

## A numerical study of adjusted parameter estimation in normal inverse Gaussian distribution

Jeongyoen Yoon<sup>a</sup> · Seongjoo Song<sup>a,1</sup>

<sup>a</sup>Department of Statistics, Korea University

(Received April 11, 2016; Revised May 16, 2016; Accepted May 17, 2016)

---

### Abstract

Numerous studies have shown that normal inverse Gaussian (NIG) distribution adequately fits the empirical return distribution of financial securities. The estimation of parameters can also be done relatively easily, which makes the NIG distribution more useful in financial markets. The maximum likelihood estimation and the method of moments estimation are easy to implement; however, we may encounter a problem in practice when a relationship among the moments is violated. In this paper, we investigate this problem in the parameter estimation and try to find a simple solution through simulations. We examine the effect of our adjusted estimation method with real data: daily log returns of KOSPI, S&P500, FTSE and HANG SENG. We also checked the performance of our method by computing the value at risk of daily log return data. The results show that our method improves the stability of parameter estimation, while it retains a comparable performance in goodness-of-fit.

Keywords: normal inverse Gaussian distribution, feasible domain, parameter estimation, Value at Risk

---

### 1. 서론

금융파생상품은 그 수익함수가 기초자산의 가격에 의존하므로 기초자산의 가격변동에 따라 가격이 달라진다. 그렇기 때문에 가격을 결정함에 있어서 기초자산의 확률적 모형을 결정하는 일은 매우 중요하다. 기하 브라운 운동은 이러한 확률적 모형 중에서 가장 널리 사용되어온 모형으로 기초자산의 가격이 로그정규분포를 따른다고 가정한다. 이를 기초로 하여 1973년 Black과 Scholes는 블랙-숄즈 옵션가격 결정 모형을 제안하였고 (Black과 Scholes, 1973) 이후 오랜 기간 동안 금융시장에서 벤치마킹되고 있다. 하지만 주가의 로그수익률의 분포가 정규분포에 비해 큰 첨도를 갖는다는 것은 이미 많은 연구를 통해서 알려져 있다 (Clark, 1973; Fielitz와 Smith, 1972; Mandelbrot, 1963; 등). 이러한 특성을 보완한 대안적인 모형 연구로는 1976년 Merton이 제안한 점프확산모형 (Merton, 1976), 1976년 Cox와 Ross가 제안한 상수탄성 변동성모형 (Cox와 Ross, 1976)과 1987년 Hull과 White에 의해 연구된 확률변동성모형 (Hull과 White, 1987) 등이 있다. 또한 1990년대 후반에는 점프확산모형을 포함하

---

This research was supported by the Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (NRF-2013 R1A1A3012819).

<sup>1</sup>Corresponding author: Department of Statistics, Korea University, 145 Anam-ro, Seongbuk-Gu, Seoul 02841, Korea. E-mail: [sjsong@korea.ac.kr](mailto:sjsong@korea.ac.kr)

는 더 일반화된 레비확률과정이 연구되기 시작하였다. 이는 블랙-숄즈 모형에서 이용되는 기하브라운 운동보다 좀 더 유동적인 과정으로 자료의 초과침도와 왜도 등을 반영할 수 있고 그 예로 generalized hyperbolic(GH) (Barndorff-Nielsen, 1977), variance Gamma(VG) (Madan과 Seneta, 1990), normal inverse Gaussian(NIG) (Barndorff-Nielsen, 1997), CGMY (Carr 등, 2002) 등이 있다. 레비확률과정이 블랙-숄즈 모형보다 실제 주식시장의 특성을 잘 반영한다는 사실은 여러 연구를 통해 밝혀져 있다. Prause (1997)는 독일과 미국의 개별 주가지수를 hyperbolic모형과 NIG모형에 적합하고 적합도 검증 및 Value at Risk(VaR)를 측정하여 hyperbolic모형과 NIG모형이 주가 자료를 잘 설명함을 보였다. Geman (2002)은 CGMY분포가 정규분포보다 SPX지수의 로그 수익률 분포를 더 잘 설명함을 보였으며, Eriksson 등 (2009)은 NIG분포를 이용한 옵션가격결정을 연구하였고 S&P500지수를 이용하여 실증 분석을 하였다.

레비확률과정을 이용하여 기초자산의 움직임을 모형화하는 경우 흔히 최대 가능도 추정량(MLE)과 적률 추정량(MME)으로 모수를 추정하게 되는데, 특히 MME는 비교적 간단한 계산으로 추정이 가능하다. 최근에는 적률을 이용한 대안적인 모수 추정 방법 및 각 모형의 MME가 정의될 수 있는 공간에 관한 연구도 진행되었다. Figueroa-López 등 (2011)은 고빈도 자료에서 NIG분포에 대한 적률에 바탕을 둔 새로운 모수 추정법을 제안하고 미국의 고빈도 개별주가지수를 이용하여 몇 가지 모수 추정방법을 비교하였고, Ghysels와 Wang (2014)은 NIG분포와 VG분포, 그리고 generalized skewed  $t$  분포에서의 모수추정 방법을 살펴보고 모수가 정의될 수 있는 공간을 적률로 표현하였다.

본 논문에서는, 표본적률들이 Ghysels와 Wang (2014)에서 연구된 모수정의 가능공간에 존재하지 않거나 경계에 가까이 있는 경우 모수 추정에 문제가 발생하는 것을 확인하고 NIG분포의 모수 추정방법을 살펴보고자 한다. 몇 가지 주가지수 자료를 NIG분포에 적합해보고, 모의실험을 통해 모수 추정법을 수치 해석적으로 보정하여 보정방법이 모형에 미치는 영향을 모수의 안정성 측면에서 살펴볼 것이다. 또, VaR를 이용한 사후검증을 통해 NIG모형의 모수 추정 방법에 따른 보정의 효과를 비교해보고자 한다.

