http://dx.doi.org/10.7735/ksmte.2016.25.4.295

J. Korean Soc. Manuf. Technol. Eng. ISSN 2283-4846(Online) / ISSN 2233-6036(Print)

튜브 타입 제진용 보링바 구조설계를 위한 GUI 프로그램 개발

곽양양^a, 박종권^a, 홍준희^{b*}, 송두상^c

Development of a GUI Program for the Design of a Vibration Control Boring Bar with a Tube-Type Structure

Yang-Yang Guo^a, Jong-Kweon Park^a, Jun-Hee Hong^{b*}, Doo-Sang Song^c

^a Department of Ultra Precision Machines and Systems, Korea Institute of Machinery & Materials,

156, Gajeongbuk-ro, Yuseong-gu, Daejeon 34103, Korea

^b School of Mechanical Engineering, Chung-Nam University,

99, Daehak-ro, Yuseong-gu, Daejeon 34134, Korea

^c Design & Product, Dae-Myung Tech,

160, Daehwa-ro, Daedeok-gu, Daejeon 34368, Korea

ARTICLE INFO

Article history:				
Received	22	June	2016	
Revised	26	July	2016	
Accepted	28	July	2016	

Keywords: Tube type structure Modal analysis Modal mass & stiffness GUI program Vibration control boring bar

ABSTRACT

In the design of passive and active boring bars, the structural dimensions and shape of the vibration control boring bar are modified depending on the diameter and depth of the workpiece, which changes the dynamic behavior. Thus, the natural frequency, effective mass, and stiffness for the main structure of a tube-type boring bar need to be reset for each vibration control case. However, commercial finite element method (FEM) software and experimental modal analysis are mostly used at present despite being too time-consuming. To overcome the weaknesses of the two methods currently used for vibration control, we realized a graphical user interface (GUI) program for the modal analysis of a modified tube-type damping structure. The analysis results with the GUI program were compared to those with commercial FEM software in order to confirm the effectiveness of the former.

1. 서 론

일반 스틸 보링바의 오버행(overhang) 길이가 직경에 대해 5배 이상 되면 진동이 많이 발생하여 생산성 및 정밀도가 저하될 수 있다. 따라서 보링 가공 시 보링바의 오버행 길이가 직경에 대해 5배 이상에서도 보링바의 진동이 억제되는 제진 보링바 연구가 진 행되어 왔다. 이러한 제진 보링바는 제어 방식에 따라 패시브 제어 와 액티브 제어 두 가지 방법으로 나눠질 수 있다. 즉 복합재료나 중금속 등을 사용하는 방법과^{1,2]} 동흡진기를 추가하는^{13,4]} 두 가지 방법이 있으며 동흡진기(D.V.A.: dynamic vibration absorber)를 추가하는 방법으로는 동흡진기를 보링바의 내부에 삽입하는 방법 이 많이 연구되었다.

현재는 보랑바 내부에 동흡진기가 삽입된 패시브 형태의 보랑바 가 상용화 되어 사용되고 있고 최근에는 액티브 제어 보랑바에 대 한 연구가 진행되고 있다^{15-7]}. 그 중에 튜브 타입의 제진용 보랑바 구조를 이용한 연구도 많이 있다^[8,9].

* Corresponding author. Tel.: +82-42-821-5642 Fax: +82-42-822-5642

E-mail address: hongjh@cnu.ac.kr (Jun-Hee Hong).

그러나 기존 연구에서 패시브 제어 보랑바는 동흡진기에 대한 이론 모델만 제시하였고 액티브 제어 보랑바는 진동 제어의 가능성 만 제시하였다. 이러한 튜브 타입 제진용 보랑바 구조는 동흡진기 나 액추에이터의 삽입을 위해 다중 단면의 보 형상을 갖는다. 그러 나 다중 단면의 보 형상을 갖는 튜브 타입 제진용 보랑바 구조의 이론 모델에 대한 연구가 없으며 동적 특성 해석을 위하여서는 상 용화 CAE 소프트웨어를 이용하거나^[3,9] 실험모드해석^[4]에 의존하 고 있다. 그러나 CAE 소프트웨어를 통한 해석은 보랑바 설계 모델 을 바꿀 때마다 모델을 수정하고 재해석해야 하기 때문에 시간이 많이 소요되며 제진 시스템에 대한 수치해석에 인용하기 어려운 단점이 있다.

