대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 26 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 26, No. 3, 333 ~ 354. Aug 2016

변화율 관점에서 농도 변화에 대한 인식과 표현의 변화 과정에 대한 분석

이 동 근* · 김 숙 희** · 안 상 진*** · 신 재 홍****

학생들의 ‘비와 비율 개념의 발달 과정’에서 변화율 개념이 어떻게 드러나는지에 대한 연구는 추후 변화율 관점에서 미분의 원리를 지도하는 연구에 중요한 기초연구가 될 수 있다. 특히 비율 개념 이해의 상태에 따라 이후 변화율 개념 발달에 장애물 혹은 중요한 개념적 발판이 될 수 있는지에 대하여, 학생을 대상으로 확인한 연구가 드물다는 점에서, 비율 개념과 변화율 개념의 관계에 대한 교수실험은 이후 변화율 관점에서의 미분 학습 관련 연구에 의미 있는 연구 자료를 제공해줄 것으로 보인다.

본 연구는 비율 개념이 변화율 관점에서 함수의 변화를 인식하는데 영향을 준다는 가설을 확인하기 위한 연구이자, 내포량에 해당하는 농도의 변화 과정에 대한 탐구과정을 통하여 학습자의 비율 개념에서 변화율 개념 형성 과정에 대한 이해의 폭을 넓히기 위한 기초연구이다. 세 명의 고등학교 1학년 학생들을 대상으로 그들이 가지고 있는 비율 개념을 확인하고 과제 수행과정에서 비율 개념의 변화를 관찰했다. 또한 비가 변하는 상황 속에서 비율로 함수의 변화를 설명하는 활동을 통하여, 참여 학생들이 변화율 관점에서 함수의 변화를 인식하고 표현하는 것을 관찰한 결과, 비율 개념의 변화가 변화율 관점에서 함수의 변화를 인식하는 것에 변화를 가져올 수 있음을 확인하였다.

Ⅰ. 서 론

미분학습에서 변화율의 의미를 드러내기보다는 대수적 절차에 의한 기계적 학습이 이루어지고 있다는 지적이 꾸준히 제기되어왔으며(이현주, 류중현, 조완영, 2015; 최영주, 홍진곤, 2014; 정연준, 이경화, 2009; 한재영, 연용호, 이상한, 임성모, 1996), 변화율을 통해서 미적분의 중요한 원리를 설명하는 것은 매우 자연스러운 접근으로 볼 수 있음에도, 변화율의 의미를 드러내어 미적분의 중요한 원리를 지도하는 연구는 거의 진행되고 있지 않다(정연준, 이경화, 2009).

한편 Byerley, Hatfield & Thompson(2012)는 비율 개념의 문제가 고등학교 미분 학습의 어려움의 원인이 될 수 있음을 주장했는데, 특히 학생들이 단위 속도에 따라 y값의 변화를 인식하는 것에 대하여 상대적 크기변화에 따른 곱셈적 비교로 나눗셈을 인지하지 못하고 덧셈적 비교로 인지하고 있음을 지적하면서, 상대적 크기에 대한 곱셈적 비교로 나눗셈과 비율을 개념화하는 것이 변화율 관점에서 미분을 이해하는 것에 있어 도움이 된다고 주장했다.

따라서 학생들의 ‘비와 비율 개념의 발달 과

* 문정고등학교, jakin7@hanmail.net (제1 저자)
** 청담고등학교, mathpray@hanmail.net
*** 문정고등학교, sjia0216@hanmail.net
**** 한국교원대학교, jhshin@knue.ac.kr (교신저자)

정'에서 변화율 개념이 어떻게 드러나는지에 대한 연구는 추후 변화율 관점에서 미분의 원리를 지도하는 연구에 중요한 기초연구가 될 수 있다. 특히 선행지식으로서의 비율 개념이 이후 변화율 개념 발달에 영향을 어떻게 미칠 수 있는지에 대하여, 학생을 대상으로 확인한 연구가 드물다는 점에서 비율 개념과 변화율 개념의 관계에 대한 교수실험은 의미 있는 시사점을 제시해줄 것으로 보인다.

비율 개념과 변화율 개념의 관계를 살펴볼 수 있는 교수실험 진행을 위해서는, 이 두 개념이 연결될 수 있는 과제가 필요한데, '농도가 변하는 상황'은 비율 개념과 변화율 개념을 고루 확인할 수 있을 것으로 보인다. 2009 개정 교육과정에서는 삭제되었지만, 내포량에 해당하는 농도 개념은 비와 비율 개념을 분석하기에 적절한 소재라 판단되며, 2009 개정 교육과정 이전에는 초등학교 6학년 비(ratio)와 비율(rate) 단원에서 용질과 용액의 비로 도입되었고, 중학교 1학년의 경우에는 일차방정식의 활용 단원에서 용액, 용매, 용질의 양을 각각 미지수로 잡아서 일차방정식의 해를 구하는 대수 문장제 문제로 소개되었었다. 해당 교육과정에서는 농도가 평형을 이루거나 용질이 용매에 모두 용해된 순간의 농도를 구하는 정적인 상황으로 제시되고 있는데, 농도의 개념에는 용매에 용질이 용해되는 과정에서 변하는 두 양 사이의 연속적인 변화를 담고 있으므로, 변화율 관점에서 농도의 변화를 탐색하는 것도 가능하다. 변화율은 비율 개념의 특수한 경우이므로, 변화율 관점에서 농도 변화의 문제를 접근할 때도 여전히 비와 비율 개념이 중요하다.

비와 비율에 대한 용어의 구분은 학자마다 다양해서 합의된 바는 없으나, 장혜원(2002)는 비의 값과 비율의 용어 구분이 모호함을 지적하고, Freudenthal(1983)의 내적비와 외적비를 모두 비율로 보았다. 특히 비의 값을 비율의 특수한 경우로 보고, 초등학생에게 엄밀한 의미의 개념 구분이 불가능한 상태에서 두 용어를 구분하여 도입하기 보다는 구분 없이 도입하는 방법을 제안하고 있다. 반면 Thompson(1994)와 Lobato & Ellis(2010)의 경우는 비의 값을 따로 구분하지 않고 비에 포함 시키고 있으며, 비의 개념이 반영적 추상화를 거쳐 비율이 된다고 주장한다. 이는 Lobato & Ellis(2010)에서 비율의 본질적 속성으로 '동치 비의 집합을 비율'로 제시한 것에서도 잘 드러난다. 본 연구에서는 학생의 농도 변화에 대한 인식과 표현에 대한 활동 과정이 포함되므로, 정신적 활동 과정에서 비와 비율 개념을 구분한 Thompson(1994)와 Lobato & Ellis (2010)의 비율 개념을 따르기로 한다.

농도를 변화율 관점에서 살펴볼 수 있는데, Thompson(1994)에 의하면 변화율 개념은 비의 개념이 반영적 추상화를 거쳐 얻어진 비율 개념의 특수한 경우로 이해해야한다. 즉, Thompson (1994)에서 '속도를 비율 관점에서 이해한다.'라는 표현에서처럼 농도의 변화를 비율의 특수한 경우인 변화율 관점에서 이해하는 것이 가능하다.

이상의 논의를 정리해 보면 1) 비율 개념이 초등학교에서 중학교 및 고등학교 과정에까지 넓게 활용되는 개념이며, 2) 변화율 개념 역시 비율 개념의 특수한 경우라는 것, 3) 농도의 변화는 초등학교와 중학교에서 학생들에게 익숙한 상황으로서 변화율 관점에서 관찰할 수 있는 함수 상황이 될 수 있다는 점을 확인할 수 있는데, 따라서 학생들의 비율 개념을 확인해서 농도의 변화를 변화율 관점에서 어떻게 인식하는 지 살펴보는 것은 추후 변화율 관점에서의 미분 학습에 대한 연구를 진행하는 것에 중요한 의미를 갖는다. 본 연구에서는 고등학교 1학년 학생들을 대상으로 농도를 구하는 문제 상황에서 어떤 비율 개념을 가지고 있는 지 확인하고, 농도의 변

화 양상을 관찰, 기술, 비교하는 활동을 실시해서 학생들이 어떻게 농도가 변하는 상황을 변화율 관점에서 인식하고 표현하는 지에 대해 6차시에 걸쳐 교수실험을 실시하였다. 특히 본 연구는 학생의 두 변량의 변화 양상 인식과 이해에 대한 연구로서 학생이 변화율에 근거하여 변화 양상을 분석할 수 있도록 함으로써 학생들의 변화율에 대한 인식의 발달에 대한 탐구에 초점을 맞추고 있다. 본 논문에서는 교수실험에 참여한 세 명의 고등학교 1학년 학생 중 농도의 변화를 용질과 용매의 비로 접근한 호윤과 용질과 용액의 비로 접근한 준호, 영찬[1]의 학습 과정에 초점을 두어 농도 변화 양상 인식과정을 세밀히 분석하고 이에 따른 시사점을 논하기로 한다.

본 연구는 앞서 언급한 연구목적에 따라 다음과 같은 연구문제를 갖는다.

- 학생들의 농도에 대한 인식 차이에 따라 농도를 비로 표현함에 있어 어떤 차이가 있는가?
- 학생들은 농도의 변화를 나타내는 함수에서 변화를 어떻게 인식하고 표현해 가는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 농도 개념

가. 내포량으로서의 농도

농도는 용질 대 용액의 비로서 $\frac{\text{용질}}{\text{용액}}$로 표현할 수도 있으며, 내포량에 해당하는 양이다. 내포량의 경우 외연량에 해당하는 양과 달리 일반적인 덧셈이나 뺄셈 연산이 적용되지 않는다. 즉, 농도 10%의 소금물 200g과 20% 농도의 소금물 300g을 합친 농도는 산술적인 덧셈 결과인 30%와는 다른 값을 갖는다.

