

## 論文

J. of The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences 44(7), 620-628(2016)

DOI:http://dx.doi.org/10.5139/JKSAS.2016.44.7.620

ISSN 1225-1348(print), 2287-6871(online)

## 호모토피 알고리즘을 이용한 Successive Backward Sweep 최적제어 알고리즘 설계 및 궤도전이 문제에의 적용

조동현, 김승필\*

### Successive Backward Sweep Method for Orbit Transfer Augmented with Homotopy Algorithm

Donghyurn Cho and Seung Pil Kim\*

Republic of Korea Air Force Academy

#### ABSTRACT

The homotopy algorithm provides a robust method for determining optimal control, in some cases the global minimum solution, as a continuation parameter is varied gradually to regulate the contributions of the nonlinear terms. In this paper, the Successive Backward Sweep (SBS) method, which is insensitive to initial guess, augmented with a homotopy algorithm is suggested. This approach is effective for highly nonlinear problems such as low-thrust trajectory optimization. Often, these highly nonlinear problems have multiple local minima. In this case, the SBS-homotopy method enables one to steadily seek a global minimum.

#### 초 록

호모토피 알고리즘은 비선형성이 강하거나 다수의 최적해가 존재하는 비선형 최적제어 문제에서 점진적으로 비선형 항으로 고려하게 해줌으로써 강건하게 전역의 최적해를 구할 수 있는 방법이다. 본 논문에서는 초기 추정치에 둔감한 SBS 알고리즘과 호모토피 알고리즘을 결합한 비선형 최적제어 알고리즘을 제시하였다. 이러한 접근방식은 저추력 궤적최적화 문제와 같이 비선형성이 강한 문제의 최적해를 구하는데 효과적이다. 또한, 비선형성이 강한 문제들은 종종 다수 국소 해가 존재하게 되는데, 이러한 경우에 SBS-호모토피 방법은 점진적으로 전역해를 찾는 것을 가능하게 한다.

**Key Words** : Optimal Control(최적제어), Homotopy Algorithm(호모토피 알고리즘), Successive Backward Sweep Method(SBS 방법), Orbit Transfer(궤도전이)

#### 1. 서 론

지난 50여 년 동안 다양한 비선형 최적제어 기법들이 개발되었다. 비선형 최적제어 기법은

크게 직접접근 방식과 간접접근 방식으로 구분한다. 직접접근 방식은 최적제어 문제를 이산화 된 파라미터 최적화 문제로 전환시킨 후, 최적 해를 구하는 방식이고, 간접접근 방식은 상태변수와

† Received : September 4, 2015      Revised : June 13, 2016      Accepted : June 14, 2016

\* Corresponding author, E-mail : seung.p.kim@gmail.com

보조상태(co-state) 변수로 구성된 경계조건 문제로 변형 후 Pontryagin 원리를 적용하여 최적 해를 구하는 방식이다. [1-2]. 비선형 최적제어 기법 중 Shooting 방법과 같이 개회로 해를 바로 구하는 방법들은 초기 추정치만 주어지면 주어진 영역 내에서 쉽게 최적 해를 추정할 수 있다는 장점이 있지만 수렴한 해가 전역에 대한 최적해인지 국소 최적해인지 판단하기 어려우며, 초기 추정치에 매우 민감하기 때문에 정확한 초기 추정치 없이 최적해를 구하기 어려운 단점을 가지고 있다.

SBS 알고리즘은 간접접근 방식의 일종으로, 비선형시스템을 테일러 급수 전개로부터 선형화 시킨 후 Riccati 방정식을 적용하여 최적해를 구한다는 점에서 DDP(Differential Dynamic Programming) 알고리즘[3] 또는 Neighboring Extremal 알고리즘과 많은 유사점을 가지고 있다. 그러나 DDP 알고리즘과 Neighboring Extremal 알고리즘은 초기 기준궤적을 추정할 때 시스템 동특성에 부합하도록 설정해야하고, 초기 기준궤적을 어떻게 추정하느냐에 따라 수렴값을 찾을 수 있는지 여부가 결정되었다. 하지만 SBS 알고리즘은 비선형 시스템 전체를 선형화 시킨 후 제어알고리즘을 적용하기 때문에[4-5], 초기 추정궤적을 시스템 동특성과 무관하게 임의로 설정하여도 안정적으로 수렴하는 최적해를 찾을 수 있다는 장점을 가지고 있다. 또한 호모토피 알고리즘은 다수의 최적 해가 존재하는 비선형 최적제어 문제에서도 점진적으로 비선형 항을 고려하게 함으로써 강건하게 전역의 최적해를 구할 수 있다 [6].

본 논문에서는 SBS 알고리즘과 호모토피 알고리즘의 장점을 결합하여, 비선형성이 강한 최적제어 문제에 대해, 초기 추정치에 둔감하면서도 전역에서 유일한 최적 해를 구할 수 있는 알고리즘을 제안하였다. 알고리즘의 성능을 검증하기 위해서, 다수의 국소 최적 해가 존재하는 지구와 화성 간 최소 연료 전이 궤도 문제와 비선형성이 강한 저추력 궤도전이 문제에 SBS-호모토피 알고리즘을 적용하여 강건한 최적해를 구할 수 있음을 확인하였다.