실험적 모드해석은 오버행 길이와 지름 등 여러 변수들로 인하여 시간과 비용이 많이 소요되므로 이러한 단점을 보완하기 위해 본 논문에서는 제진 보랑바의 구조적인 치수와 형상의 변화에 대해 오일러 보 이론을 적용하여 질량 행렬과 강성 행렬을 구하고 이를 운동방정식을 통해 이론적 모드 해석을 하고자 한다. 또한 제진 보 링바의 구조적인 치수와 형상의 변화에 대해 간편하게 이론 모드 해석이 가능하도록 Matlab을 이용하여 GUI 프로그램을 개발하는 것을 목적으로 한다. 한편 GUI 프로그램의 객관성 확보를 위해 상 용화 CAE 소프트웨어 결과를 비교 고찰하여 유효성을 확보하고, 패시브 및 액티브 보랑바의 개발에 토대가 되고자 한다.

2. 이론 고찰

2.1 모드 해석 이론

튜브 타입 제진용 보랑바의 다중 단면 구조는 단면 형상에 따라 Fig. 1과 같이 헤드(*l*₃), 튜브(*l*₂) 및 생크(*l*₁) 3가지 파트로 나누어 생각할 수 있다. 여기서 헤드는 절삭공구를 설치하는 부분이며 생 크는 클램핑을 위한 부분이고 튜브는 동흡진기나 액추에이터와 같 은 제진 장치를 설치하는 부분이다. *l*₄는 인서트(*D*점)와 제진 장치 (*E*점) 사이의 거리로 가정한다. 제진 장치를 설치하는 *E*점은 제진 점이라 정의한다. 이러한 제진 점은 동흡진기나 액추에이터를 설계 할 때 필요한 유효 질량과 유효 강성을 결정하는 중요한 변수가



Fig. 1 Structure of a tube type boring bar

된다.

보링바는 모드해석을 통해 고유진동수 및 모드형상을 해석할 수 있으며 모드해석을 위한 튜브 타입 제진용 보링바 구조의 운동방정 식은 식 (1)과 같이 표현된다.

$$[M]\{\ddot{v}\} + + [K]\{v\} \tag{1}$$

식 (1)에서 [*M*]은 질량 행렬, [*C*]는 감쇠 행렬, [*K*]는 강성 행렬이 며, {*v*}는 변위 벡터 그리고 {*f*}는 힘에 대한 벡터이다. 튜브 타입 제진용 보랑바 구조의 감쇠는 비교적 작기 때문에 감쇠 행렬을 무 시하고 외부 힘이 없는 경우 운동방정식 식 (1)에 대한 특성방정식 (characteristic equation)은 식 (2)와 같이 표현될 수 있고, 특성 방정식에 대한 해를 구한 것을 모드해석이라고 한다^[10].

$$(-\lambda[M] + [K])\{x\} = \{0\}$$
(2)

특성방정식 식 (2)의 해를 구하여 얻은 λ는 고유치(eigenvalue) 또는 고유벡터(eigen vector)라 부른다. 식 (2)에 [M]⁻¹을 전치 곱 을 취하면 식 (3)과 같이 표시된다.

$$(-\lambda[I] + [D])\{x\} = \{0\}$$
(3)

식 (3)에서 *I*는 단위행렬이고 동적 행렬(dynamical matrix) *D*는 식 (4)와 같다.

$$[D] = [K]^{-1}[M]$$
(4)

{*x*}의 유용해를 구하기 위해서는 특성행렬식이 "0"이 되어야 하 며, 식 (5)와 같이 쓸 수 있다.

$$\Delta = \left| -\lambda[I] + [D] \right| = 0 \tag{5}$$

식 (5)를 전개하면 특성 또는 진동수 방정식으로 알려진 λ 의 n차 다항식이 된다. $\lambda = \omega^2$ 이므로 $\lambda =$ 구하고 나면 모드형상 또는 고유 벡터 {x}는 식 (3)을 사용하여 구할 수 있다. 그리고 ω^2 는 진동계의 고유진동수라 부른다.