내포량에 해당하는 양은 속성이 다른 두 외연량의 비에 해당하는 값이며, 정은실(2010)은 내포량을 I, 외연량을 E, 또 다른 외연량을 E′라 할 때 $I=\frac{E}{E'}$를 내포량, $I\times E'=E$, $\frac{E}{I}=E'$를 외연량임을 소개하며, 내포량과 외연량 사이의 구조를 언급했다. 또한 단순한 수의 계산보다는 대상체에 대한 계산의 중요성을 언급한 Schwartz(1988)도 덧셈이나 뺄셈과 달리 곱셈과 나눗셈은 대상체를 변형시키는 연산이라고 주장하면서, 서로 다른 두 양이 투입되어 제 삼의 다른 양이 산출되며 이 양은 앞의 두 양 어느 것과도 다른 양이라고 언급하고, 그 예로 속도와 속력이라는 두 양을 예로 들었다(정은실, 2010, 재인용). Schwartz(1988)가 예를 든 속력이나 속도 역시 내포량과 외연량의 구분에서 내포량에 해당하며, 곱셈, 나눗셈 상황을 잘 이해하기 위해서 외연량 뿐 아니라 내포량을 다루어야 함을 제안했는데, 정은실(2010)은 우리나라의 경우 7차 교육과정에서 학습량 경감 원칙에 따라 속력, 인구밀도 등의 내포량을 타 교과에 넘기고 수학 교과에서 삭제된 것에 대한 문제점을 지적하기도 했다. 특히 정은실(2010)은 우리나라의 7차 교육과정에서 속력과 인구밀도에 해당하는 내포량이 삭제된 것에 반하여, 일본과 싱가포르 등의 국가에서는 여전히 초등학교 때부터 비와 비율에 대한 학습이 강조되고 있는 점을 들면서, 우리나라의 교육과정에서도 내포량을 다룰 수 있는 기회를 제공할 필요가 있음을 주장했는데, 현재 2009 개정 교육과정에서는 초등학교 5,6학년군의 규칙성 영역에서 <교수・학습상의 유의점>으로 ‘속력, 인구밀도, 축척 등과 같이 타 교과 및 실생활에서 비율이 적용되는 예를 찾아보고, 그와 관련된 간단한 문제를 해결하게 한다.’로

1) 영찬, 준호, 호윤은 연구에 참여한 세 명의 학생을 지칭하는 가명이다.

명시함으로써 내포량의 중요성을 강조하는 것으로 보인다. 농도 개념 역시 내포량에 해당하는 양으로써, 농도 개념과 같은 내포량에 대한 노출은 이후 고등학교 교육과정에서 미분학습에 영향을 미칠 수 있을 것으로 판단되며, 따라서 비율 개념에서 시작하여 변화율 개념으로의 인식 변화 과정을 살펴보고자 할 때, 농도 개념에서 연구를 시작하는 것은 적절한 접근방법 중 하나라 생각된다.

나. $\frac{y}{x+y}$ 가 적용되는 상황

용매의 양을 x, 용질의 양을 y라 할 때, 용액의 농도는 용질과 용액의 비인 $\frac{y}{x+y}$ 로 표현된다. 단순히 용액의 진하기를 표현하는 것이 목적이라면 용질과 용매의 비로 표현하는 것도 가능하지만, 수학과 타 교과에서 $\frac{y}{x+y}$ 라는 비의 개념이 적용되는 상황이 발견된다. 중학교 2학년 과학에서 용해도 개념은 '용매에 녹는 용질의 비'로 정의되지만, 농도 개념의 경우는 '용질과 용액의 질량 비'로 정의하고 있다.

통계학에서는 '전체 미혼자 중 남자 미혼자의 비율'과 같이 비율(proportion)을 비의 특수한 형태로 도입하면서 분모가 나타내는 양에 분자가 나타내는 양이 포함되는 것을 다루고 있었으며, 수학과 교육과정에서도 두 변수의 비를 $\frac{y}{x}$가 아닌 $\frac{y}{x+y}$ 로 표현하는 것이 발견되는데, 1) 조건부확률에서 전 사건 S의 각 근원사건에 대한 동등성이 보장된 상태에서 사건 A, B가 각각 ${}_n(A\cap B^c)=a$, ${}_n(A\cap B)=b$, ${}_n(A^c\cap B)=c$, ${}_n(A^c\cap B^c)=d$라 하면, $\mathrm{P}(B|A)=\frac{b}{a+b}$가 되며, 2) 수직선 위의 두 점 $A(0), B(1)$에 대하여, $\overline{\mathrm{AB}}$를 $m:n$으로 내분하는 내분점도 $\frac{m}{m+n}$ 으로 표현된다.

2. 비와 비율

가. 비와 비율의 용어에 대한 논의

비와 비율은 초등학교 수학의 가장 중요한 주제 중 하나(홍갑주, 2013)로서, 비와 비율에 관련된 용어의 정의가 명확하게 구분되지는 않고 있다. 이에 따라 국내 연구에서는 장혜원(2002)는

<표 II-1> 교과서의 용해도와 농도에 대한 정의(임태훈 외, 2015)

	교과서 내용
(퍼센트) 농도	Science 자료실 ········ 퍼센트 농도 식품이나 약품 속에 들어 있는 성분의 양을 나타낼 때 많이 사용하는 것이 퍼센트 농도이다. 퍼센트 농도는 용액 100 g 속에 녹아 있는 용질의 g수를 뜻하며, 다음 식과 같이 나타낸다. $\text{퍼센트 농도(\%)} = \frac{\text{용질의 질량}}{\text{용액의 질량}} \times 100 = \frac{\text{용질의 질량}}{\text{(용매+용질)의 질량}} \times 100$ 퍼센트 농도는 물질의 종류와 관계없이 용액에 들어 있는 용질의 질량에 따라 달라진다.
용해도	일정량의 용매에 녹을 수 있는 용질의 양은 물질에 따라 다르다. 또, 같은 물질이라도 일정량의 용매에 녹을 수 있는 양은 온도에 따라 다르다. 어떤 온도에서 용매 100 g에 최대로 녹을 수 있는 용질의 g수를 **용해도**라고 한다.

비의 값과 비율이 교육과정에서 어떻게 변해왔는지 논하고 그 둘을 구분하지 말고 하나의 용어로 사용하는 것을 제안했고, 정은실(2003)은 일상생활이나 수학 외적 분야에서 비와 비율이 혼용되어 사용됨을 지적하고 이에 대한 합의와 일관성이 필요함을 지적했다. 박교식(2010)의 경우는 우리나라와 다른 나라의 비율과 비의 값에 대한 용어의 사용을 분석하여 용어 사용의 적절성에 대하여 논하였다. 홍갑주(2013)의 경우는 2007 개정 교육과정 교과서를 기준으로 비, 비의 값, 비율, 백분율의 관계에 대하여 논하고 이들 사이의 관계를 재설정하여 대안적 정의를 제안했다.

국외에서도 비와 비율의 용어 사용에 혼란이 있음을 지적한 연구들이 있는데 국내에서와 마찬가지로 학자들마다 구분 기준에 대한 명확한 합의가 된 것은 아니다. Freudenthal(1983)이 비가 상황이나 맥락으로부터 파악되지 못함으로써 모호한 관계로 인식되고 있음을 지적한 반면, Thompson(1994)의 경우, 비와 비율의 용어 사용에 혼란이 있는 이유에 대하여 상황 그 자체에 근거하기 때문이라고 지적하고, 상황을 비와 비율의 범주로 구분하려 하기 보다는 비와 비율을 지적 조작의 산물로 받아들여서 비를 두 양의 곱셈적 비교의 결과로 보고 비율은 비 개념이 반영적 추상화된 상수 비로 받아들일 것을 주장했다. Lobato & Ellis(2010)도 비의 개념을 양 사이의 덧셈적 비교와 곱셈적 비교 중에서 곱셈적 비교에 중점을 두는 것에 동의하면서, 비의 개념에서 두 양을 합성 단위로 결합하는 또 다른 측면을 주장했는데, 예를 들어 속력을 두 양의 합성 단위로 결합한 비로 설명할 수 있다고 했다. 즉, 4초 동안 10cm를 움직인 애벌레의 속력은 '10:4'라는 합성단위를 생성하며, 이것은 다시 '2.5:1'이라는 합성단위로 변형되고 이후 이 새로운 단위가 비례추론과 관련하여 효율적인 도구로 작용한다고 했다. 또한 비율에 대해서도 '무수히 많은 동치인 비들의 집합'이라고 언급하며, Thompson(1994)의 주장과 같이 비의 반영적 추상화된 개념으로 비율을 받아들인 것으로 보인다.

나. 비와 비율에 대한 연구

비와 비율 개념에 대한 연구는 비와 비율 개념이 갖는 속성에 관련된 내용학적 접근(김수미, 2015; 장혜원, 2002; 정은실, 2003b; 홍갑주, 2013; Lobato & Ellis, 2010)과 학생들과 예비교사들의 비와 비율 개념에 대한 이해에 초점을 맞춘 교수학적 접근(강향임, 최은아, 2015; 김수현, 나귀수, 2008; 방정숙, 김상화, 2007; 정은실, 2003a)외에도 비와 비율 관련 교재구성 및 교과서에 대한 논의(김경희, 백희수, 2010; 박희자, 정은실, 2010; 김수현, 나귀수, 2008)등 다양하게 진행되어왔다. 본 연구는 이러한 비율 관련 연구들을 바탕으로 학생들이 농도가 변하는 상황에서 비율 개념의 특수한 경우인 변화율 개념으로 상황을 인식하고 그 변화를 표현하는 과정을 탐구하는 연구로서, 본 연구를 통해 초등학교에서의 비율 개념이 이후 고등학교 과정의 변화율 및 미분학습에 영향을 미친다는 Byerley, Hatfield & Thompson(2012)와 Zandieh(2000) 등의 가설에 대하여 경험적 자료를 근거로 뒷받침 할 수 있을 것으로 보인다.

3. 변화율

가. 교육과정에서의 변화율

변화율은 공변(covariation) 관계에서 변수들의 변화량의 비에 해당하는 값으로써, 교육과정에서는 고등학교 2학년 미분 단원에서 평균변화율과 순간변화율로 소개되는데, 평균변화율과 순간변

화율을 정의하는 과정에는 변화율이 내포량인지 외연량인지를 명시적으로 드러나지 않으나 실생활 문제로 이용하는 소재가 시간에 따른 다른 양의 변화에 대한 변화율을 다룸으로써 문제 상황에서 내포량에 해당하는 수학적 대상을 다루어야 한다는 것을 간접적으로 드러내고 있다.

현 교육과정에서는 할선의 기울기의 극한값이 접선의 기울기가 된다는 것을 이용하여, 순간변화율을 평균변화율의 극한으로 도입하고 있는데, 임재훈, 박교식(2004)은 접선에 대한 논의 과정에서 기하학적 접선 개념과 함수적 접선 개념으로 구분하여 순간 변화율을 접선의 기울기로 동일시하는 것에서 자칫 수정하기 힘든 1차 직관을 형성할 수 있음을 지적했다. 한편 강향임(2012)은 아리스토텔레스가 물체의 움직임에 대한 순간 속도를 부정하고 평균 속도만을 인정했다고 언급했다. 이는 평균변화율에서 시작하여 평균변화율의 극한으로 순간변화율을 도입하는 것에 대한 현 교육과정의 방식이 역사발생적 관점에서 볼 때 자연스럽다는 근거가 되기도 하지만 평균 변화율에서 순간변화율로의 전환과정에서 학생들에게 많은 인지적 갈등이 발생할 수 있음을 시사해주기도 한다.

