대한수학교육학회지 <학교수학> 제 18 권 제 2 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 18, No. 2, 277 ~ 300. Jun 2016

미분 개념의 이해에 관한 수업 사례
- 공학적 도구를 활용한 역사 발생적 과정을 토대로 -1)

황 혜 정* · 김 미 향**

미분에 관한 주요 문제점으로 미분 개념이 공식처럼 다루어져 기초적 지식이 결여되어 있으며, 정형화된 계산 및 활용 문제를 해결하는 데에는 익숙하지만 비정형의 새로운 문제를 해결하는데 있어서는 그렇지 못함이 지적되고 있다. 선행 연구들은 주로 학습자 오류, 교재 구성, 지도 방법 등에 관심을 두고 이의 해결 방안을 제시하는데 중점을 두어 온 반면, 실험수업을 통한 양·질적 연구는 그다지 활발히 이뤄지지 않아 왔다. 이에 따라, 본 연구에서는 우선 '이해'의 의미를 가늠하고 미분 개념을 이해한다는 것이 무엇인지를 탐색하고, 그 결과에 맞춰 역사 발생적 원리 및 공학적 도구를 활용하여 미분계수와 도함수 내용의 이해를 돕기 위한 수업지도안을 마련하고자 하였다. 또, G광역시의 S고등학교 1학년에 재학 중인 총 68명의 학생들을 대상으로 통제집단 설계를 적용하여 실험수업을 실시하였다. 이때, 검사 도구는 '학습이해도'와 '학습만족도' 영역으로 구성하였으며, 'SPSS 21.0 Ver'를 사용하여 사후검사 결과를 분석하고 그 결과를 토대로 미분 개념의 이해를 높이기 위한 몇몇 지도 방안을 제시하고자 하였다.

Ⅰ. 서 론

우리나라의 수학과 교육과정은 수 십 년에 걸쳐 개정되어 오면서 미적분 학습의 중요성과 역할이 지속적으로 강조되어 왔다. 이현주·류중현·조완영(2015)은 미분 개념의 중요성을 강조하며, 미분은 초등학교의 규칙성, 중학교의 함수, 고등학교의 함수의 극한과 연속을 통합하여 심화시킨 내용으로 수학뿐만 아니라 다양한 분야에서 응용되는 도구적 지식이며 사회 및 자연 현상을 이해하고 분석하는데 이용되는 가장 핵심적인 내용 중 하나라고 하였다.

하지만 학습자는 미분계수를 이해하는 것부터 어려움을 겪고 해당 내용과 관련된 문제를 해결하는 과정에서 빈번한 오류를 범하는 것으로 나타났다(Orton, 1983; White, 1990; 최나영, 2001; 이호철, 2005; 김정희·조완영, 2006; 박희진, 2007; 오혜경, 2008; 전영배 외, 2009; 마윤심, 2010; 지상호, 2010; 정다희, 2011; 임연휘·표용수, 2013; 홍선주, 2013). 구체적인 예로, 전영배 외(2009)는 3개 고등학교 2학년 학생 105명을 대상으로 미분에 관한 문제를 해결하는 과정에서의 오류를 분석한 결과, 개념상의 부족으로 인한 오류, 관련 없는 자료의 오용, 그리고 기술적인 계산상의 오류가 주를 이루는 것으로 나타났다. 결국, 미분 개념과 관련된 주요 문제점은 미분 개념이 공식처럼 다루어져 미분 개념에 대한 기

* 조선대학교, sh0502@chosun.ac.k (제1 저자)
** 광주과학고등학교, mimiminynyny@naver.com (교신저자)
1) 이 논문은 2015학년도 조선대학교 학술연구비의 지원을 받아 연구되었음.

초적 지식이 결여되어 있고 정형화된 계산 및 활용 문제를 해결하는 데에는 익숙한 반면, 비정형화된 새로운 문제는 원만히 해결하지 못하여 왔다는 점이다(Tall, 1986).

또, 우정호(2011)는 미적분 지도의 주요한 문제점으로 기본적인 개념의 이해에 충실하지 못하고 형식적인 계산법을 습득하는 형식주의에 빠지기 쉽다는 점을 지적한 바 있으며, 이러한 문제점의 인식 하에 올바른 미분 개념의 지도 방안을 위한 연구들이 선행되어온 것으로 보인다. 정연준(2010)은 미분계수의 역사 발생적 과정에 대한 고찰을 통해 미분계수는 순간적인 운동 현상에 대한 이해를 기반으로 하고 있으며 이러한 부분이 적절히 드러나지 못한다면 미분계수는 미분법 공식을 유도하는 과정 혹은 순간속도를 계산하는 수단 이상의 것이 되기 어렵다고 하였다. 따라서 미분계수 지도에서 순간속도와 운동 상황의 제시방식을 개선할 필요가 있으며, 그 방안으로 미분계수의 역사 발생적 과정을 학생들의 이해 수준에 맞추고 실제 상황에서 수업 진행이 가능할 정도로 정리하여 가르치는 방법을 제시하였다. 또, 강향임(2013)은 미분계수는 그 형성 과정에서 대수적, 기하학적, 운동학적 관점을 포함하면서 발달해 왔으므로 학생들에게 이렇게 다양한 관점을 서로 구분지어 그 차이를 분명히 하는 것 보다는 통합된 관점에서 상호 관련지어 제시하는 것이 보다 효율적일 것이라고 하며 그 방안 중 하나로 공학적 도구의 활용을 제안하였다.

이렇듯, 지금까지의 선행 연구 결과들로부터 미분 개념에 관한 부실한 이해는 주로 미분계수, 접선, 도함수의 개념을 제대로 이해하지 못하거나 잘못된 개념을 가지고 있는데서 비롯됨을 알 수 있다. 또한, 이러한 연구들은 미분 내용을 학습하는데 있어서 학습자에게서 나타나는 오류, 교재 구성, 지도 방법 등의 문제점을 지적하고 이의 해결 방안들을 제시하는데 중점을 두어 온 것에 반해, 실험수업을 통한 분석 연구는 그다지 활발히 이뤄지지는 않았다. 이에 따라, 본 연구에서는 학습자가 미분 개념을 올바르게 이해하도록 돕기 위한 수업 자료 및 지도서를 마련하고, 이를 활용하여 실험수업 적용 및 분석을 실시하고자 하였다.

이를 위하여 본 연구에서는 우선적으로 선행 연구를 통해 '이해'의 의미를 가늠하고 미분 개념을 이해한다는 것이 무엇인지 탐색하고자 하였으며, 그 결과에 맞춰 역사 발생적 원리 및 공학적 도구를 활용하여 미분계수와 도함수에 해당하는 미분 내용의 이해를 돕기 위한 수업지도안을 마련하고자 하였다. 또, G광역시의 S고등학교 1학년에 재학 중인 총 68명의 학생들을 대상으로 통제집단 설계(Posttest Only Control Group Design)를 적용하여 실험수업을 실시하고자 하였다. 이때, 검사 도구는 '학습이해도'와 '학습만족도' 영역으로 나누어 구성하였으며, 'SPSS 21.0 Ver'를 사용하여 사후검사 결과를 분석하고, 그 결과에 근거하여 미분 개념의 이해를 높이기 위한 몇몇 지도 방안을 제시하고자 하였다. 궁극적으로 본 연구에서 제안하는 지도 방안이 미분을 효율적으로 지도하는데 보탬이 되기를 기대한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 이해의 결과 요소

학습자에게 가장 많이 나타난 오류 유형은 필수적인 원리·법칙·사실·개념에 대한 지식 부족과 정의와 정리의 부적절한 사용으로 나타났으며 이는 미분 개념에 대한 온전한 이해가 수반되지 않은 학습의 결과라 할 수 있다. 이러한 오류 예방 내지 처방을 위한 적절한 방안을 모

<표 II-1> 지식의 유형에 따른 이해의 결과 요소

지식의 유형	know what	• Y means • Y refers to	• function Y has		• are the implications of Y
	know when	• Y is used • Y applies	• to use Y		
	know how		• to apply Y	• Y occurred • Y is a consequence of Z • Y works	• Y is a consequence of Y
	know why			• Y occurred	• Y is significant
		⬇	⬇	⬇	⬇
		의미(meanings)	사용(uses)	기원(origins)	결과(consequences)
		이해의 결과 요소			

색하기 위해서는 미분 개념을 이해한다는 것이 무엇인지를 살펴볼 필요가 있다. 이종희(1999)는 여러 연구 결과를 탐색하여 수학적 개념의 이해가 무엇인지를 구체화 하고자 하였으나, 이해의 개념에 관한 합의를 이끌어내기는 어려우며 각 연구들은 이해의 과정, 이해의 결과, 이해의 주체, 이해의 대상 등 어느 한 측면에 주목하여 이루어졌음을 언급하였다.

본 연구에서 이해의 대상은 미분 개념이며 이해의 주체는 미분 개념의 학습을 앞둔 학습자인데, 일반적으로 학습자가 어떤 인식론적 장애 및 오류가 있는지는 앞서 언급한 여러 선행 연구에서 논의된 바 있으며, 이해의 과정은 학습자 내부에서 일어나는 심리적 현상으로 해석학적 고찰이 요구된다. 따라서 본 연구에서는 의미 충실한 교수·학습 결과는 해당 교수·학습의 목표 달성으로부터 도래되는 것으로 간주하고 미분 개념을 이해한다는 것의 의미를 이해의 결과에 초점을 두어 살펴보고자 한다.

Giambrone(1983)은 일반적으로 사용되는 지식의 유형(know when, know what, know how, know why)에 해당하는 구체적인 예들을 열거하고, 그 예들을 다시 유사한 성격의 것들로 분류하고 범주화 하여 이해의 결과로 '의미(meanings)', '사용(uses)', '기원(origins)', '결과(consequences)'의 네 가지 요소를 제시하였다. 가령, Giambrone(1983)은 X는 Y를 이해한다는 것은 구체적으로 X는 이론적, 실제적, 역사적 맥락에서 Y의 의미, 사용, 기원, 결과를 아는 것이라고 제시하였다.

이해의 결과 요소에 대해 살펴보면 다음과 같다(Giambrone, 1983). 첫째, '의미'란 개념의 내포와 외연을 알고, 구문론적으로 그 개념이 사용된 문장에서의 의미를 파악할 수 있는 것을 말한다. 둘째, '사용'은 어떤 개념을 실제적으로 사용하거나 또는 새로운 지식이나 구조를 구성하기 위해서 사용하는 것을 말한다. 셋째, '기원'은 개념이 발생된 문맥, 방법, 이유를 아는 것으로 그 개념이 다른 개념 또는 원리, 법칙의 결과가 되는 것을 아는 것도 포함한다. 끝으로, '결과'는 그 개념으로 인해 어떤 개념, 원리, 법칙이 나왔는지 또는 그 개념이 중요한 이유를 아는 것을 말한다. 구체적인 예로는 어떤 개념이 의미하는 바는 무엇인지, 어떤 영향을 미치는지, 왜 중요한지를 안다 등이 있다.

이상으로 살펴본 이해의 결과 요소의 특징을 토대로 미분 개념을 이해한다는 것의 의미를 <표 II-2>와 같이 정리하고, 본 연구에서는 이에 근거하여 수업지도안을 마련하였다.

<표 II-2> 본 연구에서 미분개념 이해의 의미

이해의 결과 요소		미분개념을 이해한다는 것의 의미
•기원	⇨	발생맥락을 통해
•의미	⇨	정의를 알고, 이를 대수와 기하로 표현하고
•사용	⇨	정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있으며
•결과	⇨	그 개념이 왜 중요한지 혹은 얼마나 가치 있는지를 안다.