## II. 본 론

### 2.1 SBS 최적제어 알고리즘

SBS 알고리즘은 비선형 시스템 전체를 테일러 급수를 이용하여 선형화 시킨 후 제어 알고리즘을 적용하기 때문에, 초기치 추정을 시스템 동특

성과 무관하게 임의로 설정하여도 안정적으로 수렴된 최적해를 찾을 수 있다. SBS 알고리즘을 통해 최적제어 해를 구하는 방법은 다음과 같다.

일반적으로 비선형 최적제어 문제는 식 (1)과 같이 정의한다[7].

$$\dot{x} = f(x, u, t) \tag{1}$$

$$J = \phi[x(T)] + \int_{t_0}^T q(x, u, t) dt \tag{2}$$

여기서  $x$ 는 상태변수이고,  $u$ 는 제어변수,  $t$ 는 시간을 나타낸다. 그리고  $t_0$ 는 초기시간,  $T$ 는 최종시간을 의미하며,  $f$ 는 시스템 방정식을 의미한다.  $J$ 는 성능지수를 나타내고,  $\phi$ 는 최종 값 함수를,  $q$ 는 성능지수 함수를 의미한다. 최적해를 구하기 위한 필요조건과 충분조건은 다음과 같이 정의된 Hamiltonian으로 부터 유도한다.

$$H(x, u, \lambda, t) = q(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t) \tag{3}$$

여기서  $\lambda$ 는 보조 상태변수를 나타낸다. 식 (3)을 테일러급수 전개함으로써 식 (4~7)과 같이 상태변수와 보조 상태변수에 대한 1차 필요충분조건들을 유도할 수 있다.

$$\dot{x} = H_{\lambda x}x + H_{\lambda u}u + \alpha \tag{4}$$

$$\dot{\lambda} = -(H_{xx}x + H_{xu}u + H_{x\lambda}\lambda + \beta) \tag{5}$$

$$H_u = 0 = H_{ux}x + H_{uu}u + H_{u\lambda}\lambda + \gamma \tag{6}$$

$$\lambda(T) = [\phi_{xx} + (\bar{\nu}^T \psi_x)_x]_{t=T}x(T) + \psi_x^T(T)\bar{\nu} + [\phi_x - (\phi_{xx} + (\bar{\nu}^T \psi_x)_x)\bar{x}]_{t=T} \tag{7}$$

위의 식(4)에서  $H_{\lambda x}$ 와 같은 항들은 Hamiltonian을 각 아래첨자( $\lambda, x$ )에 대해 순서대로 편미분한 것으로,  $H_{\lambda x} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial H}{\partial \lambda})$ 를 의미한다. 식 (4~6)의  $\alpha, \beta, \gamma$ 는 다음과 같이 정의되어진다.

$$\alpha = H_\lambda - H_{\lambda x}\bar{x} - H_{\lambda u}\bar{u} \tag{8}$$

$$\beta = H_x - H_{xx}\bar{x} - H_{xu}\bar{u} - H_{x\lambda}\bar{\lambda} \tag{9}$$

$$\gamma = H_u - H_{ux}\bar{x} - H_{uu}\bar{u} - H_{u\lambda}\bar{\lambda} \tag{10}$$

식 (8~10)에서  $\bar{x}, \bar{u}, \bar{\lambda}$ 는 각각 초기기준 상태변수, 입력변수, 보조상태 변수를 의미한다. 식 (6)으로부터 최적제어 입력 값은 식 (11)과 같다.

$$u = -H_{uu}^{-1}(H_{ux}x + H_{u\lambda}\lambda + \gamma) \tag{11}$$

SBS 알고리즘에서 보조상태 변수  $\lambda$ 는 다음과 같이 선형화된 이득 값들로 표현한다.

$$\lambda = Sx + P\nu + V \quad (12)$$

$$P^T x + N + W\nu - \psi_f = 0 \quad (13)$$

여기서 S, P, V, N, W는 제어이득 행렬을 의미하고, 이 값들은  $\psi_f$ 는 최종경계 조건으로 다음과 같다.

$$\psi[x(T)] = \psi_f \quad (14)$$

식 (13)을 통해  $\nu$ 값은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\nu = -W^{-1}(P^T x + N - \psi_f) \quad (15)$$

식 (12~13)의 SBS 알고리즘의 이득 값들은 Backward 적분을 통해 식 (12~13)을 식 (5), (7)에 대입함으로써 이득 미분방정식은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{S} + SH_{\lambda x} + H_{x\lambda} S - (H_{xu} + SH_{\lambda u})H_{uu}^{-1}(H_{ux} + H_{u\lambda} S) \\ + H_{xx} = 0, \quad S(T) = [\phi_{xx} + (\bar{\nu}^T \psi_x)_x]_{t=T} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \dot{P} - [(H_{xu} + SH_{\lambda u})H_{uu}^{-1}H_{u\lambda} - H_{x\lambda}]P = 0, \\ P(T) = \psi_x^T(T) \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} - [(H_{xu} + SH_{\lambda u})H_{uu}^{-1}H_{u\lambda} \\ - H_{x\lambda}]V - (H_{xu} + SH_{\lambda u})H_{uu}^{-1}\gamma + S\alpha + \beta = 0 \\ V(T) = [\phi_x - (\phi_{xx} + (\bar{\nu}^T \psi_x)_x \bar{x})]_{t=T} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\dot{W} - P^T H_{\lambda u} H_{uu}^{-1} H_{u\lambda} P = 0, \quad W(T) = 0 \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \dot{N} + P^T [\alpha - H_{\lambda u} H_{uu}^{-1} (\gamma + H_{u\lambda} V)] = 0, \\ N(T) = (\psi(x) - \psi_x \bar{x})_{t=T} \end{aligned} \quad (20)$$