## 2. Normal Inverse Gaussian 모형

Barndorff-Nielsen (1997)에 의해 소개된 NIG모형은 경험적 분포의 꼬리가 두터운 자료를 잘 모사할 수 있으며, 그 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f_{NIG}(x) = \alpha\delta \frac{e^{\delta\gamma + \beta(x-\mu)}}{\pi\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}} K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

여기서  $K_1$ 은 index가 1인 제 3종의 Bessel함수이고,  $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ 을  $\gamma$ 라 놓기로 한다.  $\mu$ 는 위치모수이며  $\delta$ 는 척도모수이고,  $\alpha$ 와  $\beta$ 는 형태모수이다. 또한  $\alpha$ 와  $\delta$ 는 양수이며  $\beta$ 는  $-\alpha$ 와  $\alpha$ 사이의 값을 갖는다. NIG과정은 Inverse Gaussian(IG) 확률과정으로 시간변환된 브라운 운동으로 표현할 수도 있는데, 모수  $a > 0$ 와  $b > 0$ 를 갖는 IG( $a, b$ )의 확률밀도함수는

$$f_{IG}(x) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \exp(ab)x^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(a^2x^{-1} + b^2x)\right), \quad x > 0$$

로 표현된다.  $a = 1$ ,  $b = \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ 인 IG 확률과정으로 브라운 운동  $W$ 를 다음과 같이 시간변환하면,

$$X_t = \beta\delta^2 I_t + \delta W_{I_t},$$

$X$ 는 모수  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\mu = 0$ 을 갖는 NIG 확률과정을 따르게 되며, 여기에 위치모수  $\mu$ 를 추가하면 식 (2.1)의 모형을 얻는다.

**Table 3.1.** Summary statistics of daily log returns for KOSPI, S&P500, FTSE and HANG SENG

	KOSPI	S&P500	FTSE	HANG SENG
Mean	0.0003928	0.0001369	0.0000328	0.0001701
Standard deviation	0.0149	0.0126	0.0121	0.0148
Skewness	-0.5187	-0.1988	-0.1575	-0.0061
Excess kurtosis	6.1761	8.7912	6.9078	9.0775
Max	0.1128	0.1096	0.0938	0.1341
Min	-0.1281	-0.0947	-0.0926	-0.1358

NIG모형의 모수는 흔히 최대가능도 추정량(maximum likelihood estimate; MLE)과 적률 추정량(moment method estimator; MME)으로 추정하는데, 확률밀도함수가 알려져 있으므로 MLE는 수치적으로 쉽게 얻을 수 있다. MME는 평균과 분산, 왜도, 초과첨도(excess kurtosis)를 이용하여 정리한 모수의 식 (2.2)에 표본값들을 각각 대입하여 얻으면 된다. 여기서 초과첨도는 첨도에서 정규분포의 첨도인 3을 뺀 값이고, 초과첨도를  $K$ , 왜도를  $S$ , 분산을  $V$ , 그리고 평균을  $M$ 으로 표기하였다.

$$\gamma = \frac{3}{\sqrt{V(3K - 5S^2)}}, \quad \alpha = \sqrt{\gamma^2 + \beta^2}, \quad \beta = \frac{S\sqrt{V}\gamma^2}{3}, \quad \delta = \frac{V\gamma^3}{\beta^2 + \gamma^2}, \quad \mu = M - \frac{\beta\delta}{\gamma}. \quad (2.2)$$

이제 Ghysels와 Wang (2014)에서와 같이

$$D_{NIG} = \{(K, S^2) : 3K > 5S^2\}$$

을 NIG분포의 정의 가능공간(feasible domain)으로 정의하기로 한다. 식 (2.1)에서 본 바와 같이  $\alpha > 0, \delta > 0, -\alpha < \beta < \alpha$ 가 되면  $3K - 5S^2$ 는 항상 양의 값을 갖게 되지만 실제 데이터에서는 시장의 상황에 따라 정의 가능공간내에 존재하지 않는 경우가 생길 수 있다. 표본왜도와 표본 초과첨도가  $D_{NIG}$ 에 포함되지 않으면 MLE와 MME로 모수의 추정이 불가능하고, 표본 통계량을 사용한  $3K - 5S^2$ 의 값이 0에 근접한 경우에는 두 방법 모두에서 모수의 추정치가 매우 큰 값이 되며 특히  $\alpha$ 와 절댓값  $\beta$ 의 추정값이 매우 커진다. 일반적으로 주가의 로그수익률은 초과첨도가 크고 표본왜도는 0과 많이 다르지 않기 때문에 모수 추정에서 문제가 발생하지 않지만, 때에 따라 로그 수익률의 표본 초과첨도가 크지 않는 경우가 발생할 수 있으며 특히, 안정시장에서 수익률의 분포가 정규분포와 비슷해질 때는 추정 값이 수렴하지 않거나 매우 큰 값으로 추정되게 된다.

### 3. 실증분석

#### 3.1. 자료의 구성

본 연구에서는 2001년 1월부터 2015년 5월까지의 KOSPI, S&P500, FTSE, HANG SENG 지수의 일별 로그 수익률을 이용하여 실증분석을 진행하였다. FTSE는 영국을 비롯한 유럽에서 사용되는 글로벌 주가지수이며 HANG SENG는 홍콩 주가지수이다. 각 지수의 일별 로그수익률의 기초 통계량은 Table 3.1과 같고 Figure 3.1은 일별 로그수익률의 경험적 분포이다. 이를 통해서 실증분석에 사용하는 모든 지수의 로그 수익률이 정규분포에 비해 꼬리가 두텁고 치우친 분포임이 확인된다.

Table 3.2는 각 지수의 일별 로그수익률로 추정한 NIG분포의 모수이다. 하나의 표본에서 계산된 값이긴 하지만 KOSPI는 MLE와 MME 값이 비슷하고 다른 지수의 경우에는 방법별로 모수 추정값에 약간의 차이가 있다. 이에 각 방법 별로 추정한 모수를 이용하여 가능도를 비교하였고 MLE로 계산한 가능도가 MME의 경우보다 크지만 차이가 크지 않음을 확인하였다.