2. 미분 개념의 역사 발생적 과정

미분 개념에 관한 역사 발생적 과정을 간단히 살펴보면 다음과 같다.

첫 번째 단계는 원의 접선에 관한 것으로, 미분의 발생적 기원인 접선에 대한 연구는 BC 3세기 전 고대 그리스 시대에 활발하게 이루어졌다. 이 시기의 기하학은 직선이나 원주 상의 등속운동에 대한 연구를 제외하면 정적인 관점에서 이루어졌으며 순간적인 운동 혹은 순간 변화율 개념과 연결되는 미분계수의 대한 기초적인 이해에는 도달하지 못하였다. 그러나 미분계수의 기하학적 의미인 접선에 대한 초기 개념이 형성되었다는 점에서 그 의의를 찾을 수 있다. 두 번째 단계는 운동학적 측면에서 곡선에 그은 접선에 관한 것으로, 아르키메데스는 나선 위에 주어진 한 점에서의 접선을 구하는 방법으로 나선을 만들어내는 두 개의 구성 요소의 움직임에 의해 측정되는 속력의 합성을 사용하였다(김경화 역, 2004). 이러한 아르키메데스의 접선 개념은 곡선의 한 점에서 그 곡선을 교차하지 않고 스치면서 지나가는 직선을 의미한다(정연준, 2010; 강향임, 2012). 즉, 유클리드가 정의한 정적인 관점에서의 초기 접선 개념에서 운동의 순간 방향을 결정하는 동적인 관점에서의 접선 개념으로의 전이가 이뤄졌다는 점에서 그 의미를 찾을 수 있다.

세 번째 단계는 해석기하학의 관점에서의 접선에 관한 것으로, 17세기 초 데카르트(Descartes)와 페르마(Fermat)에 의한 해석기하학의 도입으로 곡선의 접선을 구하는 다양한 방법들이 발견되기 시작하였다. 데카르트는 곡선의 접선을 작도하는 방법으로 원 정리(Circle Method)를 사용하였고, 페르마는 최초로 극값의 아이디어를 이용하여 최댓값, 최솟값을 구하고자 하였으며 가(假) 동등 원리를 이용하여 곡선의 극대점 및 극소점과 접선의 기울기를 구하였다. 페르마의 가동등 원리는 무한소 측면에서 극값 및 접선의 기울기를 구하는 과정이 충분히 설명되지 못했다는 점에서 한계가 있으나 변수의 근방값에 대한 아이디어는 무한소 해석의 근본으로 미분 개념의 초기 형태가 정리되었다는 점에서 의의를 찾을 수 있다. 네 번째 단계는 17세기 후반 뉴턴(Newton)과 라이프니츠(Leibniz)가 무한소를 이용하여 미분계수의 기하학적 측면과 운동학적 측면, 그리고 대수적 측면을 통합함으로써, 접선의 기울기가 순간 속도에 해당되며 차분의 비를 이용하여 효율적으로 계산할 수 있는 대수적 알고리즘을 확립하였다(정연준, 2010). 그러나 극한 개념 대신 무한소 아이디어를 대수적으로 사용한 점에서 수학적 정당화가 어려웠으며 무한소 자체에 대한 논의가 명확하지 않았다는 점에서 미분계수 개념의 형식화에 한계를 갖는다.

다섯 번째 단계는 순간속도 개념과 차분의 극한 개념의 연결을 시도한 것으로, 기하학적 직관을 바탕으로 하는 뉴턴의 극한 개념은 이후 점진적으로 발달하였지만 그 근본적인 한계는 극복되지 못하였다. 18세기 중반 달랑베르(D'Alembert)는 뉴턴이 말한 '최초와 궁극적 비'를 극한으로 해석하여 두 번째 양이 첫 번째 것에 어떠한 주어진 양보다 더 가깝게 접근할 수 있거나, 또는 그들 사이의 차가 절대적으로 할당될 수 없으면, 하나를 다른 것의 극한이라고 하였다. 달랑베르는 무한소를 무한히 작은 것을 뜻하는 것으로

해석하고 이것을 극한으로 정의한 것처럼, 무한 개념도 명백하게 하고자 하였으나(김경화 역, 2004), 무한소를 대체할 수 있을 만큼 극한 개념을 정교하고 명확하게 표현하지는 못하였다(정연준, 2010). 여섯 번째 단계는 평균속도의 극한으로 형식화된 미분계수 정의에 관한 것으로, 오늘날 사용되는 미분계수의 정의는 코시(Cauhcy)에 의해 극한이 정확하게 정의되면서 확립되었다. 그는 모든 미적분학의 근본은 극한의 개념이라고 믿으며, 어떤 변수에 계속해서 대응되는 값이 어떤 고정된 값으로 무한히 다가가는데 그 차가 원하는 만큼 작아지면서 그 고정된 값으로 끝나갈 때, 그 최후의 값을 다른 모든 값들의 극한이라 부른다고 하였다(권혜승 역, 2011). 코시는 이전의 미분의 개념에서 무한소를 완전히 제거하고 평균속도의 극한으로 순간속도를, 차분의 비의 극한으로 도함수를 정의하였다.

한 마디로 정리하면, 우정호・민세영(2002)은 교사가 수학적 사고의 본질에 자연스럽게 접근하여 학습자의 수학 학습 과정을 더 잘 이해하고, 이를 실제 지도에 반영하기 위한 시도가 역사 발생적 학습・지도 원리라고 하였다. 이러한 맥락에서 본 연구에서는 미분 개념의 이해를 도모하기 위한 수업 지도 방안을 마련하기 위하여 미분 개념의 역사 발생적 과정을 토대로 미분 개념의 학습 내용을 구현해 보고자 하였다.

3. 미분 지도에서 공학적 도구의 활용

NCTM(2000)은 학교수학의 원리와 규준을 제안하며 이때 수학적 개념의 이해를 돕고 수학적 태도를 증진시키기 위한 '기술 공학의 원리(The Technology Principle)'를 강조하였다. 또한, 우리나라 2015 개정에 따른 수학과 교육과정에서도 공학적 도구의 활용을 권장하는 '정보처리' 역량을 새롭게 강조하고 있다(교육부, 2015). 본 연구에서는 미분 개념의 이해를 도모하기 위한 수단으로 GeoGebra라는 공학적 도구를 활용하였는데, GeoGebra의 특징은 대수적 표현과 기하학적 대상이 서로 연결되어 있다는 점이다.[2)]

GeoGebra를 활용하여 미적분 내용을 다룬 선행 연구에 대해 간략히 살펴보면 다음과 같다. 정자욱(2012)은 고등학교 2학년 6명을 대상으로 GeoGebra를 이용한 미적분 수업의 질적 사례연구를 통해 GeoGebra를 활용한 수업이 칠판으로 강의하는 수업보다 학생들로 하여금 그래프를 직접 조작해 보고 시각적으로 그래프의 움직임을 관찰하여 기울기가 바뀌는 것을 확인해 봄으로서 미분계수의 정의를 보다 바르게 이해하였음을 확인하였다. 이정곤(2012)은 자연과학대학 수학과에 재학 중인 1학년 여학생 2명을 대상으로 GeoGebra를 활용하여 자연로그 그래프를 이해하는 과정을 관찰하였다. 그 결과, 학생들 스스로 인지적 갈등과 오개념을 수정하고 자연로그를 보다 명확하게 이해하여 올바른 개념을 형성하는 것을 확인하였다. 또, 정가람(2013)은 고등학교 2학년 학생 4명을 대상으로 GeoGebra를 활용하여 구분구적법을 지도한 결과, 학생들은 수학적 시각화를 통하여 보다 명확하게 구분구적법을 이해하고 문제해결 과정에서도 쉽게 원리를 파악하여 문제에 대하여 가능한 한 많은 양의 아이디어를 산출하는 유창성을 보임을 확인하였다.

한편, 강향임(2013)은 고등학교 2학년 문과반

2) 이 때문에 기하창에서 기하학적 대상에 변화가 나타나면 대수적 표현이 그에 따라 변하며, 같은 원리로 대수적 표현의 값을 변경하면 기하학적 대상에 바로 그 변화가 나타난다. 또한 슬라이더를 활용한 시뮬레이션 기능이 있어 정적인 그림에 애니메이션을 포함한 동적인 시각화를 보탤 수 있고 제작된 애니메이션은 움직이는 그림 파일로 얻을 수 있기 때문에 역동적인 학습 활동을 다양한 방법으로 기록할 수도 있음(이상구 외, 2014).

여학생 2명을 대상으로 발생적 모델링을 활용한 미적분 개념의 구성 과정을 분석한 사례연구에서 GeoGebra를 활용하였으며, 이와 같은 공학의 활용은 함수와 도함수의 관계를 시각적으로 나타낼 수 있고 정적분의 값을 즉각적으로 계산할 수 있으며 접선을 역동적으로 구성할 수 있도록 돕는다고 하였다. 본 연구에서는 이상의 선행 연구 결과를 참고하여, GeoGebra를 활용한 시각화 도구를 마련하여 학생들로 하여금 직접적으로 보다 수월하게 미분 개념의 수업 상황에 참여할 수 있는 기회를 제공하고자 하였다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 대상과 실험 일정

본 연구는 G광역시에 소재하고 있는 S고등학교 1학년 학생들을 대상으로, 2학기 기말고사 성적을 기준으로 학급 평균과 표준편차가 유사한 남·여 두 개 반을 성별과 인원수를 고려하여 실험집단과 비교집단으로 나누었다. 두 집단은 <표 III-1>에서와 같이 t-검증($p>0.05$)을 통해 동질 집단임이 확인되었다. 결과적으로, 연구 대상자는 실험집단 34명(남17명, 여17명), 비교집단 34명(남17명, 여17명)으로 총 68명이며, 이들은 실험수업 이전에 2009 개정 교육과정에 따른 '미적분Ⅰ' 과목의 '함수의 극한과 연속' 영역까지 학습을 마친 상태였다.

<표 III-1> 실험집단과 비교집단의 2학기 기말고사 결과

집단	구분	N (사례수)	M (평균)	SD (표준편차)	t	p (유의수준)
실험 집단	남	17	55.21	21.67	0.042	0.966
	여	17	54.88	21.89		
	총	**34**	**55.04**	**21.45**		
비교 집단	남	17	55.04	19.14		
	여	17	55.48	21.83		
	총	**34**	**55.26**	**20.21**		

본 연구는 미분 개념의 올바른 이해를 도모하기 위한 것으로, 이를 위해 설계된 실험수업의 효과를 알아보고자 사후검사 통제집단 설계 (Posttest Only Control Group Design)를 적용하였다. 이때, 실험 결과는 실험집단과 비교집단 간의 유의미한 차이가 있는지 여부를 알아보기 위해 t-검증을 이용하였다.

실험집단은 Giambrone(1983)의 이해의 결과에 관한 네 가지 요소(의미, 사용, 기원, 결과)에 근거하여 설계된 실험수업 일정에 따라 4차시 분량의 수업을 받았다. 비교집단은 2009 개정에 따른 교과서(김창동 외, 2015)에 전개된 순서에 따라 전통적인 강의식 수업 방법으로 4차시 분량의 수업을 받았다. 수업 일정은 <표 III-2>와 같으며, 사후검사는 두 집단 모두 4차시 수업이 종료된 직후 이루어졌다.

