

# 보 구조물의 단면 질량 및 탄성 특성

## Cross-Sectional Mass and Elastic Properties of Slender Structures

### 1. 머리말

기계, 항공, 토목 및 건축공학 등의 분야에서 보는 가장 기본적인 부재중의 하나이다. 예를 들면, 토목공학 분야의 다리 및 건축공학에서의 많은 부재들이 보 구조물의 형태를 취하고 있다. 특히 블레이드 형태의 구조물 및 다리의 단면은 여러 가지 다양한 특성들을 계산하여야만 그 특성을 파악할 수 있다. 본 기사에서는 일반적인 보 구조물의 경우에 단면 특성들의 종류에 대해 알아보고 계산하는 방법을 소개하고자 한다.

일반적인 보 구조물에 대한 좌표계 및 대표적인 단면 탄성특성을 그림 1에 도시하였다. 여기서 오른쪽 그림은 전단중심(shear center) 및 탄성중심(elastic center)에 대한 예를 보여주고 있다. 단면 특성은 크게 동적 거동에 영향을 주는 질량특성과 정적/동적 거동에 영향을 주는 탄성특성으로 구분할 수 있다. 대표적인 특성들은 아래와 같다.

#### 질량특성

- 단위길이당 질량 (Mass per unit length)
- 질량중심 (Center of mass or Center of gravity)
- 주 질량관성 모멘트 (Principal mass moment of inertia)

#### 탄성특성

- 4x4 그리고 6x6 등가강성행렬을 이용
- 탄성중심 (Elastic center or Neutral axis)



김 준 식

금오공과대학교 기계시스템공학과 부교수

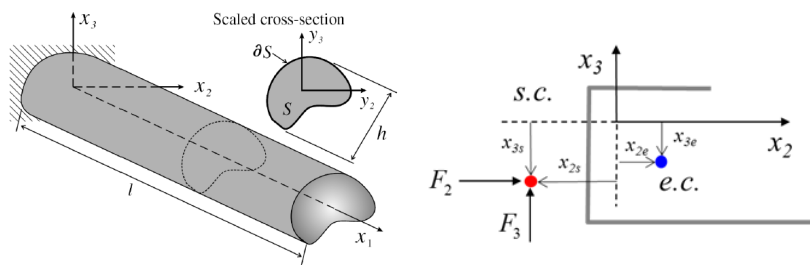


그림 1 보 구조물의 좌표계 및 단면 탄성특성의 예

- 탄성주축 (Principal axis orientation)
- 전단중심 (Shear center)

## 2. 단면 질량특성

질량특성은 관성항을 계산함으로써 파악할 수 있다. 보의 관성항은 3차원 티모센토 보이론에 대해 단면질량, 극관성 모멘트, 관성 모멘트 등을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 m_s &= \langle \rho_s \rangle, \quad S_2 = S_y = \langle \rho_s x_2 \rangle, \quad S_3 = S_x = \langle \rho_s x_3 \rangle, \\
 I_p &= \langle \rho_s (x_2^2 + x_3^2) \rangle \\
 I_{22} = I_{yy} &= \langle \rho_s x_2^2 \rangle, \quad I_{23} = I_{xy} = \langle \rho_s x_2 x_3 \rangle, \\
 I_{33} = I_{xx} &= \langle \rho_s x_3^2 \rangle
 \end{aligned} \tag{1}$$

여기서  $\rho_s$ 는 재료의 밀도를 나타내며  $\langle \rangle$ 는 단면에 대한 적분을 나타낸다. 식 (1)에 주어진 양들은 그림 1에 도시된 것처럼 보의 기본 좌표계를 사용하여 계산되었으며, 이제 이 양들을 이용하여 질량중심 및 주 질량관성 모멘트를 계산할 수 있다.

### 2.1 질량 중심

질량중심은 1차 모멘트를 이용하여 다음과 같이 계산된다.

$$x_{2m} = \frac{S_2}{m_s}, \quad x_{3m} = \frac{S_3}{m_s} \tag{2}$$

여기서  $m_s$ 는 단위길이당 질량이다.