또한 고유벡터로 구성된 행렬은 모드행렬이라 부르고 식 (6)과 같이 정의될 수 있다.

$$[\phi] = [\{x_1\} \{x_1\} \dots \{x_n\}]$$

$$= \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}$$
(6)

식 (6)에서 ϕ_i 의 *j*는 좌표 번호 즉 노드 점 번호이고 *i*는 모드의 차원 수이다. 정규화 된 고유벡터를 통해 식 (7)과 같이 노드 점이 나 노드 점 사이의 유효 질량을 구해질 수 있다. 따라서 유효 질량 (8)

및 해당된 고유진동수 ω^2 를 통해 식 (8)과 같이 유효 강성을 구할 수 있다.

$$m_{eq} = \frac{1}{\left|\phi_{ji}\phi_{ji}\right|} \tag{7}$$

$$k_{eq} = \omega_i^2 m_{eq}$$

2.2 튜브 타입 제진용 보링바 구조의 질량 및 강성 행렬

튜브 타입 제진용 보랑바 구조의 고유진동수, 유효 질량 및 유효 강성을 구하기 위해서는 보랑바 구조에 대한 질량 및 강성 행렬을 구할 필요가 있다. 보 형태의 보랑바 구조는 동적 연성이 존재하므 로 Fig. 1과 같이 나타낸 튜브 타입 제진용 보랑바 구조의 질량 및 강성을 쉽게 대각선 행렬로 구성하기 어렵다. 튜브 타입 제진용 보랑바 구조에 대한 질량 및 강성 행렬을 구하기 위해서는 단면 형상 및 제진 점(E점)에 따라서 Fig. 2에서 나타낸 바와 같이 5개 노드 점과 4개의 보 요소로 나눠질 수 있다. 각 보 요소에 대한 매개변수는 Fig. 3에서 나타낸다.

각 보 요소의 질량 및 강성 행렬을 구한 후에 서로의 연결 조건에 따라 조립하면 튜브 타입 제진용 보링바 구조의 질량 및 강성 행렬 을 구성될 수 있다. 즉, 오일러 보 이론에 의해 각 보 요소에 대한 질량 및 강성 행렬은 식 (9)과 식 (10)과 같이 표현된다^[11].





Fig. 2 Element of a tube type boring bar



Fig. 3 Parameters of a tube type boring bar

$$K_{i} = \frac{E_{i}I_{i}}{L_{i}^{3}} \begin{vmatrix} 12 & 6L_{i} & -12 & 6L_{i} \\ 6L_{i} & 4L_{i}^{2} & -6L_{i} & 2L_{i}^{2} \\ -12 - 6L_{i} & 12 & -6L_{i} \\ 6L_{i} & 2L_{i}^{2} & -6L_{i} & 4L_{i}^{2} \end{vmatrix}$$
(10)

식 (9)와 식 (10)에서 나타낸 E는 탄성계수이고, p는 밀도이며, A 는 보 요소의 단면적 그리고 L은 보 요소의 길이이다. 아래 첨자로 표시된 *i*는 보 요소의 번호이다.

보링바 구조의 질량 및 강성 행렬을 조립할 때 각 보 요소의 질량 행렬 식 (9) 및 강성 행렬 식 (10)은 식 (11) 및 식 (12)와 같은 구조로 표현하면 더 쉽게 해석할 수 있다.

$$M_{i} = \begin{bmatrix} M_{ai} : & M_{bi} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ M_{bi}^{T} : & M_{ai} \end{bmatrix}$$
(11)

$$K_{i} = \begin{bmatrix} K_{ai} : & K_{bi} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{bi}^{T} : & K_{ci} \end{bmatrix}$$
(12)

튜브 타입 제진용 보랑바 구조의 구성인 4개 보 요소에 대한 각 각의 질량 및 강성 행렬은 식 (9) 및 식 (10)을 통해 계산할 수 있다. 각각 보 요소 사이의 연결 조건에 따라서 튜브 타입 제진용 보랑바 구조의 질량 및 강성 행렬을 조립하면 식 (13) 및 식 (14)과 같이 표현될 수 있다.