<표 III-2> 두 집단의 4차시 수업 일정

차시	실험집단	비교집단
1	2015.12.21. 19:30~20:20	2015.12.22. 19:30~20:20
2	2015.12.21. 20:30~21:20	2015.12.22. 20:30~21:20
3	2015.12.23. 19:30~20:20	2015.12.24. 19:30~20:20
4	2015.12.23. 20:30~21:20	2015.12.24. 20:30~21:20

2. 실험수업의 내용 및 활동

본 연구에서는 2009 개정에 따른 '미적분Ⅰ' 과목에서 '다항함수의 미분법' 영역의 성취기준들을 참고하여 평균변화율, 미분계수의 정의, 미분계수 구하기, 미분계수의 기하학적 의미(접선), 미분가능성과 연속성, 도함수의 정의, 도함수 구하기, 도함수의 그래프 개형에 관한 내용을 다루었다.<표 III-5 참조>

한편, Giambrone(1983)의 이해의 결과에 해당

하는 네 가지 요소, 즉 의미, 사용, 기원, 결과를 모두 포함하도록 미분개념을 이해한다는 것의 의미를 정리하고 이를 토대로 <표 III-3>과 같이 수업활동 내용을 마련하였으며, 이에 관해 좀 더 구체적으로 설명하면 다음과 같다.

우선, 본 연구에서는 강향임(2012)의 미분계수 개념의 역사 발생적 과정을 토대로 <표 III-4>와 같이 학습 순서 및 내용을 구현하여 실험수업에 적용하고자 하였다. 둘째, 미분 개념과 관련된 구체적인 상황을 시각적으로 제시하여 직관적인 이해를 돕고자 GeoGebra를 사용하였다.

본 연구에서는 실험수업 전에 학습자들이 사용할 각각의 컴퓨터에 GeoGebra 프로그램을 이용하여 ‘시각화 도구’[3]를 마련하였다. 다음 [그림 III-1]은 그래프를 따라 점을 이동해 보는 활동을 통해 순간변화율이 평균변화율의 극한임을 직관적으로 이해할 수 있게 학생들이 직접 조작 가능하도록 마련한 시각화 도구의 예이다.

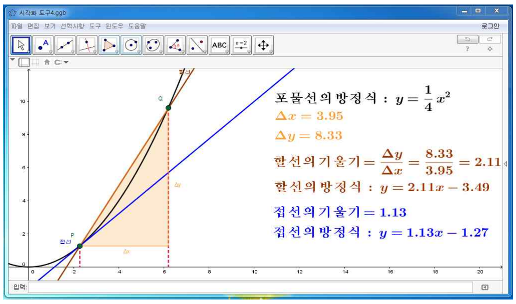
<표 III-3> 실험수업의 설계 과정

Giambrone (1983)의 이해의 결과		미분개념을 이해한다는 것의 의미		수업활동 내용
•기원	⇨	발생맥락을 통해	⇨	a. 역사 발생적 과정에 따른 내용 전개
•의미	⇨	정의를 알고, 이를 대수와 기하로 표현하고	⇨	b. 공학적 도구의 활용
•사용	⇨	정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있으며	⇨	c. 정의를 이용한 문제 풀이
•결과	⇨	그 개념이 왜 중요한지 혹은 얼마나 가치 있는지를 안다.	⇨	d. 가치인식을 위한 읽기자료 제공

<표 III-4> 본 연구에서의 역사 발생적 과정에 따른 미분계수 개념의 전개 순서

단계	미분계수 개념의 역사 발생적 과정(강향임, 2012)	본 연구에서의 미분계수 개념 전개 순서	현행 교과서의 미분계수 개념 전개 순서
1단계	접선은 원과 한 점에서 만나는 직선 ↓	원과 포물선에서의 접선 ↓	
2단계	운동학적인 측면에서 곡선에 그은 접선 ↓	삼차곡선에 그은 접선 ↓	
3단계	해석기하학의 관점에서 접선 ↓	변화하는 현상을 그래프로 표현, 해석기하학의 관점에서 평균변화율 ↓	순서1. 해석기하학의 관점에서 평균변화율 제시
4단계	무한소 관점에서 순간적인 운동이 접선과 연결 ↓	국소선형을 이용하여 순간변화율과 접선의 관계 탐구 ↓	순서4. 미분계수의 기하학적 의미 제시
5단계	순간속도 개념을 차분의 극한 개념과 연결 시도 ↓	차분의 극한 개념과 연결하여 순간변화율 탐구 ↓	순서2. 순간변화율 개념을 차분의 극한 개념과 연결하여 제시
6단계	형식화된 평균속도의 극한으로 미분계수 정의	형식화된 미분계수와 접선의 정의	순서3. 형식화된 미분계수 정의 제시

3) 시각화 도구라 함은 공동연구자인 교사가 수업 시간에 다룰 내용을 대상으로 학습자가 이를 이해하기 쉽게 직접 조작이 가능하도록 함으로써 미분 관련 내용의 시각화가 용이하도록 돕는 것으로, 학습자는 이러한 시각화 도구를 사용하여 점을 이동시키고 화면을 확대 또는 축소하는 등의 간단한 조작 활동을 손쉽게 하는 것이다. ‘시각화 도구’ 용어는 이상구 외 3인(2014)의 연구에서 인용한 것으로, 본 연구에서도 같은 맥락으로 사용하였음.



[그림 III-1] 시각화 도구의 예

셋째, 단순히 공식을 적용하기보다는 정의를 정확히 사용하여 문제를 다룸으로써 비정형화된 문제를 해결할 수 있도록 하였다. 넷째, 수업 도입 또는 정리 부분에 미분 개념이 실생활에 활용되는 구체적인 예와 역사 발생적 과정을 읽기 자료(가령, 음원과 미분, 경제와 미분, 인터체인지와 미분 등)로 제시하고자 하였는데, 이는 학습자가 미분 개념이 왜 중요한지, 어느 분야에 활용되는지, 그리고 역사적으로 어떤 과정을 거쳐 발달해 왔는지 등 수학적 가치를 인식하는데 도움을 주고자 함이다.

이상을 종합하여 <표 III-5>의 수업 내용 및 활동 계획에 따라 수업지도안을 마련하였으며, 본고에서는 지면 관계상 두 번째 차시의 것만을 <부록 1>에 제시하였다.

3. 검사 도구 개발

본 연구에서의 사후검사는 미분 개념을 이해하는 데에 실험수업이 도움이 되었는지를 알아보기 위한 것으로서, 검사 도구는 크게 두 가지 영역으로 구분하여 실시하였다. 첫째는 수업 후 학습자의 미분 개념 이해 정도를 알아보는 '학습이해도' 이고, 둘째는 미분 개념의 가치와 실험수업이 미분 개념을 이해하는데 도움이 되었는지 학습자가 인지한 정도를 알아보는 '학습만족도' 이다. 우선, 학습이해도의 검사 도구는 총 8개의 서술형 유형의 문항으로 구성되었으며, 이 문항들은 본 연구의 공동연구자인 교사가 개발하고, 두 차례에 걸쳐 동료 수학교사 5명과의 검토 협의회를 통해 수정·보완하였다. <표 III-6 참조> 문항별 채점은 문제해결 과정에 오류가 없고 답이 맞으면 정답으로 간주하고, 문제해결 과정에 오류가 있거나 답이 틀리면 오답처리 하

<표 III-5> 각 차시별 수업 내용 및 활동

2009 개정 교육과정의 다항함수의 미분법 영역		실험집단 수업			비교집단 수업
		차시별 내용	수업 활동<표 III-3 참조>	수업자료	차시별 내용
1 미분계수	①미분계수의 뜻을 알고, 그 값을 구할 수 있다.	<1차시> •접선 •평균변화율	•역사 발생적 과정에 따른 내용 전개 •공학적 도구 활용 •정의를 이용한 문제풀이 •가치인식을 위한 읽기자료 제공	시각화 도구1 시각화 도구2 읽기 자료 1,2	<1차시> •평균변화율 •미분계수의 정의
	②미분계수의 기하학적 의미를 안다.	<2차시> •미분계수의 정의 •미분계수 구하기 •미분계수의 기하학적 의미	•공학적 도구 활용 •정의를 이용한 문제 풀이 •가치인식을 위한 읽기자료 제공	시각화 도구3 시각화 도구4 읽기자료3	<2차시> •미분계수 구하기 •미분계수의 기하학적 의미
	③미분가능성과 연속성의 관계를 이해한다.	<3차시> •미분가능성과 연속성	•공학적 도구 활용 •정의를 이용한 문제 풀이	시각화 도구5	<3차시> •미분가능성과 연속성
2 도함수	①함수 $y=x^n$(n은 양의 정수)의 도함수를 구할 수 있다. ②함수의 실수배, 합, 차, 곱의 미분법을 알고, 다항함수의 도함수를 구할 수 있다.	<4차시> •도함수의 정의 •도함수 구하기 •도함수의 그래프 개형	•공학적 도구 활용 •정의를 이용한 문제 풀이	시각화 도구6	<4차시> •도함수의 정의 •도함수 구하기 •도함수의 그래프 개형

<표 III-6> 학습이해도의 문항별 내용 요소

차시별 주제	문항별 내용 요소	평가목표	문항번호	비고(문항 출처)
접선과 평균변화율	-접선의 존재성 조사 -평균변화율 구하기	-그래프의 주어진 점에서의 접선의 존재여부를 안다. -평균변화율의 정의를 이해하고 구할 수 있다.	1-(1),(2) 2	임재훈·박교식(2004) 김창동 외(2015)
미분계수	-미분계수의 정의	-미분계수의 정의를 안다.	3	
	-미분계수의 기하학적 의미 -순간변화율 구하기	-미분계수와 접선의 기울기 사이의 관계를 안다. -미분계수의 개념을 알고 순간변화율을 구할 수 있다.	4 5	이호철(2005) 이현주류중현조완영(2015)
미분가능성과 연속성	-미분가능성과 연속성 조사	-미분가능성과 연속의 뜻을 알고 그 여부를 확인할 수 있다.	6-(1) 6-(2)	김정희·조완영(2006) 김창동 외(2015)
도함수	-도함수의 그래프 개형 -정의를 이용한 도함수 구하기	-도함수의 그래프 개형을 안다. -정의를 이용하여 도함수를 구할 수 있다.	7 8	최나영(2001) 김창동 외(2015)

였다.

둘째, 학습만족도의 검사 도구는 Nehari와 Bender(1978)가 구안한 수업의 '유의미 평가 척도(Course Valuing Inventory)'[4]를 사용하였는데, 본 연구에서는 학습자가 느끼는 학습 경험의 유의미성과 가치 정도를 묻는 '학습의 가치'와 학습자가 스스로 인지하는 학습 내용의 습득 정도를 묻는 '인지적 내용 학습' 영역만을 선정하였다.[5] 학습만족도 문항은 4단계 Likert 척도로 구성하였으며[6], 하위 영역에 해당하는 문항의 내용과 유형(긍정/부정형), 문항 수에 관한 내용은 <표 III-7>과 같다.[7] 학습이해도와 학습만족도에 관한 사후검사 문항은 <부록 2>에 제시하였다.

<표 III-7> 학습만족도 문항에 관한 내용

문항유형 / 하위 영역	문항의 주요 내용	문항 번호		문항 수 (개)	Cronbach α
		긍정형 문항	부정형 문항		
학습의 가치 (course valuing)	학습자는 수업 과정에서 학습 경험이 얼마나 가치 있고, 유의미하고, 중요하고, 긍정적이라고 생각하는가	1, 2, 4, 6, 7	3, 5, 8, 9	9	0.976
인지적 내용 학습 (cognitive-content learning)	학습자는 수업 과정이 수업 내용에 대한 지식과 정보를 습득하고 통합적으로 이해하는데 도움을 주었다고 생각하는가	10, 11, 13, 15, 17	12, 14, 16, 18	9	0.981
계				18	0.989

4) Nehari와 Bender(1978)의 '유의미 평가 척도'는 보스턴 대학(Boston University)의 고등교육(higher education) 전공의 141명 재학생들을 대상으로 여름학기의 수업 과정에 대한 만족도를 측정한 도구로, 학습의 가치(course valuing), 인지적 학습 내용(cognitive-content learning), 정의적・개인적 학습(affective-personal learning), 행동적 학습(behavioral leaning)의 네 가지 영역을 두었다. 이 척도 방법은 Aleamoni(1981), Sobral(1992), 김동엽(2001), 박성희(2011), 김준송(2013) 등과 같이 여러 선행 연구에서 사용되었음.