나. 학생들의 변화율 개념 발달에 대한 연구

Confrey & Smith(1994)와 Thompson(2008) 및 Ellis(2011)등에 의하여 직간접적으로 지수함수에서의 곱셈적 변화율에 대한 논의가 진행되었다. 보통 교육과정의 지수함수 학습에서 변화율 개념은 미적분 학습과 연계하여 순간변화율 개념을 평균변화율의 극한으로 도출한 다음 순간변화율을 함숫값으로 갖는 도함수를 정의하는 방식으로 확장되며 학습이 이루어지는데, 이 때 평균변화율과 순간변화율은 함수에서 정의역의 변화량에 따른 함숫값의 변화량의 비를 고려하는 개념이라면, 곱셈적 변화율은 함숫값의 비를 고려하는 개념이다.

$$\frac{f(x+\triangle x)}{f(x)} = C_{\triangle x} \text{ (단, } C_{\triangle x}\text{는 } \triangle x\text{값이 정해지면 결정되는 상수이다.)}$$

Confrey & Smith(1994)는 학생들이 함수에서 변화율의 곱셈적 표현을 조정하는 것이 변화율의 개념을 더 탄탄하게 만드는데 도움이 된다고 보았으며, 단위를 구성할 때의 분할(Splitting)의 역할을 중요하게 보았다. 또한 이차함수에서의 덧셈적 변화율과 지수함수에서의 곱셈적 변화율에 대한 구분을 통하여 학습자가 함수적 상황에서 드러나는 변화를 파악할 때 변화의 세기(intentisy)를 측정하는 양으로서 어떤 것을 택할 것인지 관찰할 필요가 있음을 드러내었다. 이는 현 교육과정에서 도함수 학습과정의 구성은 함숫값의 변화의 정도를 측정하는 양으로서 '변화율'을 선택하도록 지도하는 방식에 대하여 반성적 접근을 가능하게 해준다. 한편 Ellis(2011)는 지수함수의 곱셈적 변화율 접근을 통해 학생이 함수적 상황에 대해 모델링하고, 이러한 두 변수 사이의 관계를 표현하는 과정을 통해 지수함수의 대수식을 획득하는 것이 중요하다고 보았다(이동근, 문민정, 신재홍, 2015).

Zandieh(2000)는 함수의 미분 개념을 이해하는데 있어서 입력 값과 출력 값의 공변 관계의 관점이 중요하다는 것을 제안하였으며, 특히 도함수의 개념은 무한한 입력 값에 따라 한 점에서의 계차 몫의 극한으로서의 출력 값이 나타나는 공변의 결과로 보았다. 또한 그는 접선의 초기 개념이 적절하게 재구성되지 않는다면 두 양 사이의 관계에 대한 비율 개념이 미분계수와 연결되지 못한다고 주장했는데, 여기서 비율 개념의 미분계수와의 연결성은 본 연구에서도 주목하여

고민한 부분이다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 교수 실험

질적 연구 방법의 하나인 교수 실험은 질적 연구의 기본 전제와 특징을 그대로 지닌다. 연구대상을 복잡한 교육 현상 속에서 행동하는 존재로 보기 때문에 연구대상의 행동 방식에 대하여 단순히 그 안에 있는 요인들의 성질을 각각 분리하여 분석하는 것만으로는 설명할 수 없는 복잡한 체계로 간주하고, 이 체계가 지속적으로 주변 상황에 반응, 적응해가는 체계를 연구하는 것을 그 목표로 한다(Lesh & Clarke, 2000). 또한 교수 실험을 통하여 교수・학습 상황에서 학생들의 사고에 대한 개념적 분석을 토대로 참여 학생들의 수학적 사고 및 학습과정을 직접 경험하고 이를 통해 학생들의 수학지식 발달에 관한 역동적 모델을 만드는 것이 가능하다(Steffe & Thompson, 2000).

본 연구의 교수 실험을 위해 연구자들은 학생들의 변화에 대한 인식을 관찰하기 위한 초기 과제를 공동으로 구성하고, 학생들 간의 의사소통만으로 해결되지 않는 상황에서만 적절한 수준으로 개입하여 발문을 제시하는 방식으로 교수 실험을 진행하였다. 또한 매 차시 실험 종료 이후 해당 차시에서 보인 학생들의 사고와 행동의 의미를 분석하고 이를 토대로 다음 차시 교수 실험을 설계하였다. 교수 실험에서 투입된 과제 중에서 본 연구와 관련지어 살펴볼 과제는 총 7개이다. [과제1-1]과 [과제1-2] 및 [과제3-1], [과제3-2]는 학생들의 당도 표현 과정에서의 비율 개념을 관찰하기 위한 목적으로 학생들의 반응에 근거하여 연구자들의 협의를 거쳐 순차적으로 투입되었으며, [과제3-3]은 [과제3-2]까지의 과정에서 드러난 학생들의 당도 표현에 대한 서로 다른 두 가지 개념을 근거로 함수적 상황을 제시하고 이에 대하여 학생들이 두 함수를 어떻게 구분하고 인식하는지 관찰하기 위한 목적으로 제시된 과제인데, 학생들이 정적인 비와 비율 개념이 아닌 동적인 비와 비율 개념을 함수와 연결 지어 변화를 어떻게 인식하는지 살펴볼 수 있는 과제이다. [과제4]의 경우는 학생들이 내포량에 해당하는 당도에 대한 비율 개념의 수준을 살펴보기 위한 것으로서 [과제4] 수행이후 [과제3-3]에서의 학생 반응에 어떠한 변화가 발생하는지 살펴볼 수 있는 계기가 되었다. 즉, 학생들에게 [과제4] 이후 [과제3-3]에서 제약 조건을 수정하여 다시 [과제5-1]를 투입해서 학생들의 반응을 분석했다.

교수 실험 진행은 교직경력 15년차인 수학교사가 진행하였으며, 연구자 2명은 관찰자로 참여하여 교수 실험의 완성도와 질을 높이고 방향성을 제시하는 역할을 하였다.[2] 교수 실험은 총 5차시로 구성되었고, 참여 고등학생 세 명과 1학년 1학기 중간고사 이후인 5월 중순부터 시작하여 6월 중순까지 약 한 달간 진행되었다.. 본 논문에서는 참여한 세 명의 학생들이 전체 교수실험을 통하여 1) 농도가 서로 다른 두 용액의 농도 비교와 2) 농도는 같지만 용액의 양이 변하는 상황에서 농도에 대한 수식표현에 대하여 비율 관점에서 어떻게 인식하고 표현하는지 살펴보고, 3) 농도가 변화하는 과정에서 변화율에 대한 인식과 표현의 변화를 살펴볼 것이다.

2. 연구 대상자의 특성

세 명의 학생은 서울 소재 일반계 고등학교 1학년 학생으로서 영찬의 경우는 전국연합모의고

2) 교수 실험을 진행한 수학교사는 제 1저자이며, 제 2, 3 저자가 관찰자로 참여하였다.

사 수학영역에서 1등급이었고, 호윤은 2등급, 준호는 4등급이었다. 세 명의 학생들이 선택된 이유는 자신의 의견에 대하여 잘 설명할 수 있고 지필고사 수학 영역 등급이 서로 상이한 학생들을 선정하고자했기 때문이며, 이러한 의도적인 표본선정은 연구자가 발견과 이해 및 통찰력을 가지고 있다는 전제하에 많은 정보를 얻을 수 있다는 장점이 있다. 사전 면담을 통하여 선행학습의 정도를 파악한 결과 1학년 1학기 내용 중 기말고사 범위에 해당하는 고차방정식과 도형의 방정식 일부에 대한 사전 학습 경험은 있으나, 평균변화율과 순간변화율을 포함한 연속, 미분계수, 접선, 도함수에 대한 지식은 없는 것으로 판단되었다. 다만 고등학교 1학년 2학기의 내용 중 '유리함수와 무리함수'에 대하여는 학생과의 사전 조사과정에서 직접적인 선행학습 경험은 없다고 문답으로 확인하였으나, 사전 경험의 가능성을 배제할 수는 없다. 따라서 매 차시 교수 실험 자료에 대한 분석과정에서 관련 지식이 드러나는 학생 반응의 경우에는 연구자들이 선행학습에 기인한 반응인지를 협의하여 분석하였다. 한편 전국연합모의고사 수학 영역으로 수학 수준을 구분하기는 하였으나, 이 기준이 본 연구에서 탐구하고자 하는 비율 개념과 변화율 개념의 수준을 뜻하는 것은 아니므로, 교수실험 초반부에 농도가 다른 두 용액의 농도 비교 관련 과제를 통하여 비율 개념의 수준을 파악하고자 하였다. 이 과정에서 농도에 대한 인식에 대하여, 호윤의 경우 다른 두 학생들과 다른 점이 관찰 되었는데, 다른 학생들이 용질 대 용액의 비로 농도를 인식하는 반면 호윤의 경우는 용질 대 용매의 비로 농도를 인식하였다. 이 후 교수실험이 진행되면서 호윤의 농도에 대한 비교 양의 인식 차이가 문제 해결을 위한 접근 방식 결정에 중요한 역할을 한 것으로 드러났는데, 비를 구성하고 비율 개념으로 발전시키는데 있어 용질 대 용매의 비로 인식하는 것이 변수 처리에 있어 용질 대 용액의 비로 접근하는 것 보다 용이한 것으로 드러났다.

3. 자료 수집 및 분석 방법

교수 실험에서는 이전의 교수실험 중 일어난 일들을 기반으로 하여 다음 교수실험을 구성하게 되므로, 자료수집 과정에서 사용될 교과과정의 내용이나 해당 과정에 대한 시간 분배를 미리 완벽하게 계획할 수 없다. 따라서 연구자가 분명히 다루고자 하는 특정한 수학적 영역과 주제를 가지고 있다 하더라도 세부적인 교과과정의 구성은 유연하게 조정 가능하며, 이러한 과정을 통해 연구자 자신의 해당 교육과정의 수학적 지식에 대한 통찰력도 증가되고, 결국 학생들의 실제 학습과정을 반영한 새로운 교과과정을 구성할 수 있게 된다(Confrey & Lachance, 2000).