$$M_{body} = \begin{bmatrix} m_{ai} & m_{bi} \\ m_{bi}^{T} & m_{c1} + m_{a2} & m_{b2} \\ m_{b2}^{T} & m_{c2} + m_{a3} & m_{b3} \\ & m_{b3}^{T} & m_{c3} + m_{a4} & m_{b4} \\ & & & m_{b4}^{T} & m_{c4} \end{bmatrix}$$
(13)
$$K_{body} = \begin{bmatrix} k_{ai} & k_{bi} \\ k_{bi}^{T} & k_{c1} + k_{a2} & k_{b2} \\ k_{b2}^{T} & k_{c2} + k_{a3} & k_{b3} \\ & & k_{b3}^{T} & k_{c3} + k_{a4} & k_{b4} \\ & & & & k_{b4}^{T} & k_{c4} \end{bmatrix}$$
(14)

보링바는 외팔보의 구조이므로 맨 왼쪽 노드 점1의 변위(v₁)와 회전각(θ_i)은 "0"이 되므로 질량 행렬 식 (13) 및 강성 행렬 식 (14)에 이 경계 조건을 적용하면 튜브 타입 제진용 보링바 구조 의 질량 및 강성 행렬은 식 (15) 및 식 (16)과 같이 표현될 수 있다.

$$M_{body} = \begin{bmatrix} m_{c1} + m_{a2} & m_{b2} \\ m_{b2}^{T} & m_{c2} + m_{a3} & m_{b3} \\ m_{b3}^{T} & m_{c3} + m_{a4} & m_{b4} \\ & & m_{b4}^{T} & m_{c4} \end{bmatrix}$$
(15)

$$K_{body} = \begin{bmatrix} k_{c1} + k_{a2} & k_{b2} \\ k_{b2}^T & k_{c2} + k_{a3} & k_{b3} \\ k_{b3}^T & k_{c3} + k_{a4} & k_{b4} \\ & & k_{b4}^T & k_{c4} \end{bmatrix}$$
(16)

3. GUI 프로그램 구성 및 해석 결과

3.1 GUI 프로그램 구성

튜브 타입 제진용 보랑바 구조에 대한 동적 해석용 GUI 프로그 램은 Fig. 4와 같이 파라미터 입력, 모드 해석 옵션 및 결과 출력 3가지 부분으로 Matlab을 이용하여 구성하였고 GUI 프로그램에 대한 흐름도는 Fig. 5와 같다.

즉, 스텝 1은 설계될 튜브 타입 제진용 보랑바 구조의 형상과 관련된 파라미터를 입력하는 부분이며, 질량 행렬 식 (15) 및 강성 행렬 식 (16)에 입력한 파라미터를 대입하면 질량 및 강성 행렬을 구할 수 있다. 이에 의해서 모드 해석을 실행할 수 있으며 고유진동 수 및 고유 벡터를 구할 수 있다.

스텝 2는 인서트의 설치 위치 및 제진 장치의 설치 위치에 대한 노드 점 번호를 선택하는 부분이다. 노드 점 번호를 선택한 후 정규 화된 고유벡터를 통해 식 (7)을 이용하여 유효 질량을 구할 수 있으 며 식 (8)을 통해 유효 강성을 구할 수 있다.

스텝 3은 튜브 타입 제진용 보랑바 구조의 고유진동수 그리고 선택한 노드 점 사이의 유효 질량 및 유효 강성에 대한 해석 결과를 나타내는 부분이다.



Fig. 4 Interface of GUI program

3.2 GUI 해석 결과 및 고찰

3.2.1 GUI 해석 결과

본 논문에서 설정한 보랑바의 치수적 변수는 지름 25 mm이며 오버행 길이 10D로 하였고 Table 1과 같이 GUI 프로그램에 입력 한 후 튜브 타입 제진용 보랑바 구조에 대한 고유진동수, 고유벡터, 유효 질량 및 유효 강성의 결과를 얻을 수 있다.

튜브 타입 제진용 보랑바 구조에 대한 고유진동수 해석 결과는 Table 2와 같고 모드형상의 해석 결과는 Fig. 6과 같다. 인서트를 설치하는 위치(노드 점5)에서 제진 장치를 설치하는 위치(노드 점3)까지의 유효 질량 및 유효 강성의 해석 결과는 Table 3과 같다.