5) 미분 개념을 이해한다는 것의 의미를 살펴본 결과, 발생 맥락을 통하여 정의를 알고 그 가치를 인식하는 것으로 간주하고, 이에 부합하는 것이 '학습의 가치'와 '인지적 내용 학습' 영역으로 판단하였음.

6) 긍정 문항의 경우 '전혀 그렇지 않다'(1점), '그렇지 않다'(2점), '그렇다'(3점), '매우 그렇다'(4점)로 점수를 부여하고, 부정형 문항의 경우에는 반대로 점수를 부여하였음.

7) 본 연구에서 마련한 학습만족도에 관한 검사 도구의 신뢰도를 분석한 결과, <표 III-7>에서 알 수 있는 바와 같이 '학습의 가치'와 '인지적 내용 학습'에서 Cronbach α의 값이 각각 0.976, 0.982로 매우 높게 나타났으며, 전체 Cronbach α의 값도 0.989로 높게 나타났다. 따라서 본 연구의 학습만족도에 관한 검사 도구는 학습자의 미분 개념에 관한 가치 인식 정도와 학습자가 인지한 학습 내용의 습득 정도를 측정하는데 적합하다고 볼 수 있음.

Ⅳ. 연구 결과

본 연구에서는 사후검사 결과를 분석하기 위해 ‘SPSS 21.0 Ver’를 사용하였으며 통계분석 방법으로 t-검증, 신뢰도분석, 상관분석을 사용하였다. 사후검사 결과에 따라 학습이해도에서 실험집단과 비교집단의 문항별 정답률을 비교하여 살펴보고, t-검증을 통해 두 집단의 검사 결과에 유의미한 차이가 있는지 살펴보았다. 한편, 학습만족도에 대해서는 실험집단과 비교집단의 문항별 반응 결과를 비교하고, t-검증을 통해 두 집단의 검사 결과에 유의미한 차이가 있는지를 살펴보고, 또한 학습만족도의 두 하위 영역인 ‘학습의 가치’, ‘인지적 내용 학습’간의 검사 결과 사이의 상관관계를 살펴보았다. 아울러, 학습이해도와 학습만족도의 검사 결과 사이의 상관관계를 살펴보았다.

1. 학습이해도 검사

가. 두 집단의 문항별 반응 결과

실험집단과 비교집단의 학습이해도의 문항별 정답률을 살펴보면, <표 IV-1>과 같이 모든 문항에서 실험집단의 정답률이 비교집단의 정답률보다 높게 나타났다. 실험집단의 정답률은 평균 71.5%로 비교집단의 정답률(평균 57.9%)보다 13.6% 더 높게 나타났으며, 성별로 나누어 살펴보면 남학생의 경우 실험집단의 정답률 평균이 72.9%로 비교집단의 정답률(평균 57.1%)보다 15.8% 더 높고, 여학생의 경우에도 실험집단의 정답률이 평균 70.0%로 비교집단의 정답률(평균 58.8%)보다 11.2% 더 높게 나타났다. 학습이해도 검사에서 실험집단과 비교집단이 구체적으로 어떤 차이를 보였는지 알아보기 위하여 두 집단 간 정답률의 차이가 큰 문항을 중심으로 문항의 내용 요소 및 평가목표와 실험집단의 대표적인 정답 반응의 사례를 살펴보면 다음과 같다.

우선, 미분계수의 정의를 묻는 3번 문항은 정답률의 차가 20.6%로 가장 큰 차이를 보였는데, 실험집단의 경우 76.5%의 응답자들이 [그림 IV-1]과 같이 형식적으로 미분계수의 정의를 정확히 서술하였다. 또, 6-(2)번 문항도 정답률의 차이가 20.6%로 3번 문항과 함께 두 집단 간의 차이가 가장 크게 나타난 것으로, 실험집단의 61.8%가 [그림 IV-2]와 같이 함수의 연속성의 정의와 미분가능성의 정의를 정확히 사용하여 문제를 해결하였다. 반면에, 이 문항은 함수의 연속성과 미분가능성을 조사하는 물음에 관한 것으로, 실험집단과 비교집단의 정답률이 각각

<표 IV-1> 학습이해도의 문항별 정답률

문항번호	내용 요소	정답률(%)						정답률 차 (A-B)
		실험집단			비교집단			
		남	여	전체(A)	남	여	전체(B)	
문항 1-(1)	접선의 존재성 조사	94.1	94.1	94.1	82.4	94.1	88.2	5.9
문항 1-(2)	〃	64.7	64.7	64.7	47.1	58.8	52.9	11.8
문항 2	평균변화율 구하기	70.6	76.5	73.5	64.7	64.7	64.7	8.8
문항 3	미분계수의 정의	76.5	76.5	76.5	64.7	47.1	55.9	20.6
문항 4	미분계수의 기하학적 의미	76.5	64.7	70.6	47.1	58.8	52.9	17.7
문항 5	순간변화율 구하기	70.6	64.7	67.6	47.1	58.8	52.9	14.7
문항 6-(1)	미분가능성과 연속성 조사	76.5	64.7	70.6	64.7	58.8	61.8	8.8
문항 6-(2)	〃	64.7	58.8	61.8	35.3	47.1	41.2	20.6
문항 7	도함수의 그래프 개형	82.4	82.4	82.4	76.5	58.8	67.6	14.8
문항 8	도함수 구하기	52.9	52.9	52.9	41.2	41.2	41.2	11.7
평균		**72.9**	**70.0**	**71.5**	**57.1**	**58.8**	**57.9**	**13.6**

61.8%, 41.2%로 다른 문항에 비해 상대적으로 두 집단 모두 정답률이 낮은 편에 속하는데, 이는 학생들이 평소 교과서에서 접했던 익숙한 유형의 물음이 아닌, 즉 절댓값이 포함되어 있어 구간을 나누어 해결해야 하는 어려움이 있었기 때문인 것으로 판단된다. 이처럼, 실험집단이나 비교집단에 속하는 학생들 모두 익숙하지 않은 유형의 문제를 해결하는 데에는 어려움을 겪은 것으로 볼 수 있다.

$y=f(x)$의 $x=a$에서 미분계수

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

[그림 IV-1] 3번 문항의 정답 사례

(2) $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & (x<1)\\ x^2-1 & (x\geq 1)\end{cases}$

$\lim_{x\to 1+}(x^2-1)=\lim_{x\to -1}x^2-1=f(1)=0$ 이므로 연속이다.

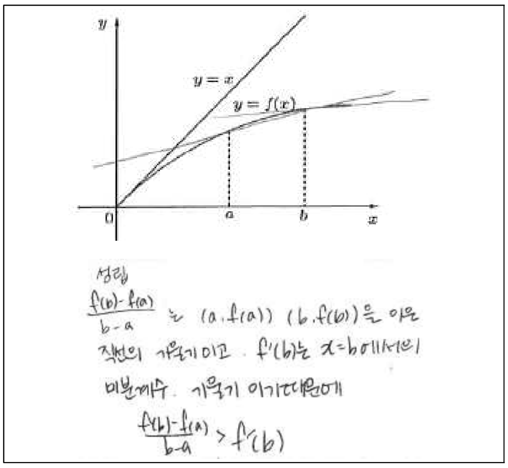
$\lim_{x\to 1+}f'(x)=\lim_{x\to 1+}2x=2\neq\lim_{x\to 1-}f'(x)$

$=\lim_{x\to 1-}-2x=-2$ 이므로

미분가능하지 않다

[그림 IV-2] 6-(2)번 문항의 정답 사례

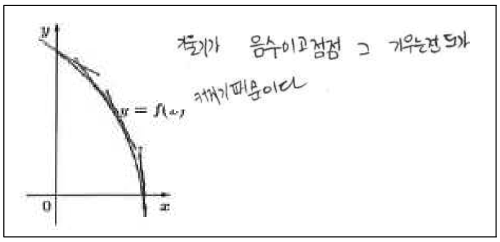
한편, 4번 문항은 대수표현과 기하표현 사이의 연결성을 이해하고 이의 호환이 잘 이루어져야 쉽게 해결할 수 있는 물음으로, 이 문항을 통해 평균변화율과 할선의 기울기, 미분계수와 접선의 기울기 사이의 관계를 알고 있는지 여부를 확인하고자 하였다. 그 결과, 두 집단 간의 정답률 차이가 17.7%로 비교적 크게 나타난 것으로 미뤄볼 때, 실험집단에서 대수표현과 기하표현의 연결이 더 잘 이루어졌음을 확인할 수 있다. 이 때, 실험집단의 70.6%에 이르는 많은 학생들이 [그림 IV-3]과 같이 주어진 그래프에 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$을 지나는 할선과 $x=b$에서의 $f(x)$의 접선을 그려 두 직선의 기울기의 크기로 부등식의 성립 여부를 올바르게 설명하였다.



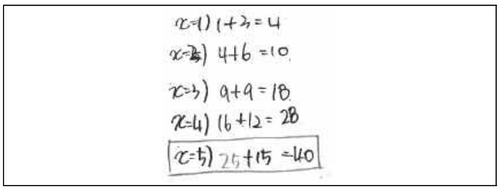
[그림 IV-3] 4번 문항의 정답 사례

또, 7번은 도함수의 그래프의 개형을 고르는 문항으로 도함수의 정의와 도함수의 기하학적 표현 사이에 연결이 잘 이루어져야 수월하게 해결할 수 있는 물음이다. 이 문항을 통해 학습자가 도함수의 그래프 개형을 예측할 수 있는지 여부를 확인하고자 하였는데, 두 집단 간의 정답률 차이는 14.8%이고 실험집단의 정답률은 82.4%로 실험집단 내에서 정답률이 높은 문항에 해당된다. 여기서, [그림 IV-4]와 같이 실험집단의 대부분의 학생들은 주어진 함수의 그래프에 여러 개의 임의의 접선을 그려보고 그 기울기의 변화 정도를 관찰하여 그 결과로 도함수의 개형을 예측하였다. 끝으로, 5번 문항은 주어진 문제 상황에서 $x=a$에서의 순간변화율이 a^2+3a임을 이해해야 해결할 수 있는 물음으로 두 집단 간의 정답률의 차이는 14.7%로 나타났다. 이 문항을 통해 학습자가 순간변화율(미분계수)의 개념 이해를 토대로 주어진 응용문제를 해결할 수 있는지 여부를 확인하고자 하였는데, 실험집단의 67.6%가 [그림 IV-5]와 같이 순간변화율의 식

x^2+3x 에 $x=5$를 대입하여 문제를 원만히 해결하였다.