## 2.2 SBS-호모토피 알고리즘

호모토피 알고리즘은  $\epsilon$  변수를 통해 시스템의 비선형 항을 점진적으로 고려하게 함으로써 전역에서 안정적으로 최적해를 구할 수 있다.

그러므로 초기 추정치에 둔감하면서도 전역에서 안정적으로 최적해를 구하기 위한 SBS 알고리즘에 호모토피 알고리즘을 결합한 최적제어 기법을 제안하고자 한다. 호모토피 알고리즘을 SBS 알고리즘에 적용하기 위해서 식 (1)의 비선형 시스템을 다음과 같이 표현한다.

$$\dot{x} = Ax + \epsilon f_n(x) + Bu + \alpha \quad (21)$$

여기서  $\epsilon$ 은 0에서 1까지 점진적으로 증가하는

변수이다.  $Ax$ 는 시스템의 선형부분이고,  $f_n(x)$ 는 시스템의 상 비선형 부분을 나타낸다. 변수  $\epsilon$ 이 0에서 1로 점진적으로 증가하면서, 초기 선형 시스템에서 점진적으로 비선형 항을 고려해가며 최적해를 얻을 수 있도록 한다. 호모토피 알고리즘은  $\epsilon$ 이라는 추가변수를 도입하였기 때문에 최적 해를 구하기 위해서는 다음과 같은 추가 방정식을 풀어야한다[8].

$$F[z(s), s] = 0 \quad (22)$$

여기서  $s$ 는 식 (22)를 풀기 위한 독립변수이고, 함수  $F$ 와 미지수  $z$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$F = P^T x + W\nu + N - \psi_f = 0 \quad (23)$$

$$z = [\epsilon \quad \nu] \quad (24)$$

비선형 함수인  $F$ 는  $\epsilon$ 이 0일 때는  $\nu$ 만의 함수로 정의되어지기 때문에 위의 식 (23)을 정확히 만족시키는 해를 쉽게 구할 수 있다. 그러나 원래의 비선형 시스템 해인  $\epsilon$ 이 1일 경우에는, 미지수  $z$ 가 아래의  $s$ 에 대한 미분방정식을 추가로 만족시켜야 한다.

$$\frac{dF[z(s), s]}{ds} = 0 \quad (25)$$

식 (23)을 식 (25)에 대입하면 다음 식 (26)을 얻을 수 있다.

$$\left[ \frac{\partial P^T}{\partial \epsilon} x + \frac{\partial W}{\partial \epsilon} \nu + \frac{\partial N}{\partial \epsilon} \right] \frac{\partial \epsilon}{\partial s} + W \frac{\partial \nu}{\partial s} = 0 \quad (26)$$

식 (26)을 행렬 형태로 표현하면 다음과 같다.

$$\left[ \frac{\partial P^T}{\partial \epsilon} x + \frac{\partial W}{\partial \epsilon} \nu + \frac{\partial N}{\partial \epsilon} \right] W \begin{bmatrix} \frac{\partial \epsilon}{\partial s} \\ \frac{\partial \nu}{\partial s} \end{bmatrix} = 0 \quad (27)$$