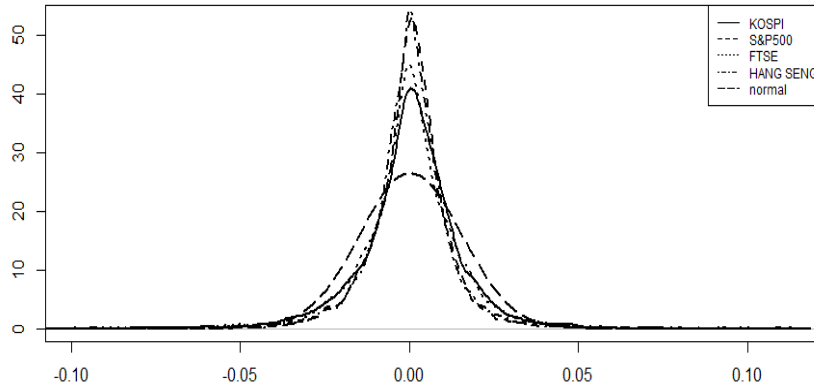


Figure 3.1. Empirical distribution of daily log returns for KOSPI, S&P500, FTSE and HANG SENG.

Table 3.2. Estimated parameters and log likelihood for KOSPI, S&P500, FTSE and HANG SENG

Index	Method	$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\mu$	Log likelihood
KOSPI	MLE	49.6684	-6.3323	0.0109	0.0018	10274.59
	MME	48.6216	-6.0371	0.0107	0.0017	10274.34
S&P500	MLE	50.1853	-6.1679	0.0078	0.0011	11218.61
	MME	46.4398	-1.8037	0.0074	0.0004	11211.32
FTSE	MLE	55.3589	-4.7324	0.0081	0.0007	11674.25
	MME	54.4665	-1.8891	0.0081	0.0003	11672.15
HANG SENG	MLE	46.4754	-2.6826	0.0102	0.0007	10437.27
	MME	38.3717	-0.0451	0.0086	0.0002	10424.48

MLE = maximum likelihood estimate, MME = moment method estimator.

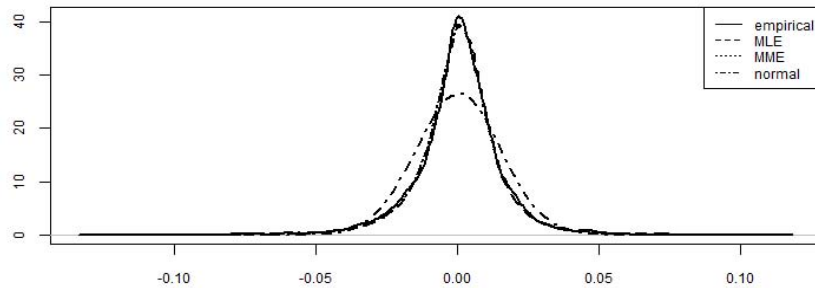


Figure 3.2. Comparison of the graphs in KOSPI; the fitted NIG distribution, Normal distribution and Empirical distribution (NIG = normal inverse Gaussian, MLE = maximum likelihood estimate, MME = moment method estimator).

Figure 3.2에서 KOSPI 일별 로그수익률의 경험적 분포와 MLE와 MME로 적합한 NIG분포 및 정규 분포를 비교하였다. KOSPI 일별 로그수익률의 경험적 분포는 정규분포보다 높고 뾰족하며 NIG분포가 이러한 자료의 특성을 잘 반영하고 있다. S&P500, FTSE, HANG SENG의 일별 로그수익률 분포도 비슷한 결과를 보여 그림을 추가하지 않았다.

적합의 정도를 확인하기 위해서 각 지수별로 Kolmogorov-Smirnov(KS)검정과 Anderson-Darling (AD)검정을 실시해보았다. Table 3.3에서 각 지수의 KS, AD 검정 통계량 값과 괄호 안에  $p$ -value를

**Table 3.3.** Test statistics of Kolmogorov-Smirnov test and Anderson-Darling test (*p*-value in parentheses)

Index	Kolmogorov-Smirnov test		Anderson-Darling test	
	MLE	MME	MLE	MME
KOSPI	0.0142 (0.6635)	0.0145 (0.6405)	-0.7253 (0.7994)	-0.6391 (0.7322)
S&P500	0.0142 (0.6513)	0.0203 (0.2243)	-0.6044 (0.7056)	1.1262 (0.1102)
FTSE	0.0181 (0.3352)	0.0226 (0.1243)	-0.6812 (0.7649)	-0.1681 (0.4315)
HANG SENG	0.0187 (0.3118)	0.0259 (0.0569)	1.2625 (0.2447)	2.4292 (0.0541)

MLE = maximum likelihood estimate, MME = moment method estimator.

제시하였다. 유의수준 0.05에서 귀무가설을 기각할 수 없으므로 모든 지수에 대해 일별 로그수익률이 NIG분포를 따르지 않는다는 증거가 없음을 확인할 수 있다.

**3.2. 모수 추정의 보완 방법**

2절에서 언급한 모수 추정의 문제점을 실증분석을 통해 살펴보았다. 2001년 1월부터 2015년 5월까지의 자료를 이용할 때, 각 지수의 총 거래일은 KOSPI 3568일, S&P500 3623일, FTSE는 3747일, HANG SENG은 3599일이다. 각 지수별로 250거래일 간격으로 1일씩 옮겨가며 모수를 추정하였는데 매번 추정에 250개의 자료를 이용하여 KOSPI는 3319번, S&P500은 3374번, FTSE는 3498번, 그리고 HANG SENG은 3350번의 추정이 이루어졌다. 여기서 표본왜도와 초과침도가  $D_{NIG}$ 에 속하지 않아 MLE와 MME가 추정되지 못한 경우가 KOSPI는 114번, S&P500가 495번, FTSE는 26번, 그리고 HANG SENG은 138번 관측되었다. 또한 표본왜도와 초과침도가  $D_{NIG}$ 의 경계에 근접할 경우(즉, 표본통계량의 값을 사용한  $3K - 5S^2$ 이 0에 가까운 경우), 모든 모수의 MLE와 MME가 절대값이 크게 추정되는 경향을 보였고 특히  $\alpha$ 와 절대값  $\beta$ 가 매우 큰 값으로 추정되어 모수의 안정성 측면에서 문제가 발생하였다. Figure 3.3은 KOSPI 일별 로그수익률로 추정한 모수의 분포이다. 드물게 극단적인 모수가 추정되어 모수의 안정성 측면에서 문제가 제기됨을 확인할 수 있다. S&P500, FTSE, HANG SENG에서도 같은 문제가 관측되었으며 그림은 생략하였다.