[그림 IV-4] 7번 문항의 정답 사례



[그림 IV-5] 5번 문항의 정답 사례

한편, 실험집단과 비교집단의 정답률의 차이가 적게 나타난 문항을 살펴보면 1번 문항의 경우 두 집단 간의 정답률의 차이가 5.9%이고, 2번 문항과 6-(1)번 문항의 경우에는 정답률의 차가 각각 동일하게 8.8%로 나타났다. 이 문항들은 두 집단 모두 해당 문항에서 묻는 개념(접선과 미분계수)을 설명할 때 다룬 교과서의 예제나 문제와 비슷한 유형으로 학생들에게 익숙한 내용의 물음에 속한다. 사후 검사가 수업 직후에 이루어진 점으로 미루어 보아 학습 내용을 상기하는 것이 수월하여 두 집단의 정답률이 비교적 높게 나타난 것으로 보이며, 두 집단 간의 차이도 적게 나타난 것으로 예측된다.

특히, 6-(1)번과 6-(2)번 문항의 경우 주어진 함수의 연속성과 미분가능성을 조사하는 것으로 평가 목표가 동일함에도 불구하고 6-(1)번 문항은 두 집단 간 정답률의 차이가 적게 나타난 반면, 6-(2) 문항은 정답률의 차이가 가장 크게 나타났다. 이는 6-(1)번 문항이 학습자에게 익숙한 물음인 반면 6-(2)번 문항은 6-(1)번 문항과 마찬가지로 이차함수가 주어졌지만 절댓값이 포함되어 있고 예제나 문제를 통해 경험하였던 익숙한 유형의 물음이 아니었기 때문으로 판단된다.

나. 두 집단의 t-검증 결과

실험집단과 비교집단의 검사 결과(정답 수)에 대한 t-검증 결과를 살펴보면 <표 IV-2>에 나타난 바와 같이 유의확률이 0.091로 유의수준 0.05에서 통계적으로 두 집단 간에는 유의미한 차이가 없는 것으로 나타났다.

<표 IV-2> 학습이해도의 t-검증 결과

집단	N (사례수)	M (평균)	SD (표준편차)	t	p (유의확률)
실험 집단	34	7.15	3.07	1.716	0.091
비교 집단	34	5.79	3.43		

실험집단의 평균은 7.15로 비교집단의(평균 5.79)보다 1.36 높은 평균치를 보여주고 있으나 위와 같은 검증 결과가 나온 이유는 하위 문항을 포함하여 총 문항 수가 10개인 것을 감안했을 때 두 집단의 표준편차가 각각 3.07, 3.43으로 크게 나타났기 때문으로 보인다. 따라서 본 연구에서는 사전검사(기말고사 점수)결과를 기준으로 실험집단과 비교집단을 각각 상(30%, 10명), 중(40%, 14명), 하(30%, 10명) 세 그룹으로 나누어 그룹별로 두 집단의 검사 결과를 t-검증하였다. 검증 결과는 <표 IV-3>에서 알 수 있는 바와 같이 상과 중 그룹의 유의확률이 각각 0.016, 0.027로 유의수준 0.05에서 두 집단 간에 유의미한 차이가 있음으로 나타났다. 즉, 상과 중 그룹의 학습자에게 실험수업이 미분 개념을 이해하는데 도움이 되었다고 볼 수 있으며, 두 집단의 상·

<표 IV-3> 그룹별 실험 및 비교 집단의 학습이해도 t-검증 결과

그룹	집 단	N(사례 수)	M(평균)	SD(표준편차)	t	p(유의확률)
상	실험집단	10(남 5, 여 5)	9.80	0.42	2.753*	0.016
	비교집단	10(남 5, 여 5)	9.00	0.82		
중	실험집단	14(남 7, 여 7)	8.21	0.97	2.412*	0.027
	비교집단	14(남 8, 여 6)	6.43	2.59		
하	실험집단	10(남 5, 여 5)	3.00	2.05	1.647	0.119
	비교집단	10(남 4, 여 6)	1.70	1.42		

* $p<0.05$, ** $p<0.01$

중･하 그룹 내에서의 남･여 학생의 비율이 거의 유사하게 분포하는 것으로 보아 성별로 나누어 살펴보아도 위와 유사한 결과가 나올 것으로 예측된다. 단, 하 그룹에서는 실험집단의 평균이 3.00으로 비교집단(평균 1.70)보다 1.30 높은 평균치를 보이고 있으나 통계적으로 두 집단 사이는 유의미한 차이가 없는 것으로 나타났다.

2. 학습만족도 검사

가. 두 집단의 문항별 반응 결과

실험집단과 비교집단의 문항별 반응 결과를 살펴보면, <표 IV-4>에 나타난 바와 같이 학습만족도의 모든 문항에서 실험집단이 비교집단에 비해 상대적으로 보다 긍정적인 반응을 보였다. 하위 영역별로 살펴보면, 우선 ‘학습의 가치’ 영

<표 IV-4> 학습만족도의 문항별 반응 결과

하위 영역	문항번호	문항별 반응결과						반응결과 차 (C-D)
		실험집단			비교집단			
		남	여	전체(C)	남	여	전체(D)	
학습의 가치 (course valuing)	1	3.06	3.24	3.15	2.65	2.71	2.68	0.47
	2	3.00	3.24	3.12	2.71	2.76	2.74	0.38
	3	3.29	3.41	3.35	3.00	3.18	3.09	0.26
	4	3.06	3.29	3.18	2.76	2.88	2.82	0.36
	5	3.29	3.41	3.35	2.94	3.18	3.06	0.29
	6	3.24	3.24	3.24	2.59	2.94	2.76	0.48
	7	3.12	3.47	3.29	2.76	2.65	2.71	0.58
	8	3.29	3.47	3.38	2.76	2.88	2.82	0.56
	9	3.24	3.41	3.32	2.94	3.12	3.03	0.29
	평균	**3.18**	**3.35**	**3.26**	**2.79**	**2.92**	**2.86**	**0.41**
인지적 내용 학습 (cognitive-content learning)	10	3.18	3.29	3.24	2.76	2.88	2.82	0.42
	11	3.00	3.35	3.18	2.71	2.82	2.76	0.42
	12	3.12	3.41	3.26	2.94	3.00	2.97	0.29
	13	3.00	3.29	3.15	2.71	2.76	2.74	0.41
	14	3.18	3.41	3.29	2.94	3.06	3.00	0.29
	15	3.00	3.29	3.15	2.71	2.82	2.76	0.39
	16	3.18	3.41	3.29	2.94	3.00	2.97	0.32
	17	3.00	3.29	3.15	2.71	2.71	2.71	0.44
	18	3.24	3.41	3.32	2.94	3.12	3.03	0.29
	평균	**3.10**	**3.35**	**3.23**	**2.82**	**2.91**	**2.86**	**0.36**

역에서는 두 집단 모두 긍정적인 반응을 보였으며, 실험집단의 평균이 3.26으로 비교집단(평균 2.86)보다 0.41 높은 평균치를 보였다. 마찬가지로 ‘인지적 내용 학습’ 영역에서도 두 집단 모두 긍정적인 반응을 보였으며, 실험집단의 평균이 3.23으로 비교집단(평균 2.86)보다 0.36 높은 평균치를 보였다. 성별로 나누어 살펴보면, 우선 ‘학습의 가치’ 영역에서 남학생의 경우 실험집단의 평균이 3.18로 비교집단(평균 2.79)보다 0.39 높은 평균치를 보였고, 여학생의 경우 실험집단의 평균이 3.35로 비교집단(평균 2.92)보다 0.43 높은 평균치를 보였다. 또, ‘인지적 내용 학습’ 영역에서도 남학생의 경우 실험집단의 평균이 3.10으로 비교집단(평균 2.82)보다 0.28 높은 평균치를 보였고, 여학생의 경우 실험집단의 평균이 3.35로 비교집단(평균 2.91)보다 0.44 높은 평균치를 보였다. 즉, 성별에 관계없이 실험집단이 비교집단보다 상대적으로 더 높은 학습만족도를 보였다.

나. 두 집단의 t-검증 결과

실험집단과 비교집단의 검사 결과를 두 개의 하위 영역별로 t-검증하였다. 검증 결과는 <표 IV-5>에 나타난 바와 같이 ‘학습의 가치’와 ‘인지적 내용 학습’ 영역에서의 유의확률이 각각 동일하게 0.000으로 유의수준 0.01에서 유의미한 차이가 있는 것으로 나타났다. 즉, 실험수업이 학습자들에게 미분개념의 가치를 인식하는데 도움을 주었고, 또한 미분 개념을 이해하고 습득하는데 긍정적인 효과가 있었다고 볼 수 있다. 성별로 나누어 살펴보아도 두 개의 하위 영역에서 남학생과 여학생 모두 유의확률이 각각 동일하게 0.000으로 유의수준 0.01에서 실험집단의 학습만족도가 더 높은 것으로 나타났다. 따라서 성별에 관계없이 실험수업이 학습만족도 영역에서 효과가 있었다고 볼 수 있겠다.

다. 하위 영역간의 상관관계

학습만족도에 속하는 ‘학습의 가치’와 ‘인지적 내용 학습’ 사이의 검사 결과의 상관관계를 살펴보면, <표 IV-6>에 나타난 바와 같이 실험집단과 비교집단에서 남·여 학생 모두 상관계수가 0.970 이상으로 강한 양의 상관관계를 보였다. 즉, 미분개념의 가치를 인식한 정도가 높은 학생

<표 IV-5> 성별에 따른 학습만족도의 t-검증 결과

하위영역	성별	집 단	N(사례 수)	M(평균)	SD(표준편차)	t	p(유의확률)
학습의 가치	남	실험집단	17	3.18	0.12	6.289**	0.000
		비교집단	17	2.79	0.14		
	여	실험집단	17	3.35	2.92	5.777**	0.000
		비교집단	17	0.10	0.20		
	전체	실험집단	34	3.26	0.10	6.518**	0.000
		비교집단	34	2.86	0.16		
인지적 내용 학습	남	실험집단	17	3.10	2.82	5.472**	0.000
		비교집단	17	0.10	0.12		
	여	실험집단	17	3.35	0.06	8.707**	0.000
		비교집단	17	2.91	0.14		
	전체	실험집단	34	3.23	0.07	7.400**	0.000
		비교집단	34	2.86	0.13		

* $p<0.05$, ** $p<0.01$

일수록 수업을 통해 미분 개념에 대한 이해 정도와 학습한 내용의 습득 정도가 높은 것으로 나타났다.

<표 IV-6> 두 하위 영역에 관한 검사 결과의 상관관계

집 단	구분	N (사례수)	'학습의 가치'와 '인지적 내용 학습' 상관관계	
			상관계수	p(유의확률)
실험 집단	남	17	0.970**	0.000
	여	17	0.977**	0.006
	총	**34**	**0.973****	**0,000**
비교 집단	남	17	0.979**	0.000
	여	17	0.977**	0.006
	총	**34**	**0.972****	**0.000**

* p<0.05 , ** p<0.01

3. 학습이해도와 학습만족도 사이의 상관관계

두 집단의 학습이해도와 학습만족도의 검사 결과 사이의 상관관계를 살펴보는 데 있어서, 학습만족도는 '학습의 가치'와 '인지적 내용 학습'의 하위 영역으로 나눠져 있으므로 학습이해도와 '학습의 가치' 영역의 상관관계, 학습이해도와 '인지적 내용 학습' 영역의 상관관계로 나누어 살펴보았다.

