의 수준으로 해석한 경우는 다섯째항으로 15만이 가능하다고 답한 것으로 보인다. 즉 이 문항이 어떤 학교급에서 다루어진 것으로 가정했느냐에 따라 다른 답변이 나왔다고 할 수 있다. 한편 예비교사들은 위에 예시한 일반항 이외에도 3, 6, 9, 12 다음에 15가 나오지 않는 수열의 일반항으로 $a(n)=(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)+3n$ 등의 다양한 경우들을 제시했다.

V. 논의 및 제언

본 연구는 예비교사들의 KCS(내용과 학습자에 대한 지식)를 가능한 한 있는 그대로 파악하기 위하여 심층면담이라는 질적 연구 방법을 이용하였다. 심층면담 결과는 양적 연구와 달리 예비교사들의 이해 수준을 수량화하지 않으며, 비교대상을 설정하고 이를 기준으로 높고 낮음을 판정하지 않기 때문에 객관화가 어렵다. 그러나 네 가지 질문에 대한 예비교사들의 답변을 개방적인 상태에서 기술하고 유형화함으로써 연구 문제로 설정한 학습자의 전형적인 오류, 학습자의 내용 이해, 학습자의 발달 계열에 대한 예비교사들의 사고를 파악하고자 하였다. 심층면담 결과 예비교사들은 주어진 문제 상황에 대해 때로는 수학의 측면에서 접근하여 답변하였고 어떤 경우는 교육적 관점에서 의견을 개진하거나 비수학적 이유를 제시하기도 했다.

질문1은 학습자가 피타고라스 정리의 증명에 대해 가질 수 있는 오류에 대한 것으로, 2/3 이상의 예비교사가 증명이 옳지 않다는 점을 인지했다. 그 이유로는 피타고라스 정리와 삼각함수의 성질이 순환논리에 빠져 있다는 점 이외에도 학교수학에서의 도입 순서를 고려하거나 동일 영역의 내용으로 국한해야 한다는 배제의 관점을 제기하기도 했다. 증명에서 이상을 발견하지 못하고 옳다고 답한 예비교사도 7명이었다.

질문2는 효율성을 수치적으로 비교할 때 0이 포함된 경우를 부정확하게 해석하는 오류에 대한 것이다. 효율성을 따질 때 0이 있는 경우를 특별하게 취급할 필요와 관련하여 30명의 예비

<표 V-1> 학교수학에서 직선 관련 내용

학교급 학년	영역	직선 관련 내용
초3	도형	서로 다른 두 점을 잇는 곧은 선을 선분, 그리고 선분을 연장한 것을 직선
중1	함수	$y=ax(a\neq 0)$의 그래프
중1	기하	기본 도형 (점→직선, 면→직선)
중2	문자와 식	미지수가 2개인 일차방정식 $ax+by+c=0$
중2	함수	$y=ax+b\,(a\neq 0)$의 그래프, 기울기

➡

학교급 과목	영역	직선 관련 내용
고등학교 <수학I>	기하	직선의 방정식 $y-y_1=m(x-x_1)$

교사 중 21명은 분수와 곱셈식으로, 혹은 비로 나름의 정당한 수학적 논리로 설명하였고, 7명은 비수학적 이유를 제시하였다.

질문3의 두 가지 직선의 방정식에 대한 학습자의 이해와 관련된 질문으로, 학교수학에서 직선은 초등학교, 중학교, 고등학교에 걸쳐 여러 영역에서 다루어지기 때문에 예비교사들은 다양한 측면에서 답변을 하였다. 직선의 방정식이 본격적으로 출현하는 것은 고등학교이지만 초등학교와 중학교의 여러 영역에서 직간접적으로 다루어진다. 우선 직선의 개념이 최초로 도입되는 것은 초등학교 3학년이다. 도형 영역에서 '선분은 두 점을 곧게 이은 선'이고 '직선은 양쪽으로 끝없이 늘인 곧은 선'으로 도입한다. 초등학교에서 이처럼 직관적으로 다루어진 직선은 중학교 1학년의 함수 영역에서 x의 값이 모든 수일 때, 함수 $y=ax(a\neq 0)$의 그래프는 원점을 지나는 직선으로 설명된다. 이어 중학교 1학년의 기하 영역의 기본 도형에서 직선은 점이 연속적으로 움직여서 만들어지고, 면과 면이 만나서 생기는 선은 교선으로 언급된다. 중학교 2학년의 문자와 식 영역에서는 미지수가 x, y의 2개인 일차방정식의 일반형 $ax+by+c=0$(a, b, c는 상수, $a\neq 0, b\neq 0$)이 도입되는데, 이것이 직선의 방정식임은 명시적으로 설명되지는 않는다. 이어 중학교 2학년의 '함수' 영역에서 1학년보다 심화된 함수의 그래프 $y=ax+b\,(a\neq 0)$가 다루어지고, 기울기의 개념이 정의된다. 이처럼 고등학교 <수학I>에서 직선의 방정식이 정의되기 이전에 학생들은 다층적으로 직선의 개념을 학습하게 된다.