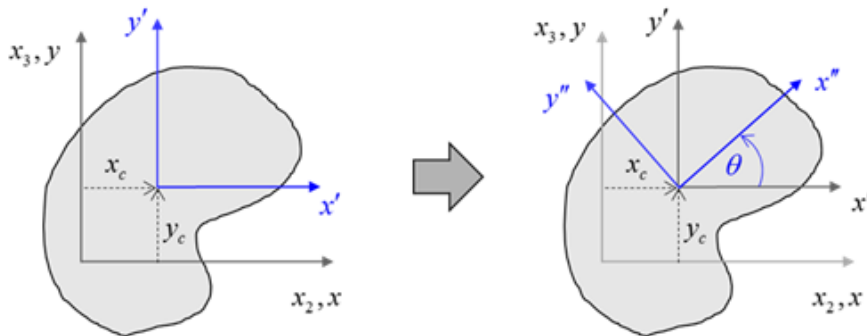


그림 2 질량중심 및 주관성 모멘트 계산을 위한 좌표변환

### 2.2 주 질량관성모멘트

식 (1)에 주어진 질량관성모멘트를 이용하여 주 질량관성모멘트 및 방향을 계산할 수 있다. 먼저 좌표축을 질량중심으로 옮긴 다음 옮긴 좌표축에서의 관성적이 0이라는 조건으로부터 주방향을 찾을 수 있다. 기준좌표계를  $x, y$ 로 표시했을 때, 질량중심에서의 좌표계는  $x', y'$  그리고 회전한 좌표계는  $x'', y''$ 로 표시하였다(그림 2).

먼저  $x-y$ 좌표계와  $x'-y'$ 좌표계의 관계는 다음과 같다.

$$x = x' + x_c, \quad y = y' + y_c \tag{3}$$

식 (3)을 적용하면,  $x'-y'$ 좌표계에서의 단면특성은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 S'_y &= S_y - m_s x_c, \\
 S'_x &= S_x - m_s y_c, \\
 I'_{pp} &= I'_{yy} + I'_{xx} \\
 I'_{yy} &= I_{yy} - 2S_y x_c + m_s x_c^2, \\
 I'_{xx} &= I_{xx} - 2S_x y_c + m_s y_c^2, \\
 I'_{xy} &= I_{xy} - S_x x_c - S_y y_c + m_s x_c y_c
 \end{aligned} \tag{4}$$

식 (4)를 이용하여 질량중심을 찾을 수 있다. 1차 모멘트가 0이라는 조건을 적용하면 즉,

$$S'_y = 0 \rightarrow x_c = \frac{S_y}{m}, \quad S'_x = 0 \rightarrow y_c = \frac{S_x}{m} \tag{5}$$

식 (2)와 동일한 결과임을 확인할 수 있다.

주관성모멘트 및 방향은 회전 좌표변환을 수행하면 계산할 수 있다.  $x'-y'$ 좌표계와  $x''-y''$ 좌표계의 관계는 다음과 같다.

$$x'' = x' \cos \theta + y' \sin \theta, \quad y'' = -x' \sin \theta + y' \cos \theta \quad (6)$$

식 (6)을 적용하면  $x''-y''$ 좌표계에서의 단면특성을 아래와 같이 얻는다.

$$\begin{aligned} S_y'' &= S_y' \cos \theta + S_x' \sin \theta, \\ S_x'' &= S_x' \cos \theta - S_y' \sin \theta, \\ I_{pp}'' &= I_{yy}' + I_{xx}' \\ I_{yy}'' &= I_{yy}' \cos^2 \theta + I_{xx}' \sin^2 \theta + I_{xy}' \sin 2\theta, \\ I_{xx}'' &= I_{xx}' \cos^2 \theta + I_{yy}' \sin^2 \theta - I_{xy}' \sin 2\theta, \\ I_{xy}'' &= \frac{1}{2}(I_{xx}' - I_{yy}') \sin 2\theta + I_{xy}' \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (7)$$

관성적이 0이라는 조건으로부터 주방향을 아래와 같이 결정할 수 있다.

$$I_{xy}'' = 0 \rightarrow \tan 2\theta = \frac{2I_{xy}'}{I_{yy}' - I_{xx}'} \rightarrow \theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{2I_{xy}'}{I_{yy}' - I_{xx}'} \right) \quad (8)$$

식 (8)의 주방향 각과 식 (4)의 결과를 식 (7)에 대입하면 주 관성 모멘트를 얻을 수 있다.

### 3. 단면 탄성특성

탄성특성은 Euler-Bernoulli 보 굽힘 이론과 St. Venant 비

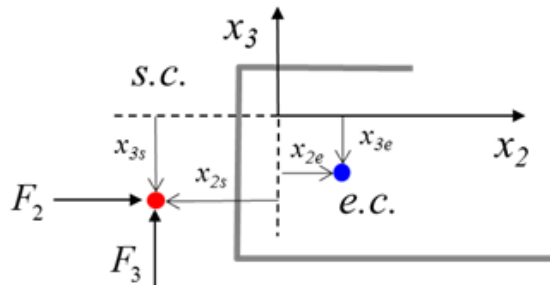


그림 3 박판보에서의 전단중심과 탄성중심

1) 본 기사에서는 강성행렬이 알려져 있다고 가정한다.