우선, 학습이해도와 '학습의 가치' 영역의 상관관계를 살펴보면 <표 IV-7>에서 나타난 바와 같이, 실험집단과 비교집단의 상관계수는 각각 0.534, 0.586이고 유의확률이 각각 0.001, 0.000으로 전체적으로 양의 상관관계를 보였다. 그러나 성별로 나누어 살펴보면 남학생의 경우 실험집단과 비교집단의 상관계수가 각각 0.666, 0.710으로 여학생의 상관계수 0.435, 0.444보다 높은 것으로 나타났다. 또, 남학생의 경우 유의확률이 각각 0.004, 0.001로 유의수준 0.01에서 양의 상관관계를 보였으나 여학생의 경우에는 유의확률이 각각 0.081, 0.074로 유의수준 0.01에서 상관관계가 없는 것으로 나타났다. 즉, 실험집단과 비교집단 모두 남학생의 경우 미분 개념의 이해도가 높을수록 미분 개념에 대한 가치 인식 정도도 높았으나, 여학생의 경우에는 통계적으로 미분 개념의 이해 정도와 미분 개념에 대한 가치 인식 정도 사이에 상관관계가 없는 것으로 볼 수 있다.

또, 학습이해도와 '인지적 내용 학습' 영역의 상관관계를 살펴보면 <표 IV-7>에서 나타난 바와 같이, 실험집단과 비교집단의 상관계수가 각각 0.554, 0.583이고 유의확률이 각각 0.001, 0.000으로 전체적으로 양의 상관관계를 보였다. 그러나 성별로 나누어 살펴보면 남학생의 경우 실험집단과 비교집단의 상관계수가 각각 0.698, 0.697로, 여학생의 실험집단과 비교집단의 상관계수 0.456, 0.454보다 상대적으로 높은 것으로 나타났다. 이때, 남학생의 경우 두 집단의 유의확률이 각각 동일하게 0.002로 유의수준 0.01에서

<표 IV-7> 두 영역의 검사 결과 사이의 상관관계

집 단	구분	N (사례수)	학습이해도와 '학습의 가치'		학습이해도와 '인지적 내용 학습'	
			상관계수	p(유의확률)	상관계수	p(유의확률)
실험집단	남	17	0.666	0.004**	0.698**	0.002
	여	17	0.435	0.081	0.456	0.066
	총	**34**	**0.534**	**0.001****	**0.554****	**0.001**
비교집단	남	17	0.710	0.001**	0.697**	0.002
	여	17	0.444	0.074	0.454	0.067
	총	**34**	**0.586**	**0.000****	**0.583****	**0.000**

* p<0.05 , ** p<0.01

양의 상관관계를 보였으나, 여학생의 경우에는 유의확률이 각각 0.066, 0.067로 유의수준 0.01에서 상관관계가 없는 것으로 나타났다.

특히, 여학생의 경우 남학생에 비해 상대적으로 학습만족도 검사 결과가 높게 나타났음에도 불구하고, 학습이해도와의 상관관계는 없는 것으로 나타났다. 이는 여학생의 학습만족도의 검사 결과에 따르면, 학습이해도의 검사 결과를 상・중・하 그룹으로 나누어 살펴보았을 때 상과 중 그룹 학생들의 학습만족도가 두 그룹 모두 별 차이 없이 비교적 높게 나타났기 때문으로 보인다.[8] 전반적으로 여학생의 경우, 통계적으로는 학습이해도와 학습만족도의 상관관계가 없다고 하겠으나, 실제적으로는 학습이해도와 학습만족도 사이에는 서로 영향을 미치는 것으로 볼 수 있다. 이는 학습이해도가 하 수준인 여학생들의 경우 학습만족도가 대체적으로 낮은 것으로 나타났으나, 학습이해도가 상과 중 수준인 여학생들의 경우에는 학습이해도 결과와 상관없이 학습만족도의 결과가 대체적으로 양호한 것으로 나타났기 때문이다.

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구 결과를 토대로 도출될 수 있는 결론 및 제언을 정리해 보면 다음과 같다.

첫째, 미분 수업에서 현실 또는 발생 맥락을 수반하는 실례를 통하여 미분 개념을 다룸으로써 미분계수, 도함수, 미분가능성과 같은 미분 내용을 바르게 이해할 수 있도록 한다.

전반적으로, 학습이해도에 관한 검사 도구는 미분 개념(평균변화율, 미분계수, 접선, 미분가능성, 도함수)을 정확히 이해하고 정의를 이용하여 주어진 문제를 해결할 수 있는 문항에 중점을 두었다. 본 연구 결과, 실험집단의 정답률이 비교집단의 것에 비해 13.6% 더 높게 나타났는데 이는 한 마디로 실험집단이 비교집단에 비해 전반적으로 미분 개념에 대한 이해도가 더 높은 것으로 볼 수 있다. 구체적인 예로, 미분계수의 정의를 물은 3번 문항과 순간변화율(미분계수)의 개념을 올바르게 이해하고 있는지를 물은 5번 문항에 대한 실험집단의 정답률이 비교집단의 것보다 각각 20.6%, 14.7%씩 더 높은 것으로 나타났다. 즉, 실험수업에서는 연구자인 교사가 미분계수를 역사 발생적 과정에 따른 내용 전개 순서대로 수업을 진행하고, 미분개념의 근간이 되는 평균변화율과 순간변화율 개념의 이해를 돕기 위해 과속단속카메라의 원리에 관한 읽기 자료를 제시하였다. 이러한 수업 활동이 순간변화율(미분계수)의 개념을 이해하는데 긍정적인 영향을 미쳤을 것으로 예측된다. 한편, 함수의 연속성과 미분가능성의 정의를 정확히 알고 이를 이용하여 문제를 해결할 수 있는 지를 물은 6-(2)번 문항에서 실험집단이 비교집단에 비해 20.6% 더 높은 정답률을 보였다. 이는 해당 문항의 물음 내용이 수업 시간에 다루거나 교과서에 일반적으로 제시되지 않은 문항이라는 점을 감안해 볼 때, 학생들은 비록 평소 다루지 않는 문항일지라도 미분계수에 관해 바르게 이해한다면, 이를 토대로 해당 문항을 비교적 쉽게 해결할 것으로 상정해 볼 수 있다.

본 연구에서는 미분계수와 도함수의 정의에 대한 학습자의 이해 정도를 가늠하는 데 중점을 두었는데, 이를 근간으로 도함수의 활용까지 포함하여 미분 전반에 관한 수업을 진행한다면 미분 개념에 관한 이해를 강화하는 데에 보다 구

8) 비교집단의 학습만족도에서 상과 중 그룹의 평균이 각각 3.13과 3.10로 거의 차이가 없고, 실험집단의 학습만족도에서도 상과 중 그룹의 평균도 각각 3.59와 3.58로 거의 차이가 없음.

체적이고 유용한 정보를 얻을 수 있을 것이다. 또한, 역사 발생적 원리에 근거하여 미분과 관련된 수학사 고찰을 통해 미분 개념의 발생 과정에서 등장하는 다양한 문제 상황들을 학습자의 환경에 적합하게 재구성하여 학생들로 하여금 이를 직접 해결해 보는 경험을 제공한다면 미분 개념을 보다 충실히 이해하는데 보탬이 될 것이다.

둘째, 미분 개념을 도입하여 수업하는 상황에서 GeoGebra와 같은 공학적 도구를 활용함으로써 미분 개념을 이해하는데 수월함과 효율적인 측면이 부과되도록 한다.

본 연구 결과, 평균변화율의 기하학적 의미인 할선과 미분계수의 기하학적 의미인 접선과 관련된 4번 문항과 도함수의 그래프 개형을 고르는 7번 문항에서 실험집단의 정답률이 비교집단의 것보다 각각 17.7%, 14.8%씩 더 높게 나타났다. 이는 실험집단이 비교집단에 비해 평균변화율과 순간변화율(미분계수)의 대수 표현과 그에 대응하는 할선과 접선의 기하 표현의 연결이 비교적 양호한 것으로 간주할 수 있다. 이종희(1999)는 수학적 개념을 이해한다는 것은 그 개념의 정의 뿐 아니라 그 개념의 다양한 표현을 알고 표현의 변형 및 표현 사이의 번역이 가능해야 한다고 하였다. 이처럼, 본 연구에서 GeoGebra 프로그램의 역동적인 시각적 기능을 통해 직관적인 이해가 가능하도록 함으로서 대수 표현과 기하 표현 사이의 연계가 잘 이루어졌으며, 이와 같은 활동이 미분 개념을 바르게 이해하는데 도움을 준 것으로 볼 수 있다. 결국, Tall & Vinner(1981)의 주장처럼, 복잡하고 추상적인 수학적 아이디어나 개념에 대해 구체적이고 직관적인 조작을 통하여 학습자는 자신의 개념 이미지를 보다 충분히 그리고 풍부히 구축하게 되어 올바른 개념 형성에 도움이 될 것이다.

또한, 본 연구에서는 GeoGebra를 활용한 시각화 도구를 학생들에게는 간단한 조작만을 유도하였지만, 학습자가 시각화 도구를 제작하는데 직접 참여하게 하는 것도 의미 있는 일일 것이다. 학습자는 시각화 도구의 제작 과정에서 수학적 개념과 원리를 보다 신중히 탐색, 고찰하는 기회를 갖게 되고 궁극적으로 관련 내용을 보다 깊이 있게 이해하는데 도움이 될 것으로 판단된다. 특히, 2015 개정에 따른 수학과 교육과정에서 '정보 처리'를 하나의 핵심역량으로 선정하여 강조하고 있는 만큼, 미분 등의 수학 내용을 다루는 데 적절하고 용이한 공학적 도구는 무엇인지, 이를 어떻게 활용해야 하는지 등에 관한 관심 및 탐색을 늦추지 말아야 할 것이다. 따라서 후속 연구를 통해 미분 등의 수학 내용에서 개념 이해와 문제해결을 위한 다양한 시각화 도구를 개발하여 실험수업 적용 및 분석을 실시해 봄으로써 공학적 도구 활용의 유용성과 효율성 등을 탐색해 볼 필요가 있다.

셋째, 학생들의 학업 성취 수준을 고려하여 그에 부합하는 공학적 도구의 활용, 문항의 난이도 등을 차별화하여 미분 수업을 진행하도록 한다.

본 연구 결과, 학습이해도에서 성별에 관계없이 모든 문항에서 실험집단의 정답률이 비교집단의 정답률보다 높게 나타났다. 그러나 두 집단의 t-검증 결과, 상과 중 수준의 그룹에서는 실험수업이 학습자에게 미분 개념을 이해하는데 보다 도움을 준 것으로 나타났으나 하 수준의 그룹에서는 실험집단과 비교집단 사이의 t-검증($p>0.05$) 결과, 유의미한 차이가 없는 것으로 나타났다. 이러한 연구 결과는 하 수준의 학업 성취를 보이는 학생들의 미분 개념의 이해를 돕기 위해서는 이들을 위한 별도의 수업 지도 방안이 마련되어야 함을 의미한다. 2015 개정에 따른 수학과 교육과정의 <교수·학습 및 평가의 방향> 부문에 따르면, 학업 성취 능력 정도에 따라 성취기준 목표 및 내용은 동일시하되 이를 위한 접근 방식이나 방법, 또한 문제 유형 및 난이도

등을 차별화 하도록 하고 있다(교육부, 2015). 따라서 미분 개념을 도입하는 상황에서 상과 중 수준의 학생들과 마찬가지로 하 수준의 학생들에게도 직관적인 이해를 돕기 위해 공학적 도구를 활용하되 이들의 학업 성취 및 인지 수준에 부합하는 시각화 도구를 마련할 필요가 있다.