본 연구에서는 3명의 참여 학생에 대한 각 학생의 수학적 활동 및 기록을 촬영하기 위하여 비디오카메라 1대와 전체 교수실험을 담을 비디오카메라 1대로 수업을 촬영했으며, 별도로 녹음된 오디오자료와 함께 전사과정을 통해 자료 분석 작업에 사용되었다.

또한 학생들이 교수실험 동안 작성한 활동지, 연구자들이 작성한 현장노트, 다음 교수실험 과제를 구성하기 위한 연구자간의 회의일지도 수집되어 연구수행 과정 중 일어나는 교수학적 결정의 수정과 변화의 양상을 기록하고 이를 기초로 교수실험 중 발생했던 수정과 재구성의 이유를 'Ⅳ. 결과분석' 부분에 함께 기술하였다.

Ⅳ. 결과 분석 및 논의

1. 당도[3]에 대한 인식의 변화

[과제1-1] 한 통에 물 세 컵을 넣고 두 스푼의 설탕을 타서 잘 흔들고, 다른 한 통에는 물 네 컵을 넣고 세 스푼의 설탕을 탄 다음 잘 흔들었다. 어느 쪽 통 설탕물이 더 달까? 그 이유를 설명하고 얼마큼 더 단지 표현해 보시오.

설탕물의 단 정도를 표현하고 그 정도를 비교하는 [과제1-1]에 대하여, 영찬과 호윤은 용액의 진한 정도를 '용질과 용액의 비'로 표현했는데 설탕 한 스푼의 양과 물 한 컵의 양을 같은 크기의 양으로 보고 비를 표현했다. 즉, 물 세 컵과 설탕 두 스푼의 단 정도를 $\frac{2}{3+2}$로 보고 $\frac{2}{5}$로 표현했다. 반면 준호는 고민만 하고 단 정도를 표현하지 못했는데, 교사가 문제 속에서 설탕 한 스푼의 무게와 물 한 컵의 무게가 같다는 보장이 없음을 학생들에게 상기시키고 다시 단 정도를 비교하라고 요구하자, 비로소 준호는 설탕의 양을 y로 두고 물의 양을 x라 하여 $\frac{2y}{3x+2y}$와 $\frac{3y}{4x+3y}$로 단 정도를 표현했다. 결과적으로 용액의 단 정도를 비로 표현함에 있어, 세 학생 모두 용질과 용액의 비로 표현했음을 확인할 수 있었다.

한편 두 용액의 단 정도를 서로 비교하는 과정에서 호윤의 경우 '용질과 용액의 비'로 당도를 표현하던 것에서 '용질과 용매의 비'로 당도를 표현하는 것으로 변화를 보였다. [대화1]은 호윤이 당도를 용질과 용매의 비로 표현하는 것에 대한 교사와 호윤의 대화내용이다.

<u>대화1</u>

호윤 : 이게 당도라고 하면, 이것도 통분해서, 그래서 이게 더 달 것 같은데.

교사 : 이건 3하고 2를 쓴 거고 이건 4하고 3을 쓴 거네?

호윤 : 네

교사 : 그야말로 그냥 설탕물이 아니라 물과 설탕의 비를 표현한 거야?

호윤 : 네

교사 : 그래요? 그러면 이렇게 한 거에서 이게 달다고 한 것은 2/3보다 3/4가 크니까?

호윤 : 네

호윤은 '$x=$물의 양', '$y=$설탕의 양'을 적고 나서 $\frac{2y}{3x}, \frac{3y}{4x}$를 적은 다음 $\frac{8y}{12x}, \frac{9y}{12x}$를 적었다. 여기서 $\frac{2y}{3x}, \frac{3y}{4x}$의 표현은 당도를 용질과 용매의 비로 표현한 것으로 보이며, $\frac{8y}{12x}, \frac{9y}{12x}$와 같이 표현한 것은 당도를 비교하기 위해 통분을 한 것으로 보인다.

이후 [과제1-2]에서 당도의 변화과정에 대한 당도 비교 문제에 대하여,

[과제1-2] 통에 물 세 컵을 넣고 두 스푼의 설탕을 타서 잘 흔든 다음, 물 두 컵과 설탕 한 스푼을 추가로 넣고 흔들었다. 통의 설탕물은 물과 설탕을 추가하기 전보다 달아졌을까 아니면 싱거워졌을까? 그 이유를 설명하고 얼마큼 단 정도가 변했는지 표현해보시오.

호윤은 [과제1-2]에 대하여 $\frac{3y}{5x}, \frac{2y}{3x}$와 $\frac{9y}{15x}, \frac{10y}{15x}$를 적은 것으로 볼 때, [과제1-1]에서의 반응과 마찬가지로 당도를 용질과 용매의 비로 표현한 반면, 다른 두 학생(영찬, 준호)는 [과

3) 교수실험에서 학생들이 설탕물의 단 정도를 표현함에 있어 '용질과 용액의 비'와 '용질과 용매의 비'의 서로 다른 두 가지 비로 표현할 수 있으므로, 두 반응을 모두 허용하는 입장에서 설탕물의 단 정도를 '당도'로 표현하기로 한다.

제1-1]을 수행했을 때와 마찬가지로 용질과 용액의 비로 인식하고 있음이 확인되었다. 영찬은 '물:A', '설탕:B'로 적어서 물의 양과 설탕의 양을 각각 A, B로 표현한 다음,

$\dfrac{2B}{3A+2B} \Rightarrow \dfrac{2B+B}{3A+2B+2A+B} = \dfrac{3B}{5A+3B}$를 적어서 결과적으로 당도를 용질과 용액의 비를 수식으로 표현했고, 준호의 경우는 식으로 표현하지 않았지만 호윤의 표현에 대하여 '$\dfrac{\text{설탕}}{\text{설탕물}}$이 농도 아니에요?'라고 교사에게 질문한 점에서 당도를 용질과 용액의 비로 인식하고 있음을 드러내었다.

이상에서 당도에 대한 세 학생들의 인식의 변화를 정리하면, 호윤의 경우는 최초 용질과 용액의 비로 인식하던 것에서 용질과 용매의 비로 인식의 변화가 있었고, 영찬의 경우는 용질과 용액의 비로 당도를 인식하는 것에는 변화가 없지만 호윤의 방식을 이해한다는 입장을 보였다. 마지막으로 준호의 경우는 용질과 용액의 비로 당도를 인식하는 것에 변화가 없었고 호윤의 방법을 인정하지 않았다.

2. 당도 비교과정에서 나타난 학생들의 비율 개념

가. 당도가 다른 두 용액의 당도 비교 과정에서의 비율 개념

당도가 서로 다른 두 용액에 대하여 당도를 비교하는 [과제1-1]에서, 학생들은 당도를 $\dfrac{\text{용질의 양}}{\text{용액의 양}}$이나 $\dfrac{\text{용질의 양}}{\text{용매의 양}}$과 같은 비로 표현한 다음 비의 크기를 비교했다. 이때 호윤과 영찬에게서 비의 값을 비교하기 위해 통분하는 것이 관찰되었는데, 호윤과 영찬의 반응을 예로 살펴보면 $\dfrac{2}{5}$와 $\dfrac{3}{7}$을 적고 나서 통분하여 $\dfrac{14}{35}$와 $\dfrac{15}{35}$로 바꾼 다음 대소 비교를 하고 있었으며, 이는 준호[4]에게서도 동일하게 관찰되었다. [과제1-1]을 해결하는 과정에서는 두 학생 모두 통분 이상의 다른 의미를 담고 있는 것으로 보이지는 않았지만, 두 학생이 $\dfrac{2}{5}=\dfrac{14}{35}$와 $\dfrac{3}{7}=\dfrac{15}{35}$를 인식하고 있음에는 분명한 것으로 보인다.

나. 당도가 변하는 과정에서의 비율 개념의 특징

당도가 변하는 상황을 제시한 [과제1-2]와 [과제3-1]은 결과적으로 동일한 문제이며, 단지 [과제3-1]은 [과제1-2]와 비교하여 변화의 의미를 더 강조한 문제이다.

> [과제3-1] 한 통에 물 세 컵을 넣고 두 스푼의 설탕을 타서 잘 흔들고, 다른 한 통에는 물 세 컵을 넣고 두 스푼의 설탕을 탄 다음 다시 한 컵의 물과 한 스푼의 설탕을 타서 잘 흔들었다. 어느 쪽 통 설탕물이 더 달까? 그 이유를 식으로 설명하고 얼마큼 더 단지 표현해보시오.

[과제3-1]을 수행하면서 학생들에게서 드러난 비율 개념은 다음과 같은 두 가지이다.

첫째, 영찬이가 $\dfrac{\frac{2}{3}}{1}$과 $\dfrac{\frac{3}{4}}{1}$로 표현하여 당도의 변화를 나타냈는데, [대화2]에서 교사가 분모에 적은 1의 의미를 물었을 때, 영찬이가 '이걸 한

4) 준호의 경우는 [과제1-2]가 아닌 [과제3-1]에서 $\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{4}{10}+\dfrac{5}{10}$으로 표현하는 과정이 관찰되었는데, 이 역시 통분의 과정으로 보인다.

컵으로 계산 했을 때'로 답을 한 것으로 보아, 이는 $\frac{\text{비교하는 양}}{\text{기준량}}$이라는 비율의 정의 중에서 기준량을 1로 보는 특수한 경우에서의 비율 개념처럼 보인다. [대화2]는 영찬의 기준량이 1일 때의 비율 인식에 대한 교사와 영찬의 대화이다.

대화2

교사 : 1분에(분모에 1)은 왜 넣은 거야?

영찬 : 그러니까 이걸 한 컵으로 계산 했을 때...

교사 : 아! 한 컵에 설탕이 2/3 들어있고 한 컵에 설탕이 3/4 들어있다고? (학생에게 확인)

영찬 : 네 그래서 문제가 그때 풀었던 거랑 비슷하다고 생각하는데.

둘째, 학생들의 내포량으로서의 당도 인식에 대한 교사와 학생들의 대화인 [대화3]을 보면, 영찬이가 '비율로 따진 분수니까 계산하는 식으로 계산하면 안 나오지 않을까? 여기 분모에 따로 더하고 분자에 따로 더해야할 것 같은데'라고 표현하고 있는데, 이는 당도를 내포량으로 인식하고 있다는 추측이 가능한 부분이다. 한 편 대화에서는 드러나지는 않았지만, 준호의 경우도 $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}$라고 적은 다음 $\frac{4}{10}+\frac{5}{10}$으로 적기는 했지만 최종 계산 결과를 적지 않고 '이렇게 하면 안될 것 같아요.'라고 답을 한 것에서 당도를 내포량으로 인식하는 것으로 보였다.