이를 보완하기 위해 표본왜도와 표본 초과침도가  $D_{NIG}$ 에 속하지 않거나 경계에 가까운 경우  $3K - 5S^2$ 을 보다 큰 값으로 대체하는 방법을 고려하고, 어떤 값으로 대체해야 할지를 결정하기 위해 모의 실험을 하였다. 각 표본의 90%이상의 구간에서  $3K - 5S^2$ 의 표본값이 1이상이었고 이 때는 안정적인 모수추정이 가능하였기에, 보정 값의 범위를 0과 1사이로 제한하여 살펴보았다. 250거래일 단위의 KOSPI 일별 로그수익률에서 계산된  $3K - 5S^2$ 의 표본값 중에서 가장 작은 경우를 골라 그 때의 모수추정치를 참 값으로 설정하고, 그 값을 갖는 NIG분포에서 1,000개의 자료를 생성하여 MLE를 추정하였다. 사용된 모수는 평균이 0.0006, 분산이 0.0001, 초과침도가 0.023, 왜도가 0.116이고 따라서  $3K - 5S^2$ 의 참값이 0.00172이었다. 이 과정을 1,000번 반복하여 1,000개의 MLE를 구하고 그 분포를 살펴보았다. 그리고 각 표본에서  $3K - 5S^2$ 의 표본값이  $\epsilon$ 보다 작으면 MLE의 경우 우도함수에서  $3K - 5S^2$ 의 값을  $\epsilon$ 으로, MME의 경우 식 (2.2)의  $3K - 5S^2$ 의 값을  $\epsilon$ 으로 대체하여 모수를 추정하였고 이를  $\epsilon$ 에 변화를 주면서 반복하였다. 이 때,  $\epsilon$ 이 0.2보다 작은 경우에는 모수의 안정성 측면에서 개선되는 점이 없었기에  $\epsilon$ 은 0.2부터 1까지 0.1씩 증가시켰고 추정량의 평균제곱근오차(RMSE)를 각 모수별로  $\epsilon$ 값에 따라 비교한 결과는 Figure 3.4와 같다. Figure 3.4에서  $\alpha$ 는 0.5까지 감소하다가 0.6에서

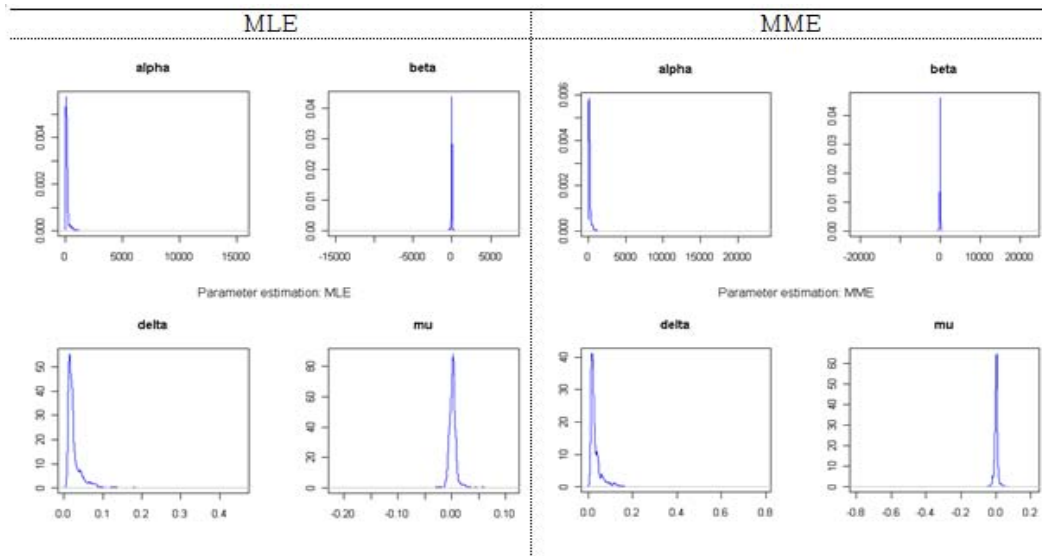


Figure 3.3. Empirical distributions of estimated parameters in case of KOSPI (MLE = maximum likelihood estimate, MME = moment method estimator).

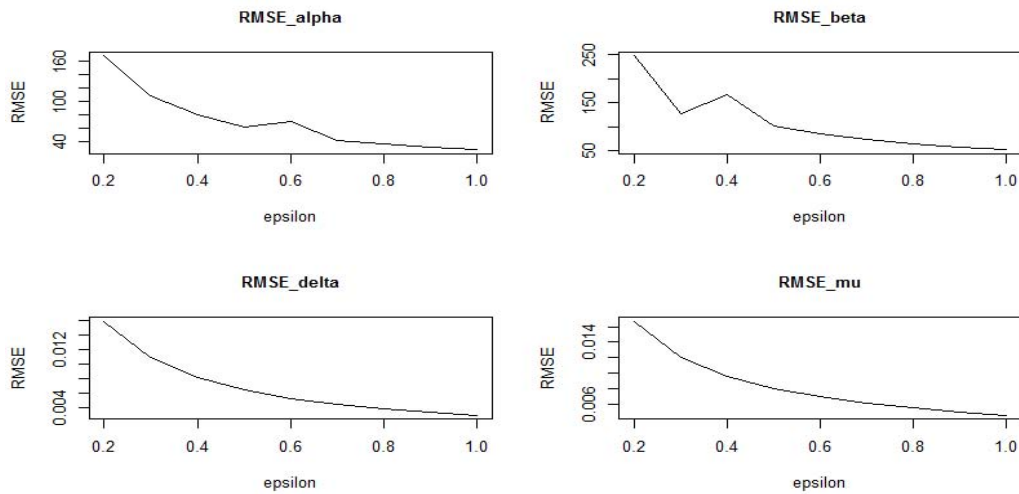


Figure 3.4. Root Mean Square Errors (RMSE) of parameters with values of  $\epsilon$  from 0.2 to 1 by 0.1.