또한, 문제해결 시 상과 중 수준의 학생들과 마찬가지로 문제 풀이 과정에서 정의의 사용을 강조하되, 하 수준의 학생들에게는 이러한 학습 활동을 보다 반복하여 실시함으로써 정의를 사용하여 주어진 문제를 해결하는 것에 익숙해지도록 하는 것이 바람직할 것으로 보인다. 위와 같이 학업 성취 수준에 따른 수업 지도 방안 및 관련 자료 개발의 구현을 활성화시키기 위해서는 교사를 포함한 전문가들의 노력이 요구될 것이다. 지금까지 미분 개념의 오류 유형 자체를 분석한 선행 연구들은 비교적 활발히 수행된 편이지만, 학생들의 학업 성취 수준에 따른 미분 개념의 오류 유형을 분석한 연구는 흔치 않다. 하 수준 학생들의 미분 개념의 이해를 증진시키기 위해서는 무엇보다 그들의 현 학습 상태를 정확히 파악하고, 학업 성취 수준에 따른 하 수준의 학생들이 미분 개념을 이해하는데 있어서 실제로 어떤 어려움을 겪고 있는지, 그 원인은 무엇인지 등을 다루는 연구가 뒤따라야 할 것이다.

넷째, 미분 수업 상황에서 다양하고 풍부한 읽기자료를 제공함으로써 미분 개념의 유용성과 가치를 인식할 수 있게 이끌도록 한다.

본 연구 결과, 실험집단과 비교집단 모두 남학생의 경우 학습이해도와 학습만족도 사이에 높은 상관관계를 보였으며, 여학생의 경우 학습이해도 결과를 기준으로 하여 상・중・하 수준의 그룹으로 나누었을 때, 하 그룹의 학생들을 제외하고 상과 중 수준의 그룹 학생들에게서는 학습이해도 결과에 상관없이 모두 학습만족도가 높게 나타났다. 즉, 학습이해도와 학습만족도 사이의 상관분석 결과, 실험집단과 비교집단 모두 성별에 관계없이 양의 상관관계가 있는 것으로 나타났다. 또, 본 연구에서의 학습만족도의 두 하위 영역인 ‘학습의 가치’와 ‘인지적 내용 학습’의 상관관계를 분석한 결과, 실험집단과 비교집단 모두 상관계수가 0.97 이상으로 매우 높은 상관관계를 나타냈다. 한 마디로, 미분 개념의 수학적 가치를 높게 인지한 학생이 학습에 대한 만족도도 높으며, 또한 지식적 측면에서 미분개념에 대한 이해도도 높은 것으로 볼 수 있다. 이는 학습이해도와 학습만족도(즉, ‘학습의 가치’, ‘인지적 내용 학습’ 영역) 사이에 밀접한 관계가 있으며 상호 유기적으로 작용하여 하나의 영역이 다른 영역에 영향을 주었다고도 볼 수 있다. 따라서 미분 개념의 가치인식 정도를 높이고자 제공한 읽기자료가 학생들로 하여금 미분 개념을 올바르게 이해하는데 긍정적인 영향을 주었다고 볼 수 있다.

특히, 2015 개정에 따른 수학과 교육과정에서 ‘태도 및 실천’ 역량을 새롭게 강조하고 있는데, 이는 구체적으로 수학을 생활 주변과 사회 및 자연 현상과 관련지어 지도하여 수학의 필요성과 유용성을 알게 하고, 수학의 역할과 가치를 인식할 수 있게 하는 점을 강조하였다(교육부, 2015). 또, ‘미적분Ⅰ’ 과목의 <교수・학습 방법 및 유의 사항>에 ‘도함수의 다양한 활용을 통해 미분의 유용성과 가치를 인식하게 한다.’(교육부, 2015, p.82)가 제시되어 있다. 그런데, 이러한 정의적 영역에 해당하는 역량을 실제로 교과서를 포함한 교수・학습 자료에 구체적으로 구현하거나 수업 상황에서 적절히 드러나도록 지도하는 것은 쉽지 않다. 본 연구의 경우, 실생활에 적용된 미분 개념을 소개하여 미분 학습의 필요성을 인식하도록 이끄는 읽기자료(가령, 음원과 미분, 경제와 미분, 인터체인지와 미분 등)를 마련하여 실험수업을 하였다. 그 결과 미분 개념의 필요성

과 유용성에 대한 인식이 미분 개념의 올바른 이해에 긍정적인 영향을 미친 것으로 판단된다.

따라서 교사들은 미분 개념의 유용성과 가치 함양을 뒷받침할 다양하고 풍부한 자료들을 마련하여 제공할 필요가 있는데, 이를 교사의 몫으로만 돌리기보다는 시도교육청 및 국가 수준의 교육 관련 기관으로부터 제공받을 수 있는 방안이나 정책도 필요할 것으로 판단된다. 그럼으로써 교사를 주축으로 학습자로 하여금 미분 학습에 보다 적극적으로 참여토록하고 미분 개념에 대한 견고한 이해를 토대로 미분 개념의 유용성과 가치를 인식할 수 있기를 기대하며, 본 연구가 이러한 인식과 노력을 이끄는 시발점이 되기를 바라는 바이다.

참고문헌

강향임(2012). 수학적 모델링 과정에서 접선 개념의 재구성을 통한 미분계수의 재발명과 수학적 개념 변화. **학교수학, 14**(4), 409-429.

강향임(2013). **발생적 모델링을 활용한 미적분 개념의 구성**. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정** (교육과학기술부 고시 제 2011-361호 별책 8). 서울: 교육과학기술부.

교육부(2015). **수학과 교육과정** (교육부 고시 제 2015-74호 별책 8). 세종: 교육부.

김동엽(2001). **문제중심 수업과 지시적 수업이 학습자의 인식론적 신념에 따라 수업의 유의미성 지각 및 학업성취에 미치는 효과**. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

김정희, 조완영(2006). 고등학교 학생들의 미적분 개념 이해 및 오류유형 분석. **과학교육연구논총, 22**(1), 87-97.

김준송(2013). **융합인재교육(STEAM)과정을 적용한 수학수업이 영재학생의 학습만족도와 학업성취도에 미치는 영향**. 고려대학교 교육대학원 석사학위논문.

김창동 외 14인(2015). **미적분Ⅰ**. 서울: ㈜교학사.

마윤심(2010). **미분개념의 오류유형 분석 및 오개념 극복을 위한 GSP활용 수업의 효과**. 연세대학교 교육대학원 석사학위논문.

박성희(2011). **도움닫기를 활용한 수학교수학습이 학습만족도와 수학적 성향에 미치는 영향**. 강원대학교 교육대학원 석사학위논문.

박희진(2007). **학생들의 미분개념 오류유형에 대한 교사들의 인식조사**. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

오혜경(2008). **고등학교수학에서의 미적분단원의 오류에 관한 연구**. 전남대학교 교육대학원 석사학위논문.

우정호, 민세영(2002). 역사발생적 수학 학습-지도 원리에 관한 연구. **대한수학교육학회논문, 12**(3), 409-424.

우정호(2011). **수학 학습-지도 원리와 방법**. 서울: 서울대학교 출판부.

이상구, 장지은, 김경원, 박경은(2014). GeoGebra와 미분적분학 개념의 시각화. **수학교육 논문집, 28**(4), 457-474.

이정곤(2012). GeoGebra 환경에서 정적분을 이용한 자연로그의 개념이미지 형성 학습 개선방안. **한국수학사학회지, 25**(1), 71-88.

이종희(1999). **이해에 대한 수학교육적 고찰**. 서울대학교 대학원 박사학위논문.

이현주, 류중현, 조완영(2015). 통합적 이해의 관점에서 본 고등학교 학생들의 미분계수 개념 이해 분석. **수학교육 논문집, 29**(1), 131-155.

이호철(2005). **미분문제 해결과정에서 발생하는 오류에 관한 연구**. 계명대학교 교육대학원 석사학위논문.

임연휘, 표용수(2013). 대학 입학 예정자들의 함수 및 미분의 기초개념 이해에 대한 오류 분석. **한국학교수학회논문집, 16**(2), 435-457.

임재훈, 박교식(2004). 학교 수학에서 접선 개념 교수 방안 연구. **수학교육학연구, 14**(2), 171-185.

전영배, 노은환, 최정숙, 김대의, 정의창, 정찬식, 김창수(2009). 미분 문제해결 과정에서의 오류 분석. **한국학교수학회논문집, 12**(4), 545-562.

정가람(2013). **GeoGebra를 활용한 구분구적법 지도**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

정다희(2011). **도함수의 그래프 이해에서 발생하는 오류 및 오개념에 관한 연구: 고등학교 3학년 미분단원 중심으로**. 서강대학교 교육대학원 석사학위논문.

정연준(2010). 미분계수의 역사적 발달 과정에 대한 고찰. **학교수학, 12**(2), 239-257.

정자욱(2012). **GeoGebra를 이용한 미적분수업의 질적 사례연구**. 건국대학교 석사학위논문.

지상호(2010). **선택과정「미분과 적분」의 미분법 단원에 대한 고등학교 3학년 학생들의 이해 실태 분석**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문

최나영(2001) **미분개념에 대한 오류와 오개념에 관한 연구**. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

홍선주(2013). **미분개념에 대한 학생들의 학습경향 및 오류분석과 지도방안 연구 -고등학교 2학년 문과학생을 대상으로: 이과학생들과 비교하여-**. 중앙대학교 교육대학원 석사학위논문.

Aleamoni, L. M. (1981). Student ratings of instruction. *Handbook of teacher evaluation*, 110, 145.

Boyer, C. B. (1959). *The History of Calculus of the Calculus and its Conceptual Development*. 김경화(역)(2004). 미적분학사-그 개념의 발달. 서울: 교우사.

Dunham, W. (2005). *The calculus gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue*. 권혜승(역)(2011). 미적분학 갤러리. 서울: 한승.

Giambrone, T. M. (1983). *A Philosophy Study of Epistemological nature of the Attainment of Understanding Mathematics*. Doctoral Dissertation, State University of New York at Buffalo.

Nehari, M. & Bender, H. (1978). Meaningfulness of a learning experience: A measure for education outcomes in higher education. *Higher Education, 7*(1), 1-11.

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational Studies in Mathematics, 14*(3), 235-250.

Sobral, D. T. (1992). Self-report visual scale of course appeal. *Higher Education, 23*(3), 321-329.

Tall, D. O. (1986). *Building and testing a cognitive approach to the calculus using interactive computer graphics*. Doctoral Dissertation, University of Warwick.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics, 12*(2), 151-169.

White, P. (1990). Is calculus in trouble. *Australian Senior Mathematics Journal, 4*(2), 105-110.

An Experimental Study on the Understanding of the Differential Concept Based on the Historical-Genetic Process Using a Technological Device[9)]

Hwang, Hye Jeang (Chosun University)
Kim, Mi Hyang (Gwangju Science Academy)

In school mathematics, the definition and concept of a differentiation has been dealt with as a formula. Because of this reason, the learners' fundamental knowledge of the concept is insufficient, and furthermore the learners are familiar with solving routine, typical problems than doing non-routine, unfamiliar problems. Preceding studies have been more focused on dealing with the issues of learner's fallacy, textbook construction, teaching methodology rather than conducting the more concrete and efficient research through experiment-based lessons.

Considering that most studies have been conducted in such a way so far, this study was to create a lesson plan including teaching resources to guide the understanding of differential coefficients and derivatives. Particularly, on the basis of the theory of Historical Genetic Process Principle, this study was to accomplish the its goal while utilizing a technological device such as GeoGebra.

The experiment-based lessons were done and analyzed with 68 first graders in S high school located in G city, using Posttest Only Control Group Design. The methods of the examination consisted of 'learning comprehension' and 'learning satisfaction' using 'SPSS 21.0 Ver' to analyze students' post examination. Ultimately, this study was to suggest teaching methods to increase the understanding of the definition of differentials.