대화3

교사 : 그러면 (2/3)+(1/1)이 3/4에요?

학생들 : 아니요

교사 : 그러면 농도는 어떻게 계산해요? 아니 이게 농도는 아니죠. 이건 물과 설탕의 비율이지요?

학생들 : 네

교사 : 지금 그런 식이 되는 건 아니지만, 2/3에 1/1을 섞는데 그 결과는 3/4가 나와야하는 거네요.

학생들 : 네

교사 : 써 볼래요. 일단 2/3하고...

영찬 : 비율로 따진 분수니까 계산하는 식으로 계산하면 안 나오지 않을까 여기 분모에 따로 더하고 분자에 따로 더해야할 것 같은데 그니까 지금 보면 결과적으로 들어간 설탕은 두 스푼에 한 스푼이니까 세 스푼이고 물은 세 컵에 한 컵에서 네 컵이니까

교사 : (2+1)/(3+1)로 봐야한다는 거야?

영찬 : 네. 어차피 농도로 한 것이 아니라 비율로 한 거니까.

다. 당도가 일정한 용액에서 덜어낸 용액의 당도 비교 과정에서의 비율 개념

[과제3-2] 네 컵의 물에 세 스푼의 설탕이 섞여있는 통에서 한 컵의 설탕물을 덜어내면, 덜어낸 설탕물과 남아있는 설탕물의 단 맛 정도를 식으로 비교하여 표현하시오.

[과제4] 네 컵의 물에 세 스푼의 설탕이 섞여있는 통에서 한 컵의 설탕물을 덜어내면, 덜어낸 설탕물과 남아있는 설탕물의 단 맛 정도를 농도 개념의 식으로 비교하여 표현하시오.

[과제3-2]과 [과제4]는 당도가 일정한 용액에서 한 컵의 물을 덜어냈을 때, 남은 양과 덜어낸 설탕물의 당도를 비교하는 과제이다. 단, [과제3-2]의 경우와 달리 [과제4]의 경우는 용질과 용액의 비에 해당하는 농도 개념으로 당도를 비교하라는 제한이 있다. 이는 [과제3-2]를 수행하는 과정에서 용질과 용매의 비로 당도를 비교하는 것이 관찰 되어, 이후 [과제4]에서는 용질과 용액의 비로 동일한 결과를 해석해낼 수 있는지 확인하기 위해서 덧붙인 제한 조건이다.

[과제3-2]에서 다른 학생들이 용질과 용액의 비로 당도를 표현하고 비교하려고 했던 반면, 호윤의 경우는 처음부터 용질과 용매의 비로 당도

를 표현하려고 했다. 또한 용질과 용액의 비로 당도를 표현했던 학생들이 [과제3-2]에서 답을 제시하지 못하고 어려움을 겪었지만, 호윤의 경우는 $4:3$을 적고 $4-4x:3-3x$을 생각한 다음에 비례추론에 의하여 내항과 외항의 곱을 곱해보았더니 결과가 $12-12x=12-12x$로 같아서 $4:3=4-4x:3-3x$가 성립한다는 논리로 두 용액의 당도가 같다고 설명했다. [대화4]에서 호윤의 덜어낸 용액과 남은 용액의 당도 비교에 대한 표현을 살펴보면, $4:3=4-4x:3-3x$에서 4는 전체 물의 양, 3은 전체 설탕의 양, $4x$는 한 컵 덜어낸 설탕물 중에서 물의 양, $3x$는 한 컵 덜어낸 설탕물에 녹아있는 설탕의 양을 각각 표현한 것으로 보인다.

<u>대화4</u>

교사 : 이야기 해봐요 그게 뭔지(호윤이 것을 보면서)

호윤 : 그러니까 물과 설탕이 4:3인데 설탕물 하나 빼면 그 설탕물도 4:3이니까 물은 4x만큼 빠지고 설탕은 3x만큼 빠지니까 내항의 곱과 외항의 곱은 같아서 당도가 같다고.

교사 : 조그마한 x의 역할이 뭐에요? 4x와 3x의 용어를 정확히 설명해 줄 수 있어요? 4는 전체 물의 양이고, 3은 전체 설탕 양이고 4x는 한 컵에서 덜어낸 양에서 물의 양을 말하는 거에요?

호윤 : 네

교사 : 이건 그러면 호윤이 식으로 하면 남아있는 물에서 한 컵을 덜어내고 남은 물에서 물의 양과 설탕의 양이네. 큰 덩어리에서 덜어낸 다음 큰 덩어리와 남은 양에서의 비가 같다는 거네?

호윤 : 네

교사 : 그건 이걸 보인 건 아니잖아(덜어낸 한 컵과 원래 양과 비교한 건 아니라는 뜻) 보여야할 것은 4:3과 4x:3x 아니야?

영찬 : 그러면 이것(덜어내고 남은 것)을 빼고 남은 걸로 해도 되는 거 아니에요?

교사 : 음... 난 이해했어. 같은 논리네.

준호 : 저 두요

[대화4]에서 밑줄 친 영찬의 표현은 ‘가비의 리’의 원리에 해당하는 개념을 구성한 것으로 보인다. 호윤이 표현한 당도의 비는 설탕물을 한 컵 덜어내기 이전 원래 설탕물의 당도와 덜어내고 남은 설탕물의 당도에 대한 비로써, 식으로 표현하면 $\frac{3}{4}=\frac{3-3x}{4-4x}$가 된다. 교사는 이에 대하여 구하고자 하는 관계는 $\frac{3}{4}=\frac{3x}{4x}$라고 확인시켜준 것인데, 이에 대하여 영찬은 덜어내고 남은 것을 원래의 양에서 빼는 것으로 생각하면 호윤의 표현에서 교사가 지적한 상황으로 변환이 가능하다고 했다. 이를 식으로 표현하면 $\frac{3}{4}=\frac{3-(3-3x)}{4-(4-4x)}=\frac{3x}{4x}$이 되며, 결과적으로 호윤과 교사 그리고 영찬의 상호작용을 통하여 학생들은 ‘용질과 용매의 비’라는 개념에서 시작하여 ‘가비의 리’에 해당하는 개념을 비형식적으로나마 구성한 것으로 보인다.

또한 $\frac{3}{4}=\frac{3-(3-3x)}{4-(4-4x)}=\frac{3x}{4x}$와 같은 표현은 비의 값의 동치비들의 집합이라는 비율 개념 측면에서 살펴볼 때, 이전에 호윤과 준호가 서로 다른 당도를 비교하기 위해서 $\frac{2}{5}=\frac{14}{35}$로 분모를 통분하였던 것보다는 한 층 더 높은 수준으로 판단되는데, $\frac{3}{4}=\frac{3-(3-3x)}{4-(4-4x)}=\frac{3x}{4x}$의 표현은 $\frac{2}{5}=\frac{14}{35}$의 표현과 비교하여 볼 때, $\frac{2}{5}=\frac{14}{35}$뿐만 아니라 $\frac{2}{5}=\frac{14}{35}=\frac{14-2}{35-5}$까지도 고려한 것이기 때문이다.

한편, 동일한 상황에 대하여 ‘용질과 용액의 비’를 이용하여 당도를 비교하는 [과제4]에 대한 수행에서 세 학생 모두 [과제3-2]를 수행할 때와

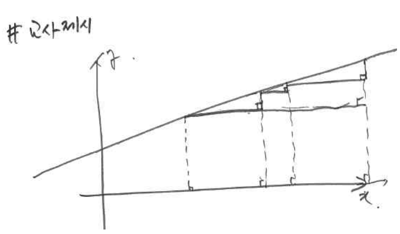
달리 어려움을 겪었다. 이미 사전에 ‘용질과 용매의 비’ 개념으로 해결한 경험이 있었음에도 불구하고, 학생들은 ‘용질과 용액의 비’ 개념으로 [과제4]를 해결하는 것에 어려움을 토로했는데, 연구자들은 학생들이 [과제3-2]에서 ‘용질과 용매의 비’가 같다는 것을 대수적으로 비교하는 것은 가능한 반면, 변수가 추가된 상태에서 ‘용질과 용액의 비’가 같은 상황을 대수적으로 표현하는 것에는 어려움을 겪는 것으로 판단하여, ‘용질과 용액의 비’가 같은 경우에 대한 표현을 대수적이 아닌 시각적으로 표현할 수 있는 그림을 제시해서 학생들의 반응을 살펴보기로 했다. 교사가 [그림 IV-1]을 제시한 이후 약 30초 정도 지난 이후에 영찬은 당도의 비를 $\frac{x \cdot (3B)}{x \cdot (4A+3B)} = \frac{(1-x) \cdot 3B}{(1-x) \cdot (4A+3B)} = \frac{3B}{4A+3B}$ 로 적어서 [과제4]를 해결하는 모습이 관찰되었다.

영찬은 [그림 IV-1]을 이용하여 자신이 구성한 식에 대하여 설명했는데, [그림 IV-2]는 영찬이의 설명에 대한 이해를 위하여 [그림 IV-1]을 재구성한 것이다.

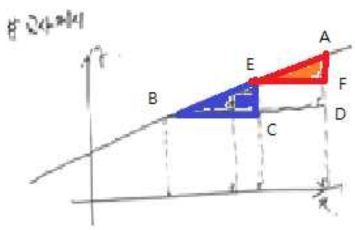
[그림 IV-2]를 이용하여 영찬의 설명을 살펴보면, 영찬은 전체 설탕물의 당도를 나타내는 식 $\frac{3B}{4A+3B}$ 을 삼각형ABD의 기울기 $\frac{\overline{\mathrm{DA}}}{\overline{\mathrm{BD}}}$ 로 인식했고, 덜어낸 설탕물의 당도 $\frac{x \cdot (3B)}{x \cdot (4A+3B)}$ 는 삼각형AEF의 기울기 $\frac{\overline{\mathrm{AF}}}{\overline{\mathrm{EF}}}$ 로 인식했으며, $\frac{(1-x) \cdot 3B}{(1-x) \cdot (4A+3B)}$ 를 남아있는 설탕물의 당도로 보고 $\frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\overline{\mathrm{BC}}}$ 로 표현했다. 이후 이들 기울기 $\frac{\overline{\mathrm{DA}}}{\overline{\mathrm{BD}}}$, $\frac{\overline{\mathrm{AF}}}{\overline{\mathrm{EF}}}$, $\frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\overline{\mathrm{BC}}}$ 의 값이 모두 같으므로 세 용액의 당도는 같다고 설명했다. 영찬의 설명에 대하여 호윤과 준호도 영찬의 설명이 맞는 것 같다고 의사를 밝혔고, 교사가 호윤과 준호에게 [과제4]를 설명해보라고 했을 때 영찬의 방식과 동일하게 설명하는 것을 확인함으로써 세 학생 모두 [과제4]를 해결한 것으로 판단했다.