Table 1 Input parameters in GUI program

Parameter name	Dimension [mm]
Shank length (l_1)	50
Tube length (l_2)	130
Head length (l_3)	70
Vibration output position (l_4)	115
Boring bar diameter (d_1)	25
Boring bar tube inner dia. (d_2)	20



Fig. 5 Flow chart of GUI program

Table 2 Results of natural	frequency in GUI program
1st [Hz]	297.78
2nd [Hz]	2108.10

Table 3 Results of equivalence value in GUI program

m_{eff} [kg]	0.49
<i>k_{eff}</i> [N/m]	1742520



Fig. 6 Mode shape results in GUI program



Fig. 7 Result of modal analysis in CAE software

3.2.2 CAE 소프트웨어 해석 결과

GUI 프로그램에서 얻은 해석 결과를 객관성을 확보하기 위하여 CAE 소프트웨어를 이용하여 튜브 타입 제진용에 대해 Fig. 7과 같이 모드 해석을 하였다. 1차 모드에 대한 해석 결과는 Fig. 8과 같으며 고유진동수는 293.79 Hz를 나타내고 인서트를 설치하는 위치의 모드 값은 2.4182이고 제진 장치를 설치하는 위치의 모드 값은 0.96753 나타낸다.

위에서 얻은 모드 값을 식 (7)에 대입하면 인서트를 설치하는 위 치와 제진 장치를 설치하는 위치 사이의 유효 질량을 식 (17)과 같이 구할 수 있다. 또한 식 (8)에 유효 질량 및 1차 고유진동수를 대입하면 식 (18)과 같이 유효강성을 구할 수 있다.

$$m_{eff} = \frac{1}{\phi_{51}\phi_{31}} = \frac{1}{2.4182 + 0.8772} = 0.47 [\text{kg}]$$
(17)

$$k_{eff} = (2\pi f)^2 m_{eff} = 1606324 [\text{N/m}]$$
(18)

3.2.3 비교 고찰

튜브 타입 제진용 보링바 구조에 대하여 CAE 소프트웨어와 GUI 프로그램을 이용한 고유진동수 해석 결과는 Table 4와 같이



Fig. 8 Modal analysis result of the 1st mode

Table 4 Comparison between natural frequencies in CAE & GUI program

Natural Frequency	CAE [Hz]	GUI [Hz]	Error [%]
1st	293.79	297.78	1.36
2nd	2007.8	2108.1	4.75

Table 5 Comparison between equivalence value errors in CAE & GUI program

	CAE	GUI	Error [%]
m _{eff} [kg]	0.47	0.49	5.59
$k_{\rm eff}$ [N/m]	1606323	1742520	8.47

정리되며 CAE 소프트웨어와 동적 해석용 GUI 프로그램을 이용 한 등가 요소 해석 결과는 Table 5와 같이 정리된다. CAE 소프트 웨어를 이용한 1차 및 2차 고유진동수의 해석 결과와 비교하여 동 적 해석용 GUI 프로그램을 이용한 해석 결과의 오차는 Table 4와 같으며 해석 결과의 오차는 1.36% 및 4.75%를 나타낸다.

CAE 소프트웨어를 이용한 등가 요소의 해석 결과와 비교하여 동적 해석용 GUI 프로그램을 이용한 해석 결과는 Table 5와 같이 해석 결과의 오차는 5.59~8.47%를 나타낸다. 따라서 튜브 타입 제진용 보랑바 구조에 대한 동적 해석 GUI 프로그램은 유효하다 고 할 수 있다.

또한 제진용 보령바 구조에 대한 진동모드해석을 실행할 때 GUI 프로그램의 사용한 시간과 메모리가 기존 CAE 소프트웨어와 어느 정도 차이가 있는 지를 비교한 결과가 Table 6이다. Table 6에서 알 수 있듯이 GUI 프로그램의 사용 시간이 8배 이상 줄었으며 사 용 메모리 공간이 상용 CAE 소프트웨어와 비교하여 15배 이상 작게 나타났다. 따라서 사용 시간 및 메모리 면에서도 우수하다고 할 수 있다.