질문4는 수열은 초등학교에서 규칙을 찾아 그 다음 수를 적는 것에서 시작하여 중학교의 정비례를 거쳐 수열의 일반항을 고려하는 고등학교까지 연결되는 주제이기 때문에 학습자의 발달계열과 관련될 수 있는 내용이다. 질문에서는 수열의 처음 네 개의 항이 주어지고 그 다음 항을 예측하는 문제로, 15로 정해진다고 답한 예비교사가 1/3이었다. 그러나 이 중 일부는 규칙찾기라는 제한된 맥락을 고려했기 때문이라고 이유를 말해, 수학적 판단이 아닌 교육적 판단을 한 경우도 있었다. 다섯째항이 15가 아닐 가능성을 인지하고 있는 경우 무한개의 일반항을 만들어 낼 수 있다고 이해하는 경우가 많지만 유한개라고 답한 예비교사도 7명이다.

위와 같은 예비교사들의 답변으로부터 다음

두 가지의 특징을 추출할 수 있다. 첫째 예비교사들은 설문에 대한 응답에서 수학적 관점 혹은 교육적 관점을 갈등적으로 적용하고 있다. 질문4에서 다섯째항이 15라고 답한 경우와 15 이외의 수가 올 수 있다는 답변을 인위적으로 구분하기는 하였지만, 상당수의 예비교사는 도입 부분에서는 15가 적절하다고 보면서도 수열의 일반항에 주목한다면 다섯째항을 일의적으로 정하기 어려울 뿐 아니라 여기에 올 수 있는 값이 무수히 많다는 의견도 제기하였다. 전자는 교육적 관점이고 후자는 수학적 맥락에 비교적 충실한 답변이다. 실제 교과서의 내용 전개나 교사의 수업에서도 수학적 관점과 교육적 관점의 긴장 관계는 발견된다. 수학적 논리를 따라 엄밀하게 설명할 것인지, 학습자의 인지 수준을 고려하여 직관적으로 다루는 교육적 배려를 우선시 할 것인지는 수학교육의 원천적인 화두가 되고 있고 이는 예비교사들의 답변에서도 나타난다.

둘째는 질문3의 '직선'과 같이 여러 영역에서 다면적으로 다루어지는 수학 개념에 대한 해석의 문제이다. 예비교사들로부터 여러 해석이 제기되기는 했지만, 각각의 교사로 국한한다면 다양한 관점에서 직선의 방정식을 바라보고 있지는 못한 경향을 발견할 수 있다. 따라서 학교수학을 구성하고 있는 개념 중 여러 학교급과 학년 그리고 여러 영역에서 중층적으로 도입되는 경우에 대해서는 교사양성 과정에서 각 주제들이 학교급과 학년을 관통하여 어떻게 다루어지는지 종적으로 조망할 필요가 있다. 예를 들어 포물선은 중학교 3학년의 함수 영역에서 이차함수의 그래프로 설명되지만, 고등학교의 <기하와 벡터>에서는 이차곡선의 한 종류로 기학적으로 정의된다. 또한 초등학교 3~4학년군의 '밀기'는 중학교 2학년 함수 영역의 '평행이동'으로 이어지고, 이러한 평행이동은 고등학교 1학년의 도형의 방정식에서 초등학교의 '뒤집기'를 이어받은 '대칭이동'과 함께 해석기하적으로 다루어진다. 초등학교, 중학교, 고등학교 교사는 자신의 학교급으로 수학 내용의 한계를 짓지 말고 학생들의 과거와 미래의 학습 내용을 동시적으로 파악할 수 있도록 교사양성과정에서 적극적으로 다루어지는 것이 필요할 것이다.