식 (27)을 독립변수  $s$ 에 대해 적분함으로써 변수  $\epsilon$ 과  $\nu$ 값을 업데이트 할 수 있다. 호모토피 알고리즘을 SBS 최적제어 알고리즘에 적용하기 위해서는 Backward 적분 시 SBS 이득에 대해 변수  $\epsilon$ 을 값을 고려해야 한다. 변수  $\epsilon$ 의 변화를 고려하기 위해 식(16~20)의 Backward 적분 시에 다음 식 (28~32)과 같이 변수  $\epsilon$ 에 대하여 미분한 방정식도 동시에 적분해야만 한다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial S}{\partial \epsilon} \right) = - \frac{\partial S}{\partial \epsilon} H_{\lambda x} - S \frac{\partial H_{\lambda x}}{\partial \epsilon} - \frac{\partial H_{x\lambda}}{\partial \epsilon} S - H_{x\lambda} \frac{\partial S}{\partial \epsilon} \\ + \frac{\partial S}{\partial \epsilon} H_{\lambda u} H_{uu}^{-1} (H_{ux} + H_{u\lambda} S) + (H_{xu} + SH_{\lambda u}) H_{uu}^{-1} H_{u\lambda} \frac{\partial S}{\partial \epsilon} \\ - \frac{\partial H_{xx}}{\partial \epsilon}, \quad \frac{\partial S}{\partial \epsilon}(T) = 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial P}{\partial \epsilon} \right) = \left( \frac{\partial S}{\partial \epsilon} H_{\lambda u} H_{uu}^{-1} H_{u\lambda} - \frac{\partial H_{x\lambda}}{\partial \epsilon} \right) P, \\ + [(H_{xu} + S H_{\lambda u}) H_{uu}^{-1} H_{u\lambda} - H_{x\lambda}] \frac{\partial P}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial P}{\partial \epsilon}(T) = 0 \quad (29)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \epsilon} \right) = \left( \frac{\partial S}{\partial \epsilon} H_{\lambda u} H_{uu}^{-1} H_{u\lambda} - \frac{\partial H_{x\lambda}}{\partial \epsilon} \right) V, \\ + [(H_{xu} + S H_{\lambda u}) H_{uu}^{-1} H_{u\lambda} - H_{x\lambda}] \frac{\partial V}{\partial \epsilon} \\ + \frac{\partial S}{\partial \epsilon} H_{\lambda u} H_{uu}^{-1} \gamma - \frac{\partial S}{\partial \epsilon} \alpha - S \frac{\partial \alpha}{\partial \epsilon} + \frac{\partial \beta}{\partial \epsilon} \\ \frac{\partial V}{\partial \epsilon}(T) = 0 \quad (30)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial \epsilon} \right) = \frac{\partial P^T}{\partial \epsilon} H_{\lambda u} H_{uu}^{-1} H_{u\lambda} P \\ + P^T H_{\lambda u} H_{uu}^{-1} H_{u\lambda} \frac{\partial P}{\partial \epsilon}, \quad \frac{\partial W}{\partial \epsilon}(T) = 0 \quad (31)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial N}{\partial \epsilon} \right) = \frac{\partial P^T}{\partial \epsilon} [H_{\lambda u} H_{uu}^{-1} (H_{u\lambda} V + \gamma) - \alpha] \\ + P^T (H_{\lambda u} H_{uu}^{-1} H_{u\lambda} \frac{\partial V}{\partial \epsilon} - \frac{\partial \alpha}{\partial \epsilon}), \quad \frac{\partial N}{\partial \epsilon}(T) = 0 \quad (32)$$

여기서,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \epsilon} = H_{\lambda \epsilon} - \frac{\partial H_{\lambda x}}{\partial \epsilon} x \quad (33)$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial \epsilon} = H_{x\epsilon} - \frac{\partial H_{xx}}{\partial \epsilon} x - \frac{\partial H_{x\lambda}}{\partial \epsilon} \lambda \quad (34)$$

여기서  $\nu$  값은 식 (27)을 이용하여 계산할 수 있지만 적분오차로 인해 시스템을 불안정하게 만들 수 있다. 그러므로  $\nu$  값은 적분오차의 영향을 적게 받는 식 (15)의 계산된 값을 사용한다.

또한, 임의의 초기 추정치에 대해 수렴성을 향상시키기 위해 Hessian 보정법을 다음과 같이 도입하였다.

$$H_{xx} = H_{xx0} + C_{hxx} I \quad (35)$$

$$H_{uu} = H_{uu0} + C_{huu} I \quad (36)$$

여기서,  $H_{xx0}$ 와  $H_{uu0}$ 는 초기에 정의된 궤적에 대한 Hessian 행렬 값을 의미한다. 그리고 양의 실수로 정의된  $C_{hxx}$ 와  $C_{huu}$ 는 시스템의 Convexity 조건을 만족시킴으로 인해 임의의 초기 추정치에 대해 수렴성을 향상시킨다.

호모토피 알고리즘을 적용한 SBS 최적제어 알고리즘에 대한 순서도를 요약 정리하면 Fig. 1과

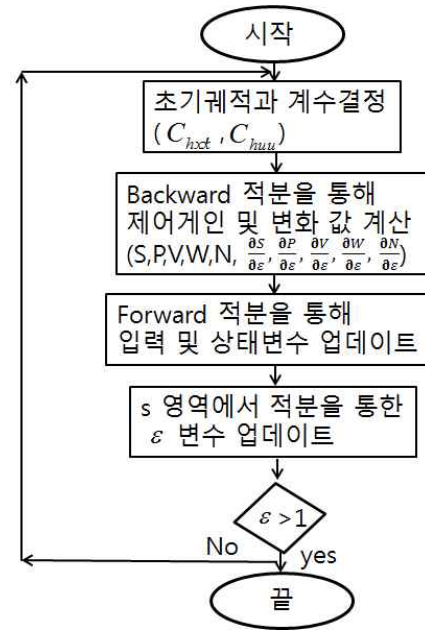


Fig. 1. SBS-Homotopy algorithm flow chart

같다.