	CAE	GUI
Elapsed time [s]	1.8	0.22
Total memory used [MB]	861	55

 Table 6 Comparison between time & memory used in CAE

 & GUI program

이상의 결과에서 알 수 있듯이 GUI 프로그램은 제진용 보령바 구조를 설계할 때 3D 모델링을 이용할 필요가 없이 원하는 보령바 의 직경과 오버행 그리고 동흡진기 삽입을 위한 내부 구조의 치수 데이터를 텍스트 형태의 숫자로 입력하고 클릭 한번으로 해당 보링 바의 고유진동수를 얻을 수 있는 매우 간단한 윈도우 프로그램이며 제진용 보링바 구조설계에 시간을 단축할 수 있는 매우 유용한 프 로그램이다.

4. 결 론

본 논문에서는 동흡진기, 센서, 액추에이터 등 장치를 내장화된 공간을 제공될 수 있는 튜브 타입 제진용 보랑바 구조에 대한 동적 해석 GUI 프로그램을 개발을 하였다. 또한 개발한 GUI 프로그램 의 해석 결과의 유효성을 확보하기 위해 상용 CAE 소프트웨어의 해석 결과와 비교한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

(1) 1차 고유진동 주파수는 CAE 소프트웨어 해석 결과와 대비 하여 GUI 프로그램의 해석 결과에서 1.36%의 오차가 나타남을 확인하였다.

(2) 인서트 설치 위치에서 튜브 가운데까지 사이의 등가 질량의 오차는 CAE 소프트웨어 해석 결과와 대비하여 5.6% 정도가 나타 냈고 유효 강성은 8.5%정도가 나타냈다.

(3) 제진용 보링바 구조에 대한 진동모드해석을 실행할 때 GUI 프로그램의 사용한 시간과 메모리가 기존 CAE 소프트웨어에 비교 하여 사용 시간이 8배 이상 줄었으며 사용 메모리 공간이 상용 CAE 소프트웨어와 비교하여 15배 이상 작게 나타났다.

(4) 따라서 해석 결과의 비교를 통해 본 논문에서 개발한 GUI 프로그램은 튜브 타입 제진용 보링바 구조에 대한 동적 해석에 대 해 유효함을 확인하였다.

References

- Lee, D. G., Suh, N. P., 1988, Manufacturing and Testing of Chatter Free Boring Bars, CIRP Annals-Manufacturing Technology, 37:1 365-368.
- [2] Kim, S. K., Hwang, H. Y., Lee, D. G., 2005, Development and Future Prospects of Composite Machine Tools, The Korean Society of Mechanical Engineers, 5 1693-1698.
- [3] Lee, J. H., Rim, K. H., 2000, Vibration Analysis of Boring Bar with Dynamic Vibration Absorber, Korean Society for Noise and Vibration Engineering, 3 1796-1801.
- [4] Seto, K., Yamada, K., 1980, An Investigation on Boring Bars Equipped with a Dynamic Absorber, Proceeding of the 4th International Conference on Production Engineering, 4 422-427.
- [5] Song, D. S., Guo, Y. Y., Hong, J. H., Park, J. K., 2011, The Vibration Measurement of Boring Process by Using the Optical Fiber Sensor at Inside of Boring Bar, The Korean Society of Manufacturing Technology Engineers, 28:6 709-715.
- [6] Guo, Y. Y., Hong, J. H., Song, D. S., 2014, Study of Active Damping Boring Bar Using Piezoelectric Actuator for Small Boring Process, The Korean Society of Manufacturing Technology Engineers, 22:4 658-664.
- [7] Lu, X., Chen, F., Altintas, Y., 2014, Magnetic Actuator for Active Damping of Boring Bars, CIRP Annals-Manufacturing Technology, 63:1 369-372.
- [8] Marra, M. A., Walcott, B. L., Rouch, K. E., Tewani, S. G., 1995, H∞vibration Control for Machining Using Active Dynamic Absorber Technology, American Control Conference Proceedings, 1 739-743.
- [9] Guo, Y. Y., Hong, J. H., Park, J. K., Song, D. S., 2014, An Estimation on Mass and Stiffness of the Damping Boring Bar for Hybrid Passive/Active Absorber Design, Proceedings of the International Conference of Manufacturing Technology Engineers, 11.
- [10] Singiresu, S. R., 2011, Mechanical Vibrations, Pearson Education, Korea.
- [11] Logan, D., 2011, A First Course in the Finite Element Method, Cengage Learning, Korea.