틀림 이론에 기초한 4x4 강성행렬과 전단변형을 고려한 6x6 강성행렬을 이용하여 계산할 수 있다. 탄성중심은 고전적인 4x4 강성행렬에서 유도할 수 있는 반면에 전단중심은 6x6강성행렬을 사용하여 계산한다(그림 3). 전단중심의 경우 4x4 강성행렬을 사용하면 다소 복잡한 과정을 거쳐야 한다. 탄성중심과 탄성주축은 고전적인 4x4 행렬로부터 동시에 유도될 수 있는데, 이 과정은 질량특성에서의 그것과 유사하다.

### 3.1 강성행렬

먼저 Euler-Bernoulli(EB) 보 이론의 단면 강성행렬은 3차원 거동을 하는 보에 대하여 계산할 수 있다.<sup>1)</sup> Rankine-Timoshenko(RT) 보와의 구분을 위하여 상첨자로 약어를 표시하였다. 이후로 EB보의 강성행렬은 다음과 같이 표현한다.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_2 \\ M_3 \\ T \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{EB} & K_{12}^{EB} & K_{13}^{EB} & K_{14}^{EB} \\ & K_{22}^{EB} & K_{23}^{EB} & K_{24}^{EB} \\ & & K_{33}^{EB} & K_{34}^{EB} \\ sym & & & K_{44}^{EB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1' \\ u_2'' \\ u_3'' \\ \phi' \end{Bmatrix} \quad (9)$$

한편 RT보의 강성행렬은 전단변형을 포함하므로 6x6로 행렬이 커지며, EB보의 경우와 유사하게 다음과 같이 상첨자 RT로 강성행렬을 표시하였다.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_2 \\ M_3 \\ T \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^{RT} & K_{12}^{RT} & K_{13}^{RT} & K_{14}^{RT} & K_{15}^{RT} & K_{16}^{RT} \\ & K_{22}^{RT} & K_{23}^{RT} & K_{24}^{RT} & K_{25}^{RT} & K_{26}^{RT} \\ & & K_{33}^{RT} & K_{34}^{RT} & K_{35}^{RT} & K_{36}^{RT} \\ & & & K_{44}^{RT} & K_{45}^{RT} & K_{46}^{RT} \\ sym & & & & K_{55}^{RT} & K_{56}^{RT} \\ & & & & & K_{66}^{RT} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1' \\ \beta_2' \\ \beta_3' \\ \phi' \\ \beta_2 + u_2' \\ \beta_3 + u_3' \end{Bmatrix} \quad (10)$$

### 3.2 탄성중심

탄성중심(Elastic center or Neutral axis)은 인장과 굽힘의 연성이 일어나지 않는 축으로 정의할 수 있다. 순수한 인장 변형률만 있다고 가정했을 때, 이 변형률에 의해 발생(연계하여)하는 모멘트와 축력에 의한 모멘트가 같아지게 되는 위치가 바로 탄성중심이 된다(그림 3). 즉,

$$N = K_{11}^{EB} u'_1, M_2 = K_{12}^{EB} u'_1, M_3 = K_{13}^{EB} u'_1 \rightarrow M_2 = -x_{2e} N, M_3 = -x_{3e} N \quad (11)$$

상기의 두 모멘트들이 같다는 조건으로부터 탄성중심은 다음과 같이 찾을 수 있다.

$$x_{2e} = -\frac{K_{12}^{EB}}{K_{11}^{EB}}, x_{3e} = -\frac{K_{13}^{EB}}{K_{11}^{EB}} \quad (12)$$

### 3.3 주 모멘트

탄성 모멘트의 주축을 계산하기 위해서는 식 (9)에 강성 행렬을 좌표 변환(그림 4)하는 것이 필요하다. 이 과정에서 식 (12)에서 구한 탄성중심(elastic center or neutral axis)의 값을 검증할 수 있다.