다시 증가하는 형태를 보이고  $\beta$ 는 0.3에서 큰 폭으로 작아졌지만 0.4에서 다시 커지고 0.5에서 다시 작아지므로  $\epsilon$ 을 0.5로 하기로 하였다.  $\delta$ 와  $\mu$ 는 지속적으로 감소하지만 그 변화가 크지 않았다. 이러한 추정 방식을 아래에서  $\epsilon$ -MLE(또는  $\epsilon$ -MME)라고 부르기로 하겠다.

표본의 왜도와 초과첨도의 관계식  $3K - 5S^2$ 의 값이 작은 경우와 큰 경우로 나누어 모의실험을 통해 모수추정 보정방법의 성능을 비교해보았다.  $\epsilon$ 을 0.5로 고정한 후, 첫 번째 시나리오에서는 초과첨도를 0.053, 왜도를 0.116으로 하여  $3K - 5S^2$ 을 0.0917로 설정하고 두 번째 시나리오에서는 초과첨도를

**Table 3.4.** Means, standard deviations and coefficient of variations of estimated parameters for scenario 1 ( $3K - 5S^2 = 0.0917$ ) and scenario 2 ( $3K - 5S^2 = 6.0917$ )

	Scenario 1				Scenario 2			
	$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\mu$	$\alpha$	$\beta$	$\delta$	$\mu$
MLE	8974.21	8465.372	0.0576	-0.0189	133.57	6.564	0.013	-0.00003
	(176159.8)	(176135.7)	(0.0325)	(0.0357)	(27.841)	(11.131)	(0.002)	(0.001)
	[1962.956]	[2080.662]	[56.592]	[188.312]	[21.593]	[169.561]	[17.735]	[2830.9]
MME	10118.51	9609.66	0.0575	-0.0189	133.74	6.564	0.013	-0.00005
	(201098.1)	(201074.2)	(0.0326)	(0.0357)	(27.886)	(11.538)	(0.002)	(0.001)
	[1987.429]	[2092.418]	[56.6017]	[188.309]	[20.851]	[173.3]	[18.488]	[2372.13]
$\varepsilon$ -MLE	418.213	64.2934	0.0396	-0.0055	134.83	7.151	0.013	-0.00008
	(40.318)	(44.987)	(0.0039)	(0.004)	(29.394)	(11.485)	(0.002)	(0.001)
	[9.641]	[69.971]	[9.912]	[74.078]	[21.8]	[160.61]	[17.511]	[1239.4]
$\varepsilon$ -MME	418.338	64.313	0.0396	-0.0055	134.91	7.164	0.013	-0.00008
	(40.318)	(44.998)	(0.0039)	(0.004)	(28.539)	(11.897)	(0.002)	(0.001)
	[9.634]	[69.968]	[9.917]	[74.076]	[21.155]	[166.072]	[18.274]	[1336.2]
True values	1060.756	379.4156	0.08638	-0.03248	121.6831	5.7126	0.01212	0.00003

MLE = maximum likelihood estimate, MME = moment method estimator.

2.053, 왜도는 0.116으로 하여  $3K - 5S^2$ 을 6.0917로 설정하였다. 두 시나리오에 대한 모의실험의 결과는 Table 3.4에 주어져 있으며 주어진 값들은 시나리오별로 1000번 반복 추정된 MLE와 MME의 평균이고 괄호 안은 표준편차, 대괄호 안은 변동계수이다. 시나리오 1에서  $\varepsilon$ -MLE와  $\varepsilon$ -MME의 표준편차가 눈에 띄게 작아지고 변동계수가 크게 작아졌다. 특히  $\alpha$ 와  $\beta$ 에서 그 변화가 뚜렷하다. 이에 반해 시나리오 2에서는 보정 과정에 관계없이 비슷한 결과를 보이고 있다. 참고로, 보정 전의 MLE와 MME의 경우 추정이 불가능한 경로는 빼고 얻은 결과이다.