3. 비가 변화하는 상황에서의 변화율 개념

용매 x와 용질 y의 비 $\frac{y}{x}$를 a라 할 때, 교사가 a가 작아지는 상황이 어떠한 상황인지를 묻는 질문에, 세 학생 모두 비의 변화를 두 변수의 변화로 인식하고 있음을 보여주었으나, 변하는 두 변수의 관계에 대한 인식에서는 다른 두 학생과 호윤의 사이에 차이가 있었다. a가 작아지는 상황에 대하여 학생들의 처음 반응을 살펴보면, 준호와 영찬의 경우는 ‘물이 많아지고 설탕이 적어지는 것’이라고 표현했고, 호윤의 경우는 ‘설탕에 비해 물이 많아지고 있는 것’으로 표현



[그림 IV-1] 교사가 제시한 그림 자료



[그림 IV-2] 영찬이의 설명에 대한 이해를 위한 그림의 재구성

했다. 다른 두 학생들이 두 양을 비교함에 있어 기준을 표현하지 않았던 것과 달리 호윤의 경우는 설탕을 기준으로 물의 변화를 표현했는데, 이후 다시 동일한 상황을 표현하는 과정에서 호윤은 '설탕이 증가하는 거에 비해 물이 증가하는 게 크다는 거에요.'라고 말했다. 여기서 호윤이 비의 변화를 두 변수의 변화의 비로 인식하고 있음이 더 명확하게 드러났으며, 호윤의 비의 변화를 표현하는 과정에서 호윤이 두 변수의 변화량의 비라는 변화율의 개념을 가지고 있는 것으로 보였다.

4. 변화율 관점에서 당도 변화를 나타내는 두 함수의 변화 양상 비교

[과제3-3] x를 물, y를 설탕의 양이라 할 때, 농도는 $\frac{y}{x+y}$가 되고, 물과 설탕의 비는 $\frac{y}{x}$가 된다. 이 때 농도식에서 분모 분자를 x로 나누어 주면 $\frac{y}{x+y}=\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}$가 되며, $\frac{y}{x}=a$라 했을 때, $\frac{y}{x+y}=\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}=\frac{a}{1+a}=1-\frac{1}{1+a}$가 된다. $f(a)=a$와 $g(a)=1-\frac{1}{1+a}$의 변화를 비교하시오. (단, $a=\frac{y}{x}$이다.)

[과제5-1] x를 특수 용매, y를 설탕의 양이라 할 때, 농도와 , 특수 용매와 설탕의 비를 x,y를 이용하여 식으로 각각 표현하고, 두 식을 서로 비교할 수 있도록 조정하여 변화의 차이를 설명하여라. (단, x는 특수한 용매로 약간의 양만으로도 무한정의 설탕을 녹일 수 있다.)

학생들의 당도에 대한 인식이 '용질과 용매의 비'와 '용질과 용액의 비'라는 두 가지 방식이 있다는 것이 [과제3-3]이전 활동에서 확인이 되었으므로, 각 방식으로 당도의 변화를 관찰할 때 변화 인식의 차이가 발생하는지 확인하기 위해서 [과제3-3]을 개발하여 적용했다. [과제5-1]의 경우는 [과제3-3] 과정에서 용매에 용질이 포화 상태가 되어서 녹지 않는 경우가 학생들의 사고 전개를 방해하는 것이 관찰되어서 포화되는 상황이 발생하지 않도록 재구성한 과제이며, [과제3-3]과 [과제5-1] 사이에는 [과제4]를 수행하는 과정이 있었다.

[과제3-3]은 '용질과 용매의 비'로 변화를 관찰할 때의 함수를 $f(x,y)=\frac{y}{x}=a$로 표현하고, '용질과 용액의 비'로 변화를 관찰할 때의 함수를 $g(x,y)=\frac{y}{x+y}$라 표현한 다음, 함수 $f(x,y)$의 값이 변할 때 함수 $g(x,y)$의 변화를 표현하도록 해서, 변화율 관점에서 두 함수의 그래프의 변화를 관찰할 수 있는 과제이다. 변화율 관점에서 두 함수의 그래프의 변화를 관찰하는 활동을 제공하는 것이 [과제3-3]의 주된 목표이므로, [과제3-3]의 수학적 완전성과 무오류성에 대한 논의는 생략하였으며, 혹시라도 x,y의 두 값이 변해가면서 조정되는 $\frac{y}{x}$의 변화를 식으로 표현하는 것에 대하여 학생들이 어려워하는 것으로 인하여, 본래 관찰하고자 하는 바가 방해받을 수 있다는 점을 고려해서 $\frac{y}{x}$는 a로 두고 과제를 진행하도록 조정했다. 또한 a값의 변화는 물리적으로 온도와 압력 요인에 따라 용해도 곡선이 선형이 아닐 수 있지만, 이 과제 수행에서는 $f(a)=a$의 변화를 선형적으로 변하는 것으로 하였으며, 그에 따른 $g(a)$의 변화를 변화율 관점에서 학생들이 어떻게 인식하는 지에 초점을 두고 관찰하기로 연구자들끼리 합의하였다.

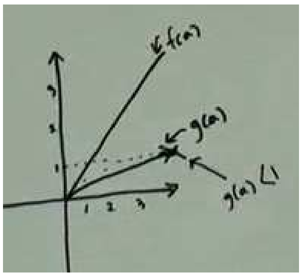
[과제3-3]에서 세 학생은 함수 $f(a)$와 $g(a)$의 그래프를 좌표평면에 나타내었는데, 1)함수 $f(a)$의 그래프를 원점을 지나는 직선으로 그린 것과 2)함수 $g(a)$의 함숫값이 1을 넘지 못한다는 것을 인식한 점에서는 세 학생 모두 동일한 반응을 보인 반면, 함수 $g(a)$의 그래프를 그리는 방식에서는 차이가 발생했다.

영찬과 준호는 처음에 함수 $g(a)$의 그래프를 직선으로 그렸다가 나중에 분수함수의 그래프에 해당하는 모양으로 그래프를 수정하였으며, 호윤의 경우는 '처음에는 이거 커지는 값이 커졌다가 나중에는 1은 되지 않고 점점 작아져서, 늘어나는 양이...'라는 이유를 제시하면서, 처음부터 분수함수의 그래프에 해당하는 개형을 그렸다. 여기서 연구자들은 호윤이 분수함수의 그래프 모양의 개형을 그린 것이 호윤이 가지고 있었던 분수함수에 대한 사전 지식의 영향이었는지에 대해 논의하였고, 결론적으로 호윤이 그래프를 그릴 때 점근선 $y=1$을 그린 것은 $g(a)=\frac{a}{1+a}$에서 분모가 분자보다 항상 크기 때문에 추측한 것으로 보고 , 점근선을 그려서 2사분면과 4사분면에 그림을 그리는 분수함수 그래프를 그리는 것이 아니라 원점에서부터 한쪽 사분면 영역에만 늘어나는 정도가 줄어드는 곡선으로 그려나갔다는 점에서 분수함수에 대한 사전 지식에 기인한 것이 아니라 변화율 관점에서 그래프를 구성한 것으로 판단하였다. 한편 영찬과 준호가 함수 $g(a)$의 그래프를 곡선모양으로 수정하는 과정에서 둘 사이의 차이가 있는데, 영찬의 경우 처음에는 '직선인데 ($y=1$에) 안 닿는 거예요.'라고 표현하고 직선으로 그렸으나, 조금 뒤에 스스로 '저 정정할게요. 곡선인데 안 닿는 걸로.'라고 답한 다음 그래프를 수정하였다. 준호의 경우는 영찬이 곡선으로 수정할 때까지도 자신은 이해를 하지 못하겠다고 표현했으며, 영찬이 '보면 절대 1은 안 나오지. 그런데 이게($\frac{a}{1+a}$를 가리키면서) 커지는 값이 일정하지 않으니까 곡선으로 1에 안 닿는다고...'로 설명을 하자 그래프를 곡선으로 수정하였다. 여기서 영찬이의 '커지는 값이 일정하지 않으니까'라는 표현이 준호가 그래프를 곡선으로 수정하는 것에 영향을 준 것으로 보인다.

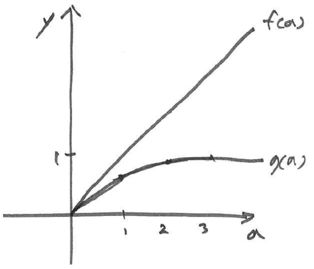
[과제5-1]은 앞서 언급한 바와 같이 [과제3-3]에서 용질이 용매에 포화 상태에 대한 경우가 학생들의 사고에 제한을 가져오는 것이 확인되어, 이 부분을 제거하고 학생들에게 다시 제시한 과제이다. [과제3-3]과 [과제5-1] 사이에는 [과제4]의 활동 과정이 있었으며, 학생들의 반응을 살펴본 결과 [과제5-1]에서 이전 [과제3-3]에서의 반응과 달리 세 학생 모두 함수 $g(a)$의 그래프를 곡선으로 그렸다. [그림 IV-3], [그림 IV-4], [그림 IV-5]에는 각각 준호, 영찬, 호윤의 [과제3-3]에서 함수 $g(a)$의 그래프와 [과제5-1]에서 함수 $g(a)$의 그래프에 대한 표현이 제시되어있는데, 이를 통하여 학생들의 당도 변화 그래프 표현의 변화과정을 살펴볼 수 있다.