Figure 1에서 보면 가장 먼저, 임의의 초기 궤적을 가정한 후, 수렴성을 확보하기 위해 양의 실수 값인  $C_{hxx}$ 와  $C_{huu}$ 을 설정한다. 통상 시스템의 비선형성 특성에 따라  $C_{hxx}$ 와  $C_{huu}$  값은 1~10사이의 값을 설정하게 된다. 그리고 SBS 계인 값과  $\epsilon$ 의 변화에 대한 계인 값의 변화를 계산하기 위해 식 (16~20)과 식 (28~32)를 동시에 Backward 적분하여  $S, P, V, W, N$ 와  $\frac{\partial S}{\partial \epsilon}, \frac{\partial P}{\partial \epsilon}, \frac{\partial V}{\partial \epsilon}, \frac{\partial W}{\partial \epsilon}, \frac{\partial N}{\partial \epsilon}$ 을 계산한다. Backward 적분을 통해 구해진 계인 값을 바탕으로 Forward 적분을 활용하여 상태변수와 제어입력을 업데이트하게 된다. 그리고 동시에 식 (27)을 통해 변수  $s$ 에 대하여 적분함으로써  $\epsilon, \nu$  값을 업데이트하게 된다. 이때 계산된  $\nu$  값은 적분오차로 인한 발산 가능성이 있기 때문에 식 (15)에 의해 계산된 값을 사용한다. 이러한 과정을  $\epsilon$ 이 1이 되어 비선형시스템을 완전히 고려할 때까지 반복하면서 수행하게 된다.

### 2.3 수치해석

#### 2.3.1 지구와 화성 간 최소연료 전이궤도 문제

지구와 화성 간 궤도전이에 대한 전체적인 개념도는 Fig. 2와 같다. 같은 평면상에서 최소 연료를 사용하여 지구에서 화성까지 궤도전이 하기 위한 최적해를 구하는 문제로, 이 문제는 다수 국소 최적해가 존재하기 때문에, 전 영역에서 최소연료를 소모하는 유일한 최적해를 구하는 것은

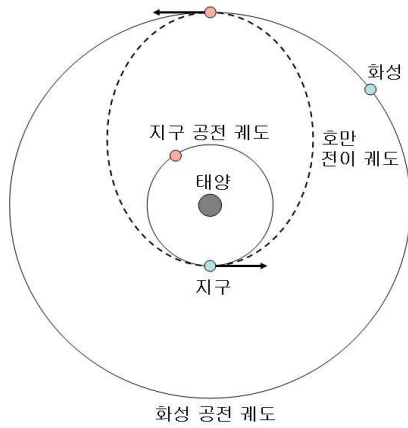


Fig. 2. Earth to Mars Orbit transfer

쉽지 않다. 그러므로 SBS-호모토피 알고리즘을 통해, 임의의 초기 추정궤적을 통해, 전역에서 유일한 최적해를 구할 수 있음을 확인하고자 한다.

시뮬레이션은 태양중심 좌표계에 대해 수행하였으며, 극좌표계로 표현된 시스템 성능지수와 상태방정식은 다음과 같다[9].

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (u_r^2 + u_\theta^2) dt \quad (37)$$

$$\dot{r} = u \quad (38)$$

$$\dot{u} = \frac{v^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + u_r \quad (39)$$

$$\dot{v} = -\frac{uv}{r} + u_\theta \quad (40)$$

$$\dot{\theta} = \frac{v}{r} \quad (41)$$

여기서  $r$ 은 태양으로부터 법선방향 거리이고,  $u$ 는 법선방향 속도,  $v$ 는 접선방향 속도,  $\theta$ 는 각도변위를 나타낸다. 그리고  $u_r$ 은 법선방향 추력 입력,  $u_\theta$ 은 접선방향 추력입력을 의미하고,  $\mu$ 는 중력상수로 태양중심 좌표계에서 사용하기 때문에 1로 정의하였다. 만족시켜야할 최종조건은 다음과 같다.

$$\psi(t_f) = \begin{pmatrix} r(t_f) - r_f \\ u(t_f) - u_f \\ v(t_f) - v_f \end{pmatrix} \quad (42)$$

최적 해를 구하기 위한 상태변수의 경계조건은 Table 1과 같다.

수렴성을 증대시키기 위한 양의 실수 값인  $C_{hxx}$ 와  $C_{huu}$  값은 각각 1과 0으로 설정하여 수

Table 1. Boundary conditions for Earth to Mars orbit transfer

변수	초기 값	최종 값
시간( $t$ )	0	3.0964TU
$r$	1	1.524
$u$	0	0
$v$	1	$\sqrt{\mu/r_f}$
$\theta$	0	free

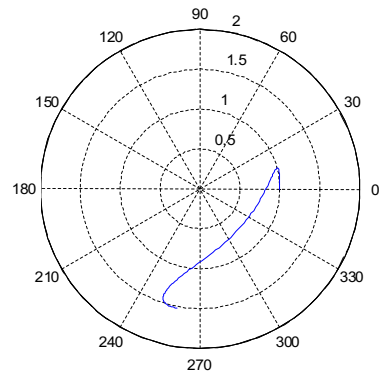


Fig. 3. Open-loop trajectory (Case-1)

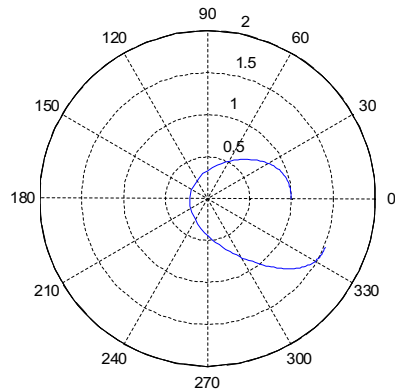


Fig. 4. Open-loop trajectory (Case-2)