참고문헌

곽영순(2007). **교육과정 개정에 따른 과학과 내용교수지식(PCK) 연구**. 한국교육과정평가원. RRI 2007-3-3.

도종훈(2008). 직선의 대수적 표현과 직선성(直線性)으로서의 기울기. **수학교육 논문집, 22**(3), 337-347.

박경미(2009). 수학의 교수학적 내용 지식(PCK)에 대한 연구의 메타적 검토. **수학교육, 48**(1). 97-109.

박선영, 강완(2012). 평면도형의 넓이 지도에 대한 교사의 PCK 분석. **수학교육학연구, 22**(4). 295-515

양미경(2009). '내용교수 지식(pedagogical content knowledge)'에 대한 선행연구의 한계 및 과제. **교육원리연구, 14**(2). 45-64.

이연숙(2006). **교수학적 내용지식(PCK) 및 그 표상(PCKr)의 개념적 정의와 분석도구 개발: 예비 과학교사의 '힘과 에너지' 수업 사례를 중심으로**. 서울대학교 대학원 교육학 석사학위 논문.

이용숙, 김영천(1999). **교육에서의 질적 연구**. 서울: 교육과학사.

임미인, 장혜원(2015). 수÷0에 대한 초등교사의 PCK 분석. **수학교육학연구, 25**(4). 657-673.

전미현, 김구연(2015). 예비교사들의 수학교수지식(MKT) 측정 및 분석 연구. **수학교육학연

구, 25(4). 691-715.

조희형, 고영자(2008). 과학교사 교수내용지식(PCK)의 재구성과 적용 방법, **한국과학교육학회지, 28**(6), 618-632.

최승현(2007). **교육과정 개정에 따른 수학과 내용 교수 지식(PCK) 연구**. 한국교육과정평가원. RRI 2007-3-2.

최승현, 황혜정(2008). 수학과 내용 교수 지식(PCK)의 의미 및 분석틀 개발에 관한 연구. **한국학교수학회논문집, 11**(4), 569-593.

Buchholtz, N., Leung, F. K. S., Ding, L., Kaiser, G., Park, K., and Schwarz, B. (2013). Future mathematics teachers' professional knowledge of elementary mathematics from an advanced standpoint. *ZDM, 45*. 103-120.

Cochran, K. F., DeRuiter, J., King, R. (1993). Pedagogical content knowing-an integrative model for teacher preparation. *Journal of Teacher Education, 44*(4), 263-272.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Klein, F. (1932). *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis* (Vol. 1, 3rd ed., E. R. Hedrick & C. A. Noble, trans). New York: Macmillan.

Schmidt, W. H., Tatto, M. T., Bankow, T. K., Blomeke, S., Cedillo, T., Cogan, L., Han, S. I., Houang, R., Hsieh, F. J., Paine, L., Santillan, M., Schwille, J. (2007). *The Preparation Gap: Teacher Education for Middle School Mathematics in Six Countries*. MSU Center for Research in Mathematics and Science Education.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

An Investigation into the Pre-Service Mathematics Teachers' Knowledge of Content and Students

Park, Kyungmee (Hongik University)

PCK(pedagogical content knowledge) has been frequently discussed in the field of subject matter education as well as education in general. Considering the fact that PCK characterizes teacher professionalism, and the distinction of mathematics education from neighboring disciplines, PCK is one of the core concepts in the discourse of mathematics education. This study focused on KCS(knowledge of content and students) among the areas of PCK. The purpose of this study to investigate the KCS of pre-service teachers attending a private university located in Seoul. An in-depth interview with 30 pre-service teachers was conducted in a semi-structured manner, using four questions dealing with common student errors, students' understanding of content, and student developmental sequences. The pre-service teachers gave mathematical answers while in others they gave priority to pedagogical considerations. The implication drawn from the interview data is that the teacher training program should fully reflect the complexity of mathematical concepts which appeared in school mathematics over several grade levels and content areas.

* Key Words : Pedagogical Content Knowledge(교수학적 내용 지식), Knowledge of Content and Students(내용과 학습자에 대한 지식). Pre-service Mathematics Teachers(예비수학교사)

논문접수 : 2016. 4. 11
논문수정 : 2016. 4. 26
심사완료 : 2016. 4. 26