한 편, 학생들이 함수 $f(a)$와 함수 $g(a)$의 그래프를 구성한 다음에, 교사는 두 그래프의 변화를 비교하고 당도를 표현함에 있어, 1) '용질과 용매의 비'로 표현해도 지금까지의 과제를 모두 설명하는 것이 가능한데 굳이 '용질과 용액의 비'로 당도를 표현해온 이유와 2) 당도의 변화를 설명하는 관점에서 더 적절한 표현은 무엇인지 물어보았으며, 이 물음에 대한 교사와 학생들의 대화는 [대화5]에 제시되어있다. 또한 [과제3-3]에서 학생들은 처음에는 답을 하지 못했으나, 교사가 다시 '바닷물이 많이 있는데 거기다 소금 한 숟가락 넣었을 때의 처음과 나중의 짠 정도의 변화와, 물 약간에 같은 한 숟가락 넣었을 때의 짠 맛의 변화 중 어떤 게 더 큰가요?'라고 물

[과제3-3]에서의 반응

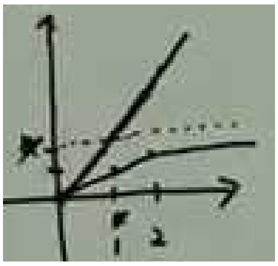


[과제5-1]에서의 반응

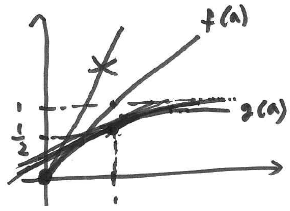


[그림 IV-3] 준호의 당도 변화 그래프 표현의 변화 과정

[과제3-3]에서의 반응

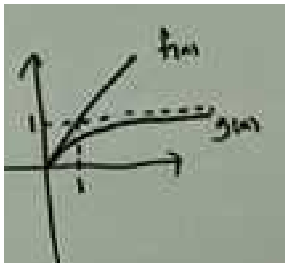


[과제5-1]에서의 반응

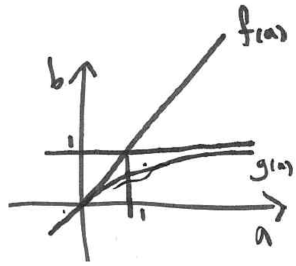


[그림 IV-4] 영찬의 당도 변화 그래프 표현의 변화 과정

[과제3-3]에서의 반응



[과제5-1]에서의 반응



[그림 IV-5] 호윤의 당도 변화 그래프 표현의 변화 과정

었을 때, 물 약간에 한 숟가락의 소금을 넣었을 때의 짠 정도가 더 크게 느껴진다고 답을 했다. 교사가 이어서 그렇다면 용액의 진한 정도를 표현하는 것으로써, '용질과 용매의 비'와 '용질과 용액의 비' 중에서 어떤 것이 더 적절한 지를 묻는 것에 대해서는 호윤의 경우 '용질과 용액의 비'를 답했고, 영찬은 '용질과 용매의 비'를 답했으며, 준호는 모르겠다고 답을 했다(이 때 세 명의 학생 모두 그 이유에 대해서는 설명하지 못했다.).

<u>대화5</u>

교사 : 이 식이 너희들이 아는 농도고 이건 호윤의 비율 그래프인데, 둘이 차이가 있잖아요?

학생들 : 네

교사 : 변화 관점에서 다르다고 보는 거잖아요?

학생들 : 네

교사 : 그런데 우리는 왜 농도로 강요되어왔을까? 호윤이 방식으로도 단 정도를 다 구분해냈는데. 왜 굳이 농도로 해야 했을까?

학생들 : 네?

교사 : 어떤 게 단 정도를 표현하는데 더 적합하다고 생각하나요?

⋮ (중략)

교사 : 바닷물이 되게 많이 있는데 거기다 소금 한 숟가락 넣었을 때의 처음과 나중의 짠 정도의 변화와 물 약간에 같은 한 숟가락 넣었을 때의 짠 맛의 변화... 어떤 게 더 큰가요?

학생들 : 물이요

교사 : 그것을 설명할 수 있는 그래프는 뭐에요?

호윤 : g(a)요

교사 : 준호는?

준호 : 모르겠어요.

교사 : 영찬이는?

영찬 : 두 번째 경우가 소금의 맛을 느끼는 게 컸으니까 어... 어... f(a)가 맞을 것 같은데... 살짝 그 쪽인 것 같아요.

<표 IV-1> 과제별 당도 변화 표현에 적절한 함수 인식에 대한 변화

학생	[과제3-3]에서 당도 변화에 적절한 함수에 대한 학생 인식		[과제5-1]에서 당도 변화에 적절한 함수에 대한 학생 인식	
	함수	근거	함수	근거
준호	모름	-	g(a)	변화율의 변화로 구분하지만 변화율이 줄어드는 것을 '싱거워 진다.'고 표현함.
영찬	f(a)	-	g(a)	변화율의 변화로 구분하고, '계속 달아 지기는 한다.'고 표현함.
호윤	g(a)	-	g(a)	변화율의 변화로 구분하고 '늘어나는 것이 줄어든다.'고 표현함.

교사 : 이유는?
영찬 : 아니요.(모르겠다는 뜻임)

그러나 [과제5-1]에서 당도의 변화 표현의 적절한 방식에 대한 교사와 학생들의 대화를 기록한 [대화6]에서 드러나듯이, [과제4] 활동이후 [과제3-3]과 내용적으로 동일한 [과제5-1]에 대하여, 학생들은 당도의 변화를 표현하는데 더 적절한 함수로 $g(a)$를 선택했다. 세 학생 준호, 영찬, 호윤 모두 $g(a)$를 선택한 근거를 제시했는데, 준호의 경우 바닷물에 소금을 넣은 경우는 '싱거워진다'는 근거를 제시했고, 영찬이는 '(설탕물이라 했을 때) 계속 달아 지기는 해야 한다.'고 했으며, 호윤의 경우는 '늘어나는 정도가 줄어든다.'고 표현했다. 준호가 다른 두 학생(영찬, 호윤)이 계속 달아진다고 표현한 것과 달리 싱거워진다고 표현했기는 하지만, 세 학생 모두 변화율 관점에서 함수 $g(a)$가 당도의 변화를 표현하는데 더 적절한 함수로 받아들였다. <표 IV-1>은 과제별 당도 변화 표현에 적절한 함수에 대한 학생들의 인식 변화를 표로 정리한 것이다.

<u>대화6</u>
교사 : 싱거워진 거야?
영찬 : 아니죠. 계속 달아지고는 있으니까 달아진 정도
교사 : 단 정도가 감소하고 있는 거야?
호윤 : 그러니까 한 컵 소금물에 소금을 넣으면 짜졌다는 것이 확실하게 느껴지는데, 바닷물에 소금을 넣은 것은 짠 맛을 별로 못 느끼잖아요. 그거 이야기하는 것 같은데...
준호 : 그건 짠 맛이 아니 단 맛이 줄어들었다는 이야기잖아요? 늘어났다는 거야 줄어들었다는 거야?
호윤 : 전 늘어나는 것이 줄어들었다고....
준호 : 달기는 달아지는데....
교사 : 그 표현이 맞는 것 같아요?
영찬 : 맞기는 맞는 것 같은데 조금 오류가 있는 것 같아서 생각해보려구요.
교사 : 그러면 [과제5-1]에서 바닷물을 호윤이가 이야기 했잖아. 이거에 대해서 이 상황을 설명할 수 있는 적절한 그래프는 뭐에요?
준호 : g(a) 아니에요? 영찬이가 설명한...
교사 : g(a)? 호윤이는?
호윤 : g(a)

Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구에서는 학생들이 농도를 표현하는 방식이, '용질과 용액의 비'와 '용질과 용매의 비' 중에서 농도 비교 활동 이전과 이후에 인식의 변화가 관찰되었는데, 농도를 비교하는 활동 이전에는 '용질과 용액의 비'로 표현했지만, 농도

를 서로 비교하는 활동에서는 '용질과 용매의 비'를 이용하여 농도를 표현하는 것으로 인식의 변화가 있었다.

또한 농도가 다른 두 용액의 농도 비교에 대한 [과제1-1]와 농도가 변하는 상황에 해당하는 [과제1-2]와 [과제3-1], 그리고 농도가 일정하지만 용액의 양이 변하는 상황에 대한 [과제3-2]와 [과제4]에서 '용질과 용매의 비'로 접근하는 방식으로는 학생들이 문제를 해결하는 것이 가능했던 반면 '용질과 용액의 비'로 접근하는 경우에는 해당 과제들을 해결하는 것에 어려움을 겪었다. 이는 대수적으로 용매를 x라 하고 용질을 y라 할 때, '용질과 용액의 비'를 표현하는 과정에는 $\frac{y}{x+y}$와 같이 분모에 x, y의 두 변수가 모두 들어가고, '용질과 용매의 비'를 표현할 때는 $\frac{y}{x}$와 같이 분모에 x라는 하나의 변수만 들어가는데, $\frac{y}{x+y}$의 경우는 분모의 변화를 표현함에 있어 한 변수가 아닌 두 변수를 고려해야하는 점에서 학생들이 $\frac{y}{x}$의 표현보다 더 어려움을 겪게 되는 것으로 보인다.

연구자들은 학생들에게 농도의 변화에 대한 상황을 소재로 $\frac{y}{x+y}$와 $\frac{y}{x}$의 차이를 인식하고 구분할 수 있는 [과제3-3]을 개발하여 제시하였는데, [과제3-3]의 경우 용매에 용질이 용해되면서 변하는 농도는 연속적으로 변하는 두 양 사이의 변화를 담고 있는 상황이 된다는 점에서 농도를 정적인 관점이 아닌 동적인 관점에서 비교 분석할 수 있는 과제라 할 수 있다. 이는 기존 교육과정에서 정적인 상황에서 농도를 구하거나, 일차방정식 단원에서 실생활 소재로 대수적인 해를 구하는 방식과는 질적으로 구분되는 성격을 갖는다. 다만, 이 문제의 수학적 완전성과 무오류성에 대한 논의는 생략하였다.