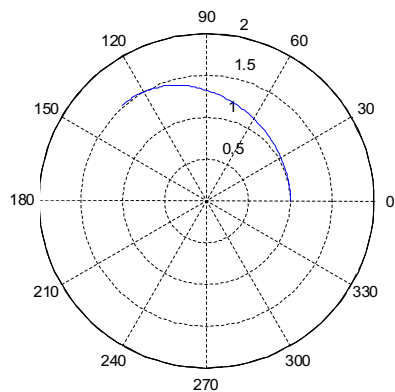


Fig. 5. Open-loop trajectory (Case-3)

Table 2. Initial values and performance index for Case 1~3

경우	$\lambda_0 = (\lambda_{10}, \lambda_{20}, \lambda_{30}, \lambda_{40})$	성능지수( $J$ )
Case 1	$(-0.68, -0.084, 1.639, 0)$	3.408
Case 2	$(1.2, 0.672, 0.984, 0)$	0.567
Case 3	$(-0.264, -0.154, -0.257, 0)$	0.040

치해석을 수행하였다. 앞에서 언급한 것처럼 이 문제는 최소 3개 이상의 국소 최적 해가 존재하고 그 결과는 Fig. 3~5의 결과와 같다. Fig. 3~5는 Shooting 방법을 통해 계산되어진 개회로 해로써 각각 임의로 설정한 초기 추정 값을 이용하여 얻어진 궤적해이다.

Figure 3~5의 Shooting 방법을 통해 개회로 궤적해를 구하기 위해 사용된 초기 값과 성능지수는 Table 2와 같다.

위 문제는 보조상태 변수 초기 값( $\lambda_0$ )을 어떻게 설정하느냐에 따라 각각 다른 최적 해로 수렴한다는 것을 확인할 수 있고, Shooting 방법을 통해 얻은 각각의 최적해 중에는 Table 2에서 Case 3이 가장 작은 성능지수 값을 가지고 있기 때문에 전역에 대한 최적해 궤적임을 확인할 수 있다. 동일한 조건으로 SBS-호모토피 알고리즘을 적용하여 최적해를 계산하였다. 초기 추정궤적은 시스템 동특성과 무관하게 임의로  $\bar{x} = x_0$ ,  $\bar{u} = 0.1$ ,  $\bar{\lambda} = 0.1$ 와 같이 설정하였으며, 시뮬레이션 결과는 Fig. 6~8과 같다.

Figure 6은 시스템 동특성에 무관하게 임의로 가정한 초기 궤적에 대해 SBS-호모토피 알고리즘을 적용하여 얻어진 최적 해이다. Fig. 7과 Fig. 8은 점선으로 표시한 궤적(Shooting 방법을 이용하여 수렴한 국소 최적궤적-Case 1~2)을 초기 궤적으로 사용하여 얻어진 최적 해이다. Fig. 6~8에

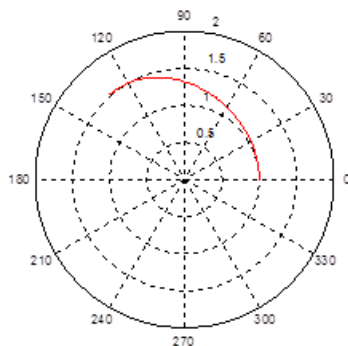


Fig. 6. Optimal Trajectory (arbitrary initial trajectory)

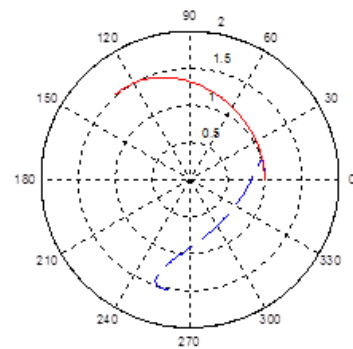


Fig. 7. Optimal trajectory(Initial trajectory - Case1)

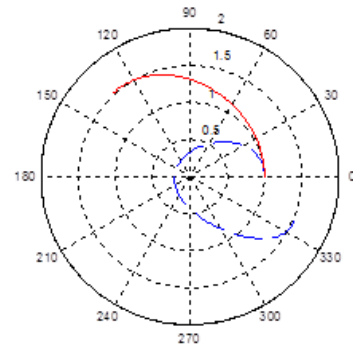


Fig. 8. Optimal trajectory(Initial trajectory - Case2)

서처럼 SBS-호모토피 알고리즘은 임의로 가정한 초기 궤적에 대해 일관되게 동일한 전역 최적해를 제공하였다.

### 2.3.2 저추력 궤도전이 문제

저추력 궤도전이 문제는 장시간 시뮬레이션이 요구되어지고 비선형성이 강한 시스템 특성으로 인해 정확한 초기 값 추정 없이는 최적해를 구하기 매우 어렵다. 이러한 저추력 궤도전이 문제에서도 SBS-호모토피 알고리즘을 적용하여 최적해를 쉽게 구할 수 있음을 확인하고자 한다. 시뮬레이션은 초기 타원궤도에서 지구정지궤도로 저추력 궤도전이 하는 문제에 적용하였다.