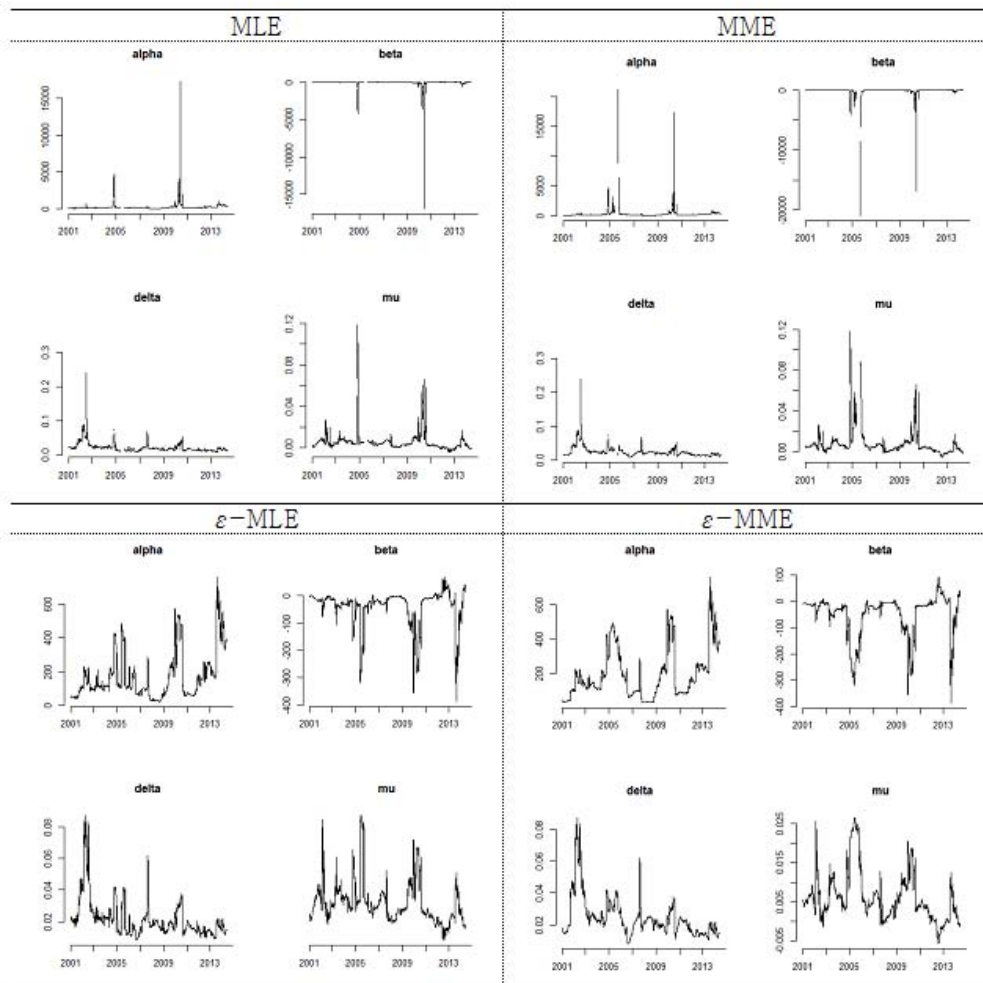
**3.3. 실제 자료를 이용한 모수의 안정성 검토**

각 지수별로 일별 로그수익률 자료를 250거래일 기준으로 하여  $\varepsilon$ -MLE와  $\varepsilon$ -MME를 반복적으로 추정해 보았다. Figure 3.5는 KOSPI를 이용하여 추정된 결과이다. 보정을 하지 않은 MLE와 MME는 구간에 따라서 극단적인 값이 추정되고, 특히 MME의 경우는  $3K - 5S^2$ 의 표본값이 음수가 되면 추정이 불가능하여 그래프가 끊어진 모습을 보인다. MLE의 경우에도 추정이 불가능하지만 그래프에서 눈에 띄게 나타나고 있지는 않다. 반면  $\varepsilon$ -MLE와  $\varepsilon$ -MME의 경우에는 추정된 모수 값의 범위( $y$ 축)가 많이 줄어드는 것을 볼 수 있고 추정이 불가능했던 부분을 포함한 모든 구간에서 모수 추정이 가능하였다. S&P500, FTSE, HANG SENG의 경우에도 비슷한 현상을 보이며 그림은 생략하였다.

각 방법으로 추정된 모수를 이용하여 Barndorff-Nielsen 등 (1985)이 제시한 Hyperbolic Shape Triangle을 그려보았다. Hyperbolic Shape Triangle은 NIG분포의 모수  $\alpha, \beta, \delta$ 를 아래와 같이 정의되는  $\zeta$ 와  $\chi$ 로 변환하여 대안적인 왜도와 첨도로 표현한다.

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}}, \quad \chi = \zeta \frac{\beta}{\alpha}.$$

이 때,  $\alpha$ 와  $\beta$ 의 관계에 의해  $\zeta$ 와  $\chi$ 가  $0 \leq |\chi| < \zeta < 1$ 의 조건으로 제한되는데  $\zeta$ 와  $\chi$ 의 조건을 도식화한 삼각형 안에 모든 모수가 존재하게 된다.  $\zeta$ 가 1에 가까워질수록 두터운 꼬리를 갖는 분포이고  $\zeta$ 가 0에 가까워질수록 정규분포의 형태가 된다.  $\chi$ 가 0이 되면 대칭인 분포를 갖는다.



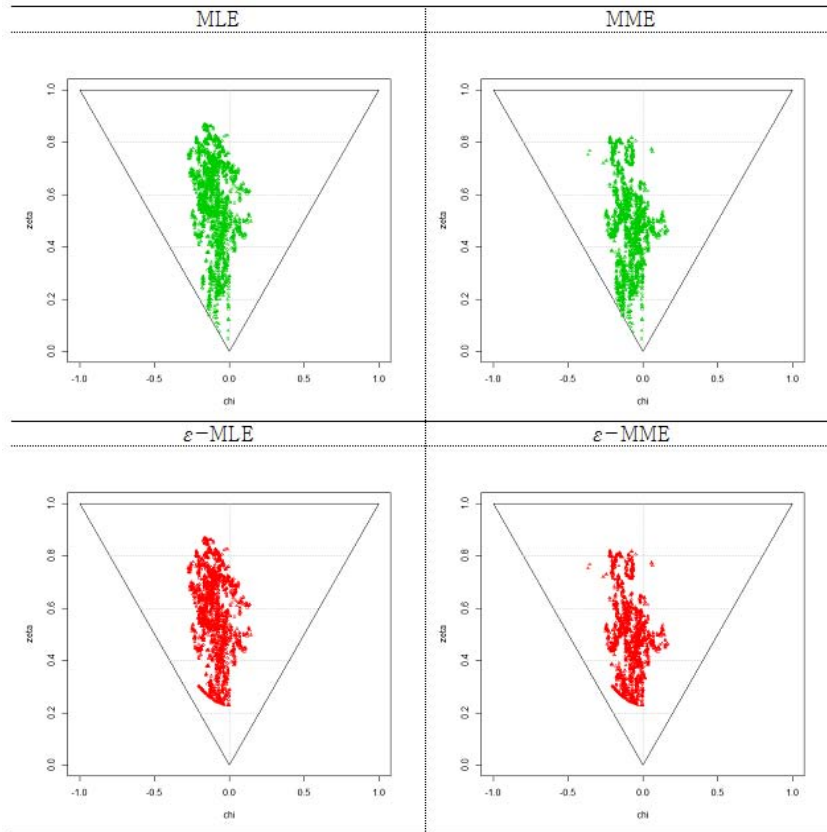
**Figure 3.5.** MLE, MME,  $\varepsilon$ -MLE, and  $\varepsilon$ -MME with KOSPI daily log returns from January 2001 to May 2015 (MLE = maximum likelihood estimate, MME = moment method estimator).