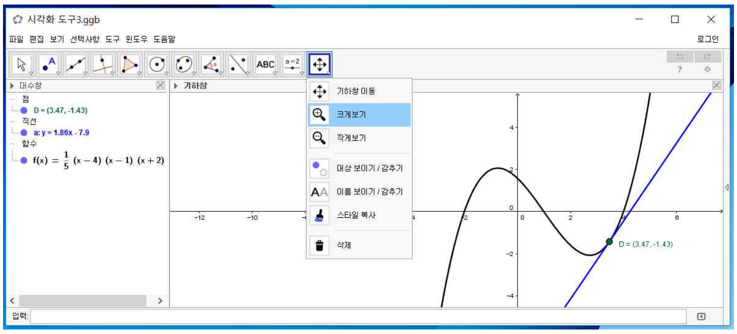
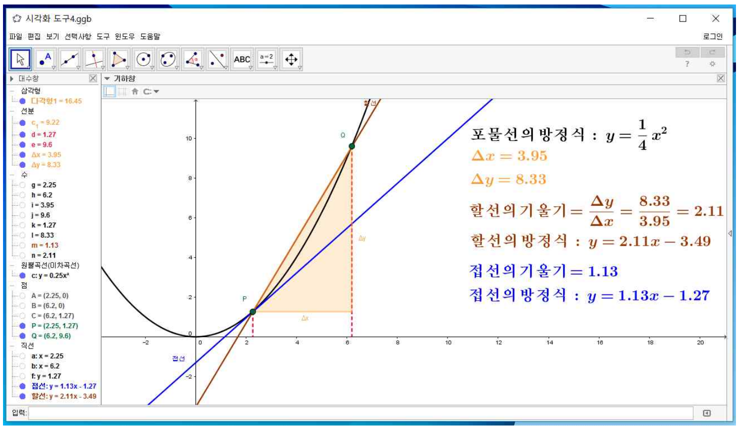
* Key Words : Differential Concept(미분개념), Understanding(이해), Historical-genetic Process(역사 발생적 과정), Technological Device(공학적 도구)

논문접수 : 2016. 5. 9
논문수정 : 2016. 5. 30
심사완료 : 2016. 5. 30

9) This study was supported by research fund from Chosun University, 2015

<부록1> 실험수업 2차시 수업 지도안

2차시 주제	미분계수	차시	2/4	장소	컴퓨터실
차시 학습 목표	• 미분계수의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다. • 미분계수의 기하학적 의미를 알 수 있다.				

수업 과정	학습과정	교수-학습 활동	학습자료
도입 (5분)	▶동기유발	• 교사는 전시수업 과정 중 '정리'에서 다루었던 두 종류의 과속단속 카메라의 원리에 대해 발문하고 학생들이 자유롭게 답하도록 한다. • 두 종류의 과속단속 카메라의 장점과 단점에 대해 발문하고 학생들이 자유롭게 답하도록 한다.	읽기자료2
	▶ 학습목표 제시	• 본 차시 학습목표를 확인한다.	판서
전개 (40분)	▶ 순간변화율과 접선의 관계 (국소선형)	• 교사는 학생들에게 '시각화 도구3' 파일을 열어 곡선 위의 임의의 점 D를 중심으로 그래프를 충분히 크게 확대해보게 한 후 점 주변의 곡선과 접선의 모양을 관찰하는 활동을 하게 한다.  • 교사는 '시각화 도구3'의 활동을 통해 학생들이 순간적인 운동과 접선사이의 관계를 직관적으로 이해하게 한다.	시각화 도구3
	▶순간변화율 개념을 비의 극한 개념과 연결하여 설명	• 교사는 학생들에게 '시각화 도구4' 파일을 열게 하고 점 Q를 곡선을 따라 점 P로 이동시키면서 변화하는 직선 $\overline{PQ}$의 모양을 관찰하는 활동을 하게 한다.  • 교사는 곡선 $y=f(x)$위의 두 점 P, Q에 대해서 점 Q가 점 P로 한없이 가까워질 때, 두 점 P, Q를 지나는 직선(곡선의 할선)의 극한이 접선이 됨을 언급하고 학생들이 이를 직관적으로 이해하게 한다. • 교사는 '시각화 도구4'의 활동을 통해 학생들로 하여금 평균변화율(비)의 극한개념과 순간변화율 개념이 직관적으로 연결되도록 한다.	시각화 도구4

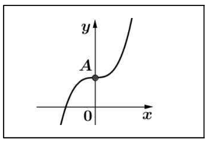
수업 과정	학습과정	교수-학습 활동	학습자료
	▶순간변화율(미분계수)과 접선의 정의	• 교사는 ‘PPT1’을 통해 순간변화율 또는 미분계수의 정의를 학생들이 인지하도록 한다. **PPT1** **미분계수의 정의** 함수 $y=f(x)$에서 $x=a$에서의 미분계수는 $f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$ $=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ • 교사는 ‘PPT2’를 통해 학생들에게 미분계수의 기하학적 의미를 설명한다. • 교사는 ‘PPT3’를 통해 접선의 정의를 학생들이 인지하도록 한다. 【지도상 유의사항】 - 교사는 ‘시각화 도구4’의 활동을 통해 학생들이 직관적으로 이해했던 미분계수의 정의와 접선의 정의를 대수적으로 표현할 때, 기하학적 표현과 잘 연결되도록 한다. - 1차시에서 학생들이 추측했던 접선의 정의와 본시학습을 통해 알게 된 접선의 정의(할선의 극한)를 비교하며 접선의 정의를 정확히 학습하도록 한다. - 교사는 그래프 상에서 미분가능한 점에서는 항상 접선이 존재하지만 그 역은 성립하지 않음을 ‘PPT4’의 반례를 통해 설명한다. ☞ PPT2~PPT4 내용은 생략함.	PPT1 PPT2 PPT3 PPT4
	▶정의를 이용하여 미분계수 구하기	• 교사는 교과서의 ‘예제2’를 미분계수의 정의를 이용하여 학생들과 함께 해결해 본다. 예제2. 함수 $f(x)=x^2+1$의 $x=3$에서의 미분계수를 구하여라. <풀이> 생략 • 교사는 학생들이 교과서의 ‘문제3’과 ‘문제4’를 평균변화율과 미분계수의 정의를 이용하여 각자 해결해보도록 한다. 문제3. 다음 함수의 $x=-3$에서의 미분계수를 구하여라. (1) $f(x)=x^3$ (2) $f(x)=x^2-2x$ 문제4. 함수 $f(x)=x^2+x$에 대하여 다음 물음에 답하여라. (1) x의 값이 0에서 2까지 변할 때, 함수 $f(x)$의 평균변화율을 구하여라. (2) (1)에서 구한 함수 $f(x)$의 평균변화율과 $x=a$ (단, $0<a<2$)에서의 미분계수가 같을 때, a의 값을 구하여라. 【지도상 유의사항】 - 학생들이 문제를 해결하는 동안 교사는 순회하며 공식에 대입하여 문제를 해결하는 학생을 발견 시 정의를 이용하여 문제를 해결하도록 지도한다.	
정리 (5분)	▶본시학습 내용정리	• 미분계수(순간변화율)의 정의를 확인해본다. • 접선의 정의를 확인해본다. • 미분계수의 기학적 의미를 확인해본다.	
	▶미분계수의 역사 발생적 과정	• 교사는 미분계수 개념의 역사발생적 과정과 1·2차시에 학습한 내용을 순서대로 간략하게 정리한 ‘읽기자료3’을 학생들에게 배부하여 각자 읽어보게 한다. ☞ ‘읽기자료3’은 본문의 <표 Ⅲ-4>를 참고하여 제작함.	읽기자료3

<부록 2> 사후검사 문항

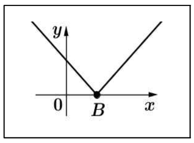
학습이해도 문항

1. 다음 그래프의 주어진 점 A, B에서 접선이 존재한다면 접선을 그리고 접선이 존재하지 않는 경우에는 그 이유를 쓰시오.

(1)



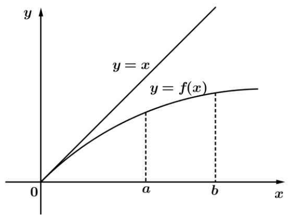
(2)



2. 함수 $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ 에서 x 의 값이 a 에서 $a + \triangle x$ 까지 변할 때의 평균변화율을 구하고 그 과정을 쓰시오.

3. 미분계수의 정의를 쓰시오.

4. 아래 그림은 미분가능한 함수 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. $0 < a < b$ 일 때, $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} > f'(b)$ 가 성립하는지 성립하지 않은지 쓰고 그 이유를 쓰시오.



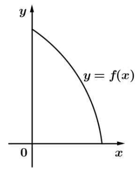
5. 어느 실험실에서 세포 분열을 연구하고 있다. 세포수가 매초 $x^2 + 3x$ 만큼 증가한다고 한다. 그렇다면 $x = 5$(초)일 때 세포수의 증가율은 얼마인지 구하고 그 과정을 쓰시오.

6. 다음 함수의 [ ]안에 주어진 x 에서 연속성과 미분가능성을 조사하시오.

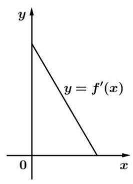
(1) $f(x) = x^2 - 4x + 3\ [x = 2]$

(2) $f(x) = |x^2 - 1|\ [x = 1]$

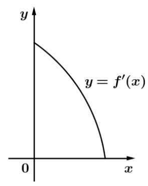
7. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때 도함수 $f'(x)$ 의 그래프 개형으로 가장 적당한 것을 고르고 그 이유를 쓰시오.



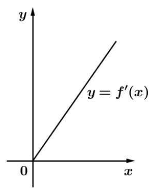
①



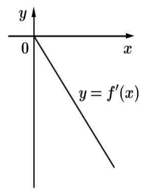
②



③



④



8. 도함수의 정의를 이용하여 $f(x) = \dfrac{1-x}{2+x}$ 일 때, $f'(x)$ 을 구하고 그 과정을 쓰시오.

학습만족도 문항

1. 이번 수업은 매우 가치 있는 학습경험이었다.
2. 이번 수업에 소요된 시간과 노력은 충분한 가치가 있었다고 생각한다.
3. 이번 수업을 통한 학습경험은 의미가 없었다.
4. 이번 수업을 통해 보람을 느꼈다.
5. 이번 수업은 감동적이지 못했다.
6. 이번 수업은 향후 학업성취도 향상에 도움이 될 것이다.
7. 정규 수학 수업도 이러한 수업방식을 사용하는 것이 좋다고 생각한다.
8. 친구들에게 이러한 수업을 받도록 추천해주고 싶지 않다.
9. 이번 수업을 통해 내가 얻은 것은 별로 없다.
10. 이번 수업은 중요한 미분개념의 기초 지식을 배우는데 도움을 주었다.
11. 이번 수업을 통해서 미분개념을 보다 넓은 관점에서 파악할 수 있게 되었다.
12. 이번 수업을 통해서 미분개념에 대한 지식을 그다지 많이 얻지 못하였다.
13. 이번 수업에서의 문제해결을 통해 미분개념의 원리를 더 잘 이해할 수 있었다.
14. 이번 수업을 통해서 미분개념에 대해 그다지 많이 이해하지 못했다.
15. 이번 수업을 통해서 미분 분야와 관련된 내용을 더 깊게 이해할 수 있었다.
16. 이번 수업은 미분 분야의 전반적인 내용을 학습하는데 도움이 되지 못하였다.
17. 이번 수업을 통해서 미분개념을 훨씬 더 명확하고 통합적으로 이해하게 되었다.
18. 이번 수업에서 학습한 내용들 사이의 관계를 알 수 없고 제시된 내용도 제대로 이해할 수 없었다.