그림 4에서 x-y좌표계와 x'-y'좌표계의 관계로부터 좌표 변환 후와 전의 모멘트는 다음과 쓸 수 있다.

$$\begin{cases} N' = N \\ M'_y = M_y + x_c N \rightarrow M'_2 = M_2 + x_c N \\ M'_x = M_x - y_c N \rightarrow M'_3 = M_3 + y_c N \\ T' = T \end{cases} \quad (13)$$

한편 x'-y'좌표계와 x''-y''좌표계의 관계로부터

$$\begin{cases} M''_x = M'_x \cos \theta + M'_y \sin \theta \\ M''_y = M'_y \cos \theta - M'_x \sin \theta \end{cases} \quad (14)$$

$$\rightarrow \begin{cases} M''_3 = M'_3 \cos \theta - M'_2 \sin \theta \\ M''_2 = M'_2 \cos \theta + M'_3 \sin \theta \end{cases}$$

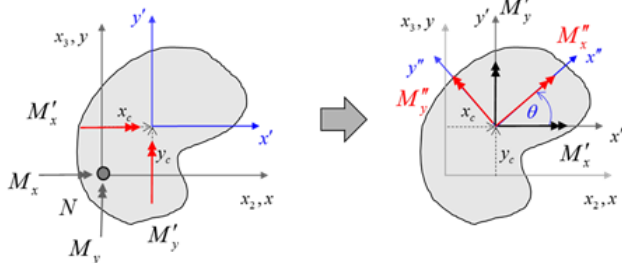


그림 4 주 모멘트 계산을 위한 탄성중심에 관한 회전

식 (13)과 식 (14)에서 상첨자 ‘와 “은 미분이 아님에 주의해야 한다.

### 3.4 전단중심

고전적인 전단중심의 정의는 횡방향 힘이 가해졌을 때 순수 굽힘 변형을 일으키는 위치이다. 하지만 복합재료의 경우에는 굽힘에 의해서도 비틀림이 발생할 수 있기 때문에 정의에 약간의 수정을 하여 횡방향 힘이 가해졌을 때 비틀림 변형이 발생하지 않는 위치로 전단중심을 정한다. 이렇게 정의하면 비틀림 변형에 대한 모멘트의 연계를 무시할 수 있고, 전단중심을 계산할 수 있다.

Rankine-Timoshenko 모델을 사용하면 위의 정의를 이용하여 전단중심을 매우 쉽게 계산할 수 있다. 식 (16)에 주어진 6x6 강성행렬의 역행렬을 구하면 다음과 같다.

$$\tilde{N}_R = \mathbf{K}^{RT} \mathbf{e}_R \rightarrow \mathbf{e}_R = \mathbf{S}^{RT} \tilde{N}_R \quad (15)$$

전단중심의 정의를 적용하고 그림 3을 참고하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\theta' = 0 \rightarrow T = -\frac{S_{45}^{RT}}{S_{44}^{RT}} F_2 - \frac{S_{46}^{RT}}{S_{44}^{RT}} F_3 = -x_{3s} F_2 + x_{2s} F_3 \quad (16)$$

식 (16)의 좌변과 우변을 비교함으로써, 전단중심은 다음과 같이 계산된다.

$$x_{2s} = x_{sc} = -\frac{S_{46}^{RT}}{S_{44}^{RT}}, x_{3s} = y_{sc} = \frac{S_{45}^{RT}}{S_{44}^{RT}} \quad (17)$$

## 4. 맺음말

본 기사에서는 보 구조물의 단면 특성을 계산하는 방법에 대해 알아 보았다. 기초적인 역학이론에서 모두 다루고 있는 내용이지만, 3차원 거동을 하는 보에 대한 특성 계산 방법이 정리되어 있지 않아 단면 질량특성 그리고 탄성특성들의 계산방법에 대해 정리하였다. 이러한 특성들은 설계의 초기단계에 중요한 단초를 제공하기 때문에 중요하고, 또 보 구조물의 성능을 평가하는데 도움을 줄 수 있다.

본 기사에서 지면상의 제약으로 다루지 못한 보 구조물

의 등가강성(고전 보 이론의 경우 4x4 그리고 전단변형이론의 경우 6x6)들은 등방성의 경우 상용유한요소 프로그램을 이용하여 계산할 수 있으며, 이방성의 경우도 일부 가능하다. 한편 학계에서 보고된 CASA, VABS 등의 프로그램을 사용하면 다양한 형상에 대한 등가강성행렬을 계산할

수 있다. 더 나아가서 Vlasov 비틀림 등을 포함하는 5x5, 7x7 강성행렬의 계산도 가능하다. 하지만 이러한 고차 이론에 대한 단면 특성 계산에 대해서는 연구의 필요성이 있다. 특히 Vlasov 비틀림은 탄성중심과 다양한 연계강성의 존재로 인한 단면특성들에 대한 정의가 필요하다고 생각된다. 