Figure 3.6은 KOSPI 일별로그수익률을 이용하여 추정된 모수를 변환하여 그린 Hyperbolic Shape Triangle이다.  $\varepsilon$ -MLE and  $\varepsilon$ -MME를 이용해 변환한 대안적 초과점도와 왜도가 Triangle의 안쪽에 보다 안정적으로 위치한다. 다른 지수의 Hyperbolic Shape Triangle에서의 변화도 비슷함을 확인하였고 그림은 생략하였다.

### 3.4. VaR 및 사후 검증

VaR는 정상적인 시장에서 주어진 신뢰수준으로 목표기간 동안에 발생할 수 있는 최대손실금액으로 정의된다. Kim과 Song (2011)에서는 NIG분포와 VG분포를 이용하여 실제자료에 대해 다양한 방법으로 추정된 VaR를 비교하고 NIG분포를 이용한 VaR의 성능이 우수함을 보였다. 이에 본 연구에서는 VaR를 측정하여 모수추정의 보정방법이 VaR의 계산에 미치는 영향을 알아보려고 하였다. 비교를 위해





**Figure 3.6.** Estimated values of MLE, MME,  $\epsilon$ -MLE and  $\epsilon$ -MME in Hyperbolic Shape Triangle; KOSPI (MLE = maximum likelihood estimate, MME = moment method estimator).

지수 단순이동 평균법(exponential weighted moving average method; EWMA)을 이용한 VaR도 함께 계산하였다. EWMA는 VaR를 추정하기 위한 변동성을 측정할 때, 상대적으로 최근 자료에 지수적으로 높은 가중치를 주는 방법으로, 다음과 같이 표현된다.

$$\sigma_t^2 = \lambda\sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda)r_t^2,$$

여기서  $\sigma_{t-1}^2$ 은 전기에 추정된 수익률 분포의 분산이며  $r_t^2$ 는 최근 수익률의 제곱이고  $\lambda$ 는 Riskmetrics에서 제안하는 0.94로 사용하였다. EWMA는 최초 250거래일의 수익률 분포의 변동성을 초기값으로 하여 순차적으로 계산된 변동성을 이용해 정규분포의 백분위수로 VaR를 구하고, NIG분포에서는 250거래일 단위로 추정된 모수를 이용하여 적합된 NIG분포의 백분위수로 VaR를 결정한다. 실증분석에서는 KOSPI는 3318번, S&P500은 3373번, FTSE는 3497번, 그리고 HANG SENG은 3349번의 95% VaR를 계산하였다. 이렇게 측정된 VaR에 대해 쿠퍼액 검증으로 사후검증을 하였는데 (Kupiec, 1995), 그 결과는 Table 3.5와 같다. 여기서 기각은 관측되는 손실이 VaR보다 커지는 것을 의미하고, 이론적인 기각횟수는 전체 거래일의 5%로 계산되며 KOSPI의 경우는 165.9회이고 S&P500은 168.65회, FTSE는 174.85회, 그리고 HANG SENG은 167.45회이다.

95% VaR기준으로 NIG분포의 기각횟수가 EWMA보다 이론적 기각횟수에 근접하고 KOSPI는  $\epsilon$ -

**Table 3.5.** Backtesting results for the 95% Value at Risk (VaR): the number of times that the actual loss exceeds VaR and  $p$ -values of Kupiec test

	KOSPI		S&P500		FTSE		HANG SENG	
	# reject	Kupiec	# reject	Kupiec	# reject	Kupiec	# reject	Kupiec
EWMA	200	0.0089	191	0.082	200	0.055	178	0.403
$\varepsilon$ -MLE	180	0.275	190	0.096	174	0.654	167	0.978
$\varepsilon$ -MME	173	0.585	191	0.082	177	0.862	173	0.656

EWMA = exponential weighted moving average method, MLE = maximum likelihood estimate, MME = moment method estimator.

MME로 추정된 NIG모형의 성능이, FTSE와 HANG SENG은  $\varepsilon$ -MLE로 추정한 NIG모형의 성능이 우수함을 알 수 있다. 한편 표본의 왜도와 초과첨도로 계산한  $3K - 5S^2$ 이 음수인 경우에는 MLE와 MME가 추정되지 않았고 그 비율은 각각 KOSPI는 3.44%, S&P500은 14.67%, FTSE는 0.74%, HANG SENG이 4.12%이었다. 비추정된 부분을 제외하고 추정된 모수를 이용해 구한 95% VaR로 사후검증을 해보았을 때, MLE기준으로 KOSPI는 5.18%, S&P500은 6.01%, FTSE는 5.04% 그리고 HANG SENG은 4.95%에서 기각되었고, MME기준으로 KOSPI 5.06%, S&P500 6.04%, FTSE 4.93% 그리고 HANG SENG 4.94%에서 기각되었다. 이 부분에서의 비율은 보정 전과 후에 큰 차이가 없다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 다양한 주가자료의 로그 수익률을 NIG분포에 적합할 때 모수 추정에서 발생하는 문제점을 보정하고자 하였다. 자료의 초과첨도와 왜도를 사용한  $3K - 5S^2$ 의 값이 0보다 작거나 0에 근접할 때는 모수가 추정되지 않거나 매우 크게 추정되는 문제가 발생한다. 이를 보완하고자  $3K - 5S^2$ 의 표본값을  $\max\{3K - 5S^2, \varepsilon\}$ 으로 대체하여 모의실험하였고  $\varepsilon$ 의 값을 0.5로 정하였다. 모의실험을 통해, NIG분포의 정의가능 공간 안에서  $3K - 5S^2$ 의 표본값이 0에 근접할 때  $\varepsilon$ -MLE와  $\varepsilon$ -MME 방법이 MLE와 MME보다 안정적인 모수추정이 가능함을 확인하였다. 정의가능 공간 안에서  $3K - 5S^2$ 의 표본값이 0에 근접하지 않을 때는 MLE와 MME,  $\varepsilon$ -MLE와  $\varepsilon$ -MME가 비슷한 추정 값을 갖게 된다.