[과제3-3] 수행 이전에 [과제1-1], [과제1-2], [과제3-1]에서 학생들의 비율 개념에 대한 확인이 있었는데, 호윤의 경우는 '용질과 용매의 비'로 시작하여 비의 값이 동치인 집합으로의 비율 개념과 '가비의 리'에 해당하는 결과를 구성해냈으나, 다른 두 학생(영찬, 준호)의 경우는 '용질과 용액의 비'로 농도에 대한 인식을 했으며 분수로 표현된 비에서 통분하는 정도 이상의 의미를 보여주지 못했다. 이들의 비율에 대한 개념 수준에 대한 차이와 더불어 [과제3-3]을 수행하는 과정에서 농도의 변화를 '용질과 용액의 비'로 표현하는 함수 $g(a)$의 변화에 대한 호윤과 다른 두 학생(영찬, 준호)의 인식 차이도 드러났다. 호윤의 경우 처음부터 $g(a)=\frac{a}{1+a}$의 변화를 정의역이 양수인 구간에서의 해당 분수함수의 그래프 개형으로 제시했으나, 다른 두 학생의 경우는 직선으로 변한다고 답을 했다가 곡선으로 변한다고 답을 수정하였다. 비율 개념에 대한 차이가 $g(a)=\frac{a}{1+a}$의 변화에 대한 인식 차이와 관련 있는지를 확인하기 위하여 연구자들은 [과제4]를 학생들에게 제시하였는데, 수행과정 중에 교사가 제시한 그림이 영찬에게 비율 개념 인식에 변화를 가져왔고 이후 영찬이의 경우 [과제4]를 해결함은 물론 [과제3-3]과 구조적으로 동일한 [과제5-1]에서 함수 $g(a)=\frac{a}{1+a}$의 그래프를 직선이 아닌 곡선으로 제시하였다. 이 외에도 농도 변화를 나타내는 함수로 적절한 것이 어떤 것인지 묻는 [과제5-1]에 대하여 '늘어나는 정도가 줄어든다.'는 표현을 사용하여 변화율 관점에서 함수의 변화를 적절하게 표현한 것이 $g(a)$라고 밝혀냈다. 이는 [과제4]의 수행과정에 대한 영찬의 설명을 듣고 이해를 했던 준호에게서도 관찰되었으나, 준호의 경우는 $g(a)=\frac{a}{1+a}$를 곡선으로 제

시하고 [과제5-1]에 대해서도 농도의 변화를 표현하는 것에 적절한 함수를 $g(a)$라고 답하였다. 단, 준호의 경우는 변화를 표현하는 과정에서는 '싱거워진다.'는 표현을 하였다는 차이가 있다. 호윤의 경우는 처음 [과제3-3]에서는 농도의 변화를 나타내는데 적절한 함수로 $g(a)$를 택하기는 했지만 그 이유에 대하여 설명하지는 못했었는데, [과제4] 이후 [과제5-1]에 대해서는 '단 정도가 점점 줄어든다.'는 표현을 사용하여 변화율 관점에서 함수 $g(a)$가 더 적절하다고 표현하였다. 결과적으로 [과제4]가 학생들이 농도의 변화를 변화율 관점에서 분석하고 비교하는데 영향을 준 것으로 보인다. 여기서 학생들이 [과제3-3]과 [과제5-1]에서 두 함수의 변화를 변화율 관점에서 분석한 것으로 볼 수 있는지에 대하여 생각해볼 필요가 있는데, [과제3-3]과 [과제5-1]은 학생들의 농도에 대한 두 가지 비율 개념('용질과 용액의 비'와 '용질과 용매의 비')에 근거하여 각각을 농도가 변하는 상황을 함수로 구성하여 제시한 것으로서 정적인 '비와 비율' 개념이 아니라 비가 변하는 동적인 '비와 비율' 개념이 적용되어야하는 상황이다. 이러한 동적인 '비와 비율' 개념을 연구자들의 입장에서는 변화율로 보았으며, 이는 교육과정에서의 평균변화율(혹은 순간변화율)이나 곱셈적 변화율과는 다른 방식이지만 학생들이 사용한 '늘어나는 것이 줄어든다.', '점점 달아진다.' 등의 표현은 함수의 변화를 두 변량사이의 변화량의 비로 보고 있다는 점에서 변화율 개념으로 보는 것이 적절하다고 판단했다.

함수적 상황에 대하여 변화를 인식하는데 있어, 덧셈적 관점과 곱셈적 관점이 가능하다. 예를 들어 3이라는 크기의 양에서 5라는 양의 크기로 변화가 있었다고 할 때, 이 변화를 인식하는 방법은 3보다 2만큼 증가한 것으로 볼 수도 있고 3보다 $\frac{5}{3}$배 만큼 증가한 것으로 볼 수도 있다. 이때 비율 관점에서 변화를 인식한다는 것은 곱셈적 관점에서 변화를 인식하는 관점이며, 비율관점에서의 변화에 대한 극한 값을 미분계수라 할 때, 비율의 곱셈적 관점에 대한 문제가 미분학습의 어려움의 원인이 될 수 있다. 본 연구는 '비와 비율' 개념이 변화율 관점에서 함수의 변화를 인식하는데 영향을 준다는 가설을 확인하기 위한 연구이자, 내포량에 해당하는 농도의 변화 과정에 대한 탐구과정을 통하여 학습자의 비율 개념에서 변화율 개념 형성 과정에 대한 이해의 폭을 넓히기 위한 기초연구이다. 학생들의 비율 개념을 확인하고 과제 수행과정에서 비율 개념의 변화를 관찰하였으며, 비가 변하는 상황을 통하여 비율로 함수의 변화를 설명하는 활동을 통하여, 변화율 관점에서 함수의 변화를 인식하고 표현하는 것에 대한 관찰을 했는데, 이 과정에서 비율 개념의 변화가 변화율 관점에서 함수의 변화를 인식하는 것에 변화를 가져올 수도 있음을 보여주었다. 본 연구를 수행하며 연구자들은 변화율 개념을 비율 개념의 특수한 경우로 볼 수도 있지만, 함수의 변화를 관찰하고 기술하는 것은 비율과는 또 다른 관점에서 구분되는 개념으로 볼 필요가 있으며, '비와 비율'의 개념이 변화율 개념 발달에 어떠한 영향을 미치는지 더 연구할 필요가 있음을 확인할 수 있었다. 이는 향후 이러한 비율 개념에 근거한 변화율 개념 발달의 관계에 대한 다양한 연구들은 물론 변화율 관점에서의 미분학습에 대한 연구에 촉진제 역할을 할 수 있을 것으로 기대된다.

참 고 문 헌

강향임 (2012). 수학적 모델링 과정에서 접선 개념의 재구성을 통한 미분계수의 재발명과 수학적 개념 변화, **학교수학, 14**(4), 409-429.

강향임, 최은아(2015). 비와 비율에 관한 학생의 오류와 어려움 해결을 위해 필요한 교사지식. **학교수학, 17**(4), 613-632.

김경희, 백희수(2010). 비와 비율 영역에 대한 우리나라와 싱가포르 교육과정 및 교과서 비교. **학교수학, 12**(4), 473-491.

김성희, 방정숙(2005). 수학교수·학습 과정에서 과제의 인지적 수준 분석. **수학교육학연구, 15**(3), 251-272.

임재훈, 박교식 (2004). 학교 수학에서 접선 개념 교수 방안 연구, **수학교육학연구, 14**(2), 171-185.

박희옥, 박만구(2012). 비와 비율 학습에서 나타나는 초등학교 학생들의 인식론적 장애 분석. **한국수학교육학회지 시리즈 C, 15**(2), 159-170.

박희자, 정은실(2010). 우리나라 교과서와 미국 MIC 교과서의 비와 비율관련 단원 비교·분석. **한국초등수학교육학회지, 14**(3), 769-788.

이동근, 문민정, 신재홍(2015). 이차함수에서 두 변량사이의 관계 인식 및 표현의 발달 과정 분석, **한국수학교육학회지 시리즈 A, 54**(4), 299-315.

이현주, 류중현, 조완영(2015). 통합적 이해의 관점에서 본 고등학교 학생들의 미분계수 개념 이해 분석. **수학교육논문집, 29**(1), 131-155.

임태훈, 노석호, 백종민, 이복영, 강대훈, 장효순, 김주성, 이용철, 황인신, 고현덕, 신미영 (2015). 중학교 과학 2, 서울: 비상교육(주)

장혜원(2002). 초등학교 수학에서의 비의 값과 비율 개념의 구별에 대한 논의. **학교수학, 4**(4), 633-642.

정연준, 이경화 (2009). 미적분의 기본정리에 대한 고찰 - 속도 그래프 아래의 넓이와 거리의 관계를 중심으로, **수학교육학연구, 19**(1), 123-142.

정은실(2003a). 비 개념에 대한 교육적 분석. **수학교육학연구, 13**(3), 247-265.

정은실(2003b). 비 개념에 대한 역사적, 수학적, 심리적 분석. **학교수학, 5**(4), 421-440.

정은실(2010). 초등학교 수학교과서에서의 양의 계산에 대한 연구. **수학교육학연구, 20**(4), 445-458.

정은실(2013). 초등학교 수학 교과에서의 비례 추론에 대한 연구. **수학교육학연구, 23**(4), 505-516.

최영주, 홍진곤(2014). 도함수의 성질에 관련한 학생들의 사고에 대하여. **수학교육, 53**(1), 25-40.

한재영, 연용호, 이상한, 임성모(1996). 교과과정 상의 미분의 개념에 대한 대수적 고찰. **수학교육, 35**(1), 101-107.

홍갑주(2013). 초등학교 2007 개정 교과서 비와 비율 관련 용어에 대한 고찰. **수학교육학연구, 23**(2), 285-295.

Byerley, C., Hatfield, N., & Thompson, P. W. (2012). Calculus student understandings of division and rate. In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, & M. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 358-363). Portland, Oregon: SIGMAA/RUME.

Confrey, J. & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2), 135-164.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationship through quantitative reasoning. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp. 215-238). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Lesh, R., & Clarke, D. (2000). Formulating operational definitions of desired outcomes of instruction in mathematics and science education. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 113-150). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lobato, J., & Ellis, A. B. (2010). *Essential understandings: Ratios, proportions, and proportional reasoning*. In R. M. Zbiek (Series Ed.), Essential understandings. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234). Albany, NY: SUNY Press.

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundation of mathematics education. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano, & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 45 – 64) Morelia, Mexico. PME.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *CBMS Issues in Mathematics Education, 8*, 103-122.

Analysis on High School Students' Recognitions and Expressions of Changes in Concentration as a Rate of Change

Lee, Dong Gun (Moonjung High School)
Kim, Suk Hui (Chungdam High School)
Ahn, Sang Jin (Moonjung High School)
Shin, Jae Hong (Korea National University of Education)

The aim of the present study is twofold. One is to confirm a hypothesis that a student's rate concept influences her conceiving change of a function in the view of rate of change and the other is to build up foundations for understanding the transition process from her rate concept to the concept of rate of change when she investigates the change of concentration as an intensive quantity. We explored how three participating high school students recognized and expressed change of given functions by using their rate concept as a conceptual tool. The result indicates that a change in students' rate concept might have an effect on understanding how function values change in term of rate of change. We also expect that it could be a catalyst for further research for clarifying the relationship between students' rate concept and their development of a concept of rate of change as a foundation for learning calculus.

* Key Words : ratio(비), rate(비율), rate of change(변화율), intensive quantity(내포량), concentration (농도)

논문접수 : 2016. 6. 28
논문수정 : 2016. 8. 7
심사완료 : 2016. 8. 8