저추력 궤도전이와 같이 비선형성이 강한 문제에서 비선형성을 줄여주기 위해 시스템을 다음과 같이 궤도요소를 사용하여 표시하였다. 궤도 요소에 의해 정의된 시스템 특성 및 성능지수는 다음과 같다[10].

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (u_r^2 + u_l^2) dt \quad (43)$$

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{2p}{w} u_l \quad (44)$$

$$\dot{e}_x = \sqrt{\frac{p}{\mu}} (\sin(L)u_r + [\cos(L) + (e_x + \cos(L))/w]u_l) \quad (45)$$

$$\dot{e}_y = \sqrt{\frac{p}{\mu}} (-\cos(L)u_r + [\sin(L) + (e_y + \sin(L))/w]u_l) \quad (46)$$

$$\dot{L} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{w^2}{p} \quad (47)$$

여기서  $u_r$ 은 법선방향에 대한 제어입력이고,  $u_l$ 은 true longitude에 대한 제어입력을 의미한다.  $p$ 는 기하학적 상수이고,  $e_x, e_y$ 는 이심율 벡터 성분,  $L$ 은 true longitude,  $\mu$ 는 지구중력상수를 의미한다. 그리고 식 (44)~(47)에서  $w$ 는 아래 식과 같이 정의 된다.

$$w = 1 + e_x \cos(L) + e_y \sin(L) \quad (48)$$

궤도요소들을 직교좌표계 위치와 속도로 변환시키는 식들은 다음과 같다.

$$x = \frac{p}{w} \cos(L) \quad (49)$$

$$y = \frac{p}{w} \sin(L) \quad (50)$$

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} (e_y + \sin(L)) \quad (51)$$

$$\dot{y} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} (e_x + \cos(L)) \quad (52)$$

Table 3. Boundary conditions for low-thrust orbit transfer

변수	초기 값	최종 값
$p$	11.625Mm	41.625Mm
$e_x$	0.75	0
$e_y$	0	0
$L$	$\pi$	free

Table 4. Simulation conditions

변수	값
$\mu$ (중력상수)	5165.862 $Mm^3/h^2$
$n$ (데이터 수)	3000
$C_{hxx}$ (Hessian 행렬의 상수)	1

최적 해를 구하기 위한 상태변수 경계조건과 시뮬레이션 조건은 각각 Table 3과 Table 4와 같다.

Table 4의 시뮬레이션 조건 하에 최종 시간  $t_f$ 를 변화시켜가며 최적해를 구하면 Fig. 9~14에서 보는바와 같다.

시뮬레이션 시간 변화에 따른 성능지수는  $t_f$ 가 15시간일 경우  $J=1.67$ ,  $t_f$ 가 100시간일 경우  $J=0.2567$ ,  $t_f$ 가 1,000시간일 경우  $J=0.0264$ 이다. 시뮬레이션 시간이 길어질수록 저추력 전이가 가능하다는 것을 확인할 수 있다. 그러나 이러한 저추력 궤도전이 문제는 시뮬레이션 시간이 길어질수록 민감도가 상승하기 때문에, 아무런 정보

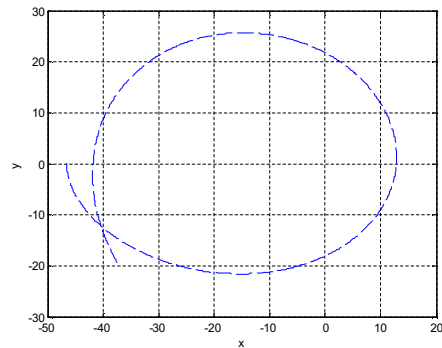


Fig. 9. Trajectory configuration( $t_f = 15h$ )

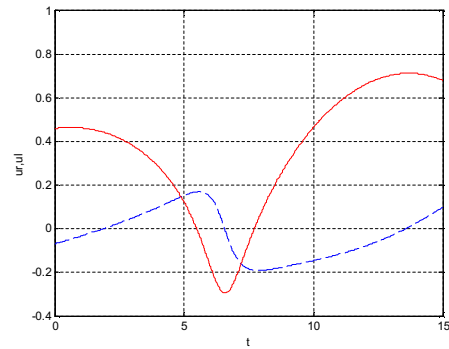


Fig. 10. Input configuration( $t_f = 15h$ )

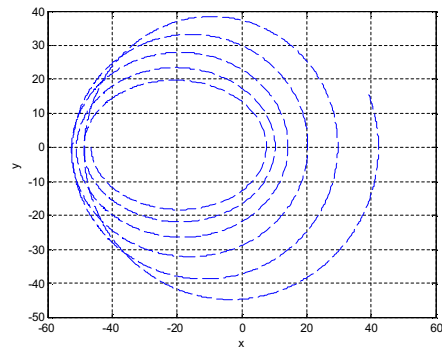


Fig. 11. Trajectory configuration ( $t_f = 100h$ )

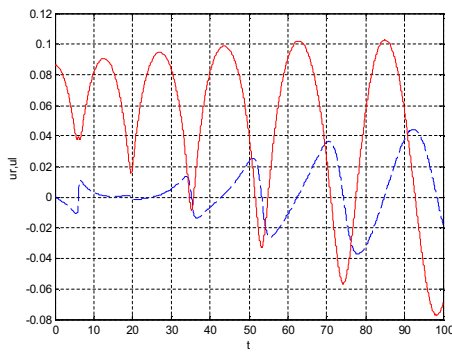


Fig. 12. Input configuration ( $t_f = 100h$ )