2001년 1월부터 2015년 5월까지 KOSPI, S&P500, FTSE, HANG SENG의 일별 로그수익률로 실증분석을 했을 때에도  $\varepsilon$ -MLE와  $\varepsilon$ -MME가 모수를 안정적으로 추정하였다. Hyperbolic Shape Triangle을 그려보았을 때,  $\varepsilon$ -MLE와  $\varepsilon$ -MME로 재표현한 대안적인 왜도와 첨도가 더 안정적인 위치에 있었다. 또한 VaR를 이용한 사후 검증을 통해서도  $\varepsilon$ -MLE와  $\varepsilon$ -MME로 추정된 NIG분포의 성능이 떨어지지 않음을 확인 할 수 있었다.

본 연구에서는 자료의 특성에 따라 NIG분포의 모수 추정과정에서 문제점이 발생하는 것을 확인하고 이를 수치 해석적 방법으로 보완하였다. 다양한 실증 자료를 이용한 분석 결과, 모수의 안정성 및 모형의 성능 면에서 보정의 효과가 긍정적으로 나타난다. 하지만 보정방법에 대한 이론적인 해석이 추가적으로 필요하다고 생각되며 차후 별도의 논문으로 작성할 예정이다.

#### References

- Barndorff-Nielsen, O. E. (1977). Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size. In *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, **353**, 401–419.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1997). Processes of normal inverse gaussian type, *Finance and Stochastics*, **2**, 41–68.

- Barndorff-Nielsen, O. E., Blæsild, P., Jensen, J. L., and Sørensen, M. (1985). *The Fascination of Sand*, Springer, 57–87.
- Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities, *The Journal of Political Economy*, **2**, 637–654.
- Carr, P., Geman, H., Madan, D., and Yor, M. (2002). The fine structure of asset returns: an empirical investigation, *Journal of Business*, **75**, 305–333.
- Clark, P. K. (1973). A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices, *Econometrica*, **41**, 135–155.
- Cox, J. and Ross, S. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes, *Journal of Financial Economics*, **3**, 145–166.
- Eriksson, A., Ghysels, E., and Wang, F. (2009). The normal inverse Gaussian distribution and the pricing of derivatives, *The Journal of Derivatives*, **16**, 23–37.
- Fielitz, B. D. and Smith, E. W. (1972). Asymmetric stable distributions of stock price changes, *Journal of the American Statistical Association*, **67**, 813–814.
- Figueroa-López, J. E., Lancette, S. R., Lee, K., and Mi, Y. (2011). Estimation of NIG and VG models for high frequency financial data, *Handbook of Modeling High-Frequency Data in Finance*, John Wiley & Sons, 3–26.
- Geman, H. (2002). Pure jump Lévy processes for asset price modeling, *Journal of Banking and Finance*, **26**, 1297–1316.
- Ghysels, E. and Wang, F. (2014). Moment-implied densities: properties and applications, *Journal of Business & Economic Statistics*, **32**, 88–111.
- Hull, J. and White, A. (1987). The pricing of options on assets with stochastic volatilities, *The Journal of Finance*, **42**, 281–300.
- Kim, T. and Song, S. (2011). Value-at-Risk Estimation using NIG and VG Distribution, *Journal of the Korean Data Analysis Society*, **13**, 1775–1788.
- Kupiec, P. H. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models, *The Journal of Derivatives*, **3**, 73–84.
- Madan, D. and Seneta, E. (1990). The VG model for share market returns, *Journal of Business*, **63**, 511–524.
- Mandelbrot, B. (1963). The variation of certain speculative prices, *Journal of Business*, **36**, 394–419.
- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics*, **3**, 125–144.
- Prause, K. (1997). Modelling financial data using generalized hyperbolic distributions, *FDM Preprint*, **48**, University of Freiburg.

# Normal inverse Gaussian 분포에서 모수추정의 보정 방법 연구

윤정연<sup>a</sup> · 송성주<sup>a,1</sup>

<sup>a</sup>고려대학교 통계학과

(2016년 4월 11일 접수, 2016년 5월 16일 수정, 2016년 5월 17일 채택)

---

## 요약

금융자산의 수익률 분포를 잘 설명할 수 있는 것으로 알려진 normal inverse Gaussian(NIG)분포는 모수의 조건에 의해 세 배의 초과첨도가 왜도 계급의 5배보다 커야 하는데, 만약 관측된 초과첨도와 왜도의 관계가 이를 만족하지 못하거나 두 값이 매우 비슷하다면 모수를 안정적으로 추정하기 어렵게 된다. 이 논문에서 우리는 NIG분포의 모수추정에서 발생하는 이러한 문제점을 살펴보고 모의실험을 통해 이를 보정하는 방법을 찾아보았다. KOSPI, S&P500, FTSE와 HANG SENG의 실제 주가지수 자료에 적용하여 보정의 효과를 비교하고 VaR를 이용한 사후 검증으로 보정된 추정방법의 성능을 평가해 보았다. 보정 방법을 이용하였을 때, 모수추정의 문제가 있던 구간을 포함한 모든 구간에서 안정적인 모수추정이 가능하였고 VaR를 통한 사후 검증에서도 분포의 성능이 떨어지지 않음을 확인하였다.

주요용어: normal inverse Gaussian분포, 정의 가능공간, 모수 추정, Value at Risk

---

---

이 연구는 2013년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임 (NRF-2013R1A1A3012819).

<sup>1</sup>교신저자: (02841) 서울특별시 성북구 안암로 145, 고려대학교 통계학과. E-mail: sjsong@korea.ac.kr