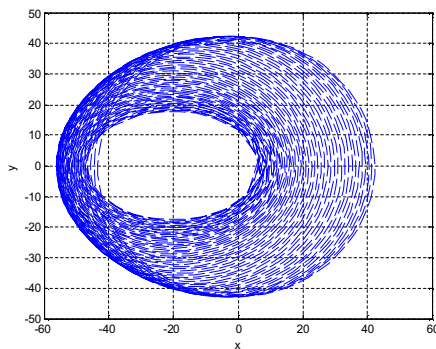


Fig. 13. Input configuration ( $t_f = 1000h$ )

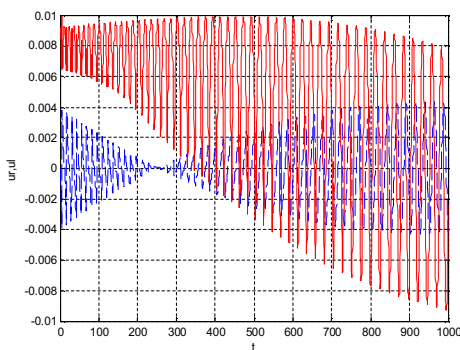


Fig. 14. Input configuration ( $t_f = 1000h$ )

없이 바로  $t_f$ 가 1,000시간의 최적해를 구하는 것은 매우 어렵다. 그러므로 초기 추정치에 대해서는 시뮬레이션이 짧은  $t_f$ 가 15시간에 대해 최적해를 구하고 이것을 초기 값으로 해서 최종시간을 100 시간과 1,000 시간으로 확장하면 최적해를 쉽게 찾을 수 있다. 각각 수렴한 해의 초기 보조 상태변수  $\lambda_0$  값을 Shooting 방법에 적용하여 동일한 궤적으로 수렴하는 최적해 임을 확인하였다.

### III. 결 론

본 논문에서는 호모토피 알고리즘을 적용한

SBS-호모토피 최적제어 알고리즘을 제안하였다. 일반적으로 비선형성이 강하고 다수 국소 최적해가 존재하는 비선형 최적제어 문제는 초기 추정치에 매우 민감하고, 전역 최적해를 구하기 어렵다. 그러므로 초기 추정치에 둔감한 SBS 알고리즘과, 점진적으로 비선형 항을 고려할 수 있는 호모토피 알고리즘의 장점을 결합하였다.

제안한 SBS-호모토피 알고리즘의 강건성을 향상시키기 위해 Hessian 보정법을 도입하였다. 알고리즘 성능과 유용성을 확인하기 위해서 다수 국소 최적 해가 존재하는 지구와 화성 간 최소연료 전이궤도 문제와 비선형성이 강한 저추력 궤도전이 문제에 SBS-호모토피 알고리즘을 적용하였다. 수치시뮬레이션 결과, 본 논문에서 소개한 SBS-호모토피 알고리즘은 임의로 설정한 초기 궤적에 대해 동일한 전역 최적해를 제공할 수 있으며, 비선형성이 강한 저추력 궤도적이와 같은 문제에서 최적해를 구하는데 효과적인 방법이 될 수 있음을 확인하였다.

### References

- 1) J. T. Betts, Practical Methods for Optimal Control and Estimation Using Nonlinear Programming, 2nd Ed., SIAM, Philadelphia, 2010.
- 2) B. A. Conway, Ed., Spacecraft Trajectory Optimization, Cambridge University Press, New York, NY, 2010.
- 3) C. Colombo, Optimal trajectory design for interception and deflection of Near Earth Objects, Ph.D Thesis, University of Glasgow, Scotland, 2010.
- 4) D. H. Cho, "The Discretized SBS Method with a Waypoint Scheme", Journal of Korea Air Force Academy, Vol 64, No. 2, 2013, pp. 127~140.
- 5) D. H. Cho and S. R. Vadali, "A Magnus Series-Based Modified Sweep Method for Optimal Control", The Journal of the Astronautical Sciences, Vol 60, Issue 3, 2013, pp. 331~336.
- 6) D. H. Cho and S. R. Vadali, "The Successive Backward Sweep Method for Optimal Control of Nonlinear System with Constraints," Advances in the Astronautical Sciences, Vol 147, 2013, pp 163-183.
- 7) A. E. Bryson and Y. C. Ho, Applied Optimal Control: optimization, estimation, and control: Taylor & Francis Group, 1975.



- 8) S.K.Rahimian, F.Jalali, J.Seader, and R.E.White, "A new homotopy for seeking all real roots of a nonlinear equation", *Computers & Chemical Engineering*, vol.35, 2011, pp.403-411
- 9) C.M.McCrate, "Higher-order methods for determining optimal controls and their sensitivities", MS Thesis, Texas A&M University, TX, 2010.
- 10) J.B.Cailau and J.Noailles, "Sensitivity analysis for time optimal orbit transfer", *Optimization*, vol.49, 2011, pp.327-350.