

## 교사들의 수업 분석 관점에 대한 연구 - 삼각형의 무게중심에 대한 수업 사례를 중심으로 -1)

신 보 미\*

이 연구는 현직 교사 38명이 삼각형의 무게중심 수업을 관찰한 결과를 검토하여 교사들의 수업 분석 관점의 특징을 기술함으로써 수업 실행 지식과 관련된 논의의 시사점을 얻고자 하였다. 이를 위해 교사들이 작성한 수업 관찰 결과를 교사 지식의 분석틀인 KQ에 비추어 해석하였으며, 삼각형의 무게중심 교수-학습에 대해 선행 연구에서 지적한 주요 이슈와 관련하여 분석하였다. 이로부터 무게중심 수업 분석에서 드러나는 교사 지식의 특징을 6가지로 요약하였으며, 교사들의 수업 실행 역량 개발과 관련된 몇 가지 시사점을 논의하였다.

### 1. 서론

교사의 전문성은 수업을 통해 드러나며, 교사의 수업 실행 능력은 교사 지식과 밀접하게 관련된다. 이에 많은 연구가 교사 지식의 특징을 면담이나 지필검사를 통해 분석하였으나(송근영, 방정숙, 2013), 이렇게 확인된 특징은 실제 수업 상황에서 드러나는 교사 지식과 상당한 차이가 있다(Hegarty, 2000). 교사의 지식은 특정한 수업 맥락 속에서 수학에 대한 내용 지식과 학습자의 인지에 대한 지식이 통합되어 구체적 행동으로 나타나는 맥락-특수적(context-specific) 지식이기 때문에(Fennema & Franke, 1992), 수업 상황과 독립적으로 수집된 자료는 수업 실행과 관련된 교사 지식의 특징을 설명하는데 한계가 있다

(Rowland & Ruthven, 2011). 교사 지식을 분석하는 주요 목적 중 하나가 수업의 전문성 신장에 있으며, 수학을 가르치는데 필요한 교사 지식은 수업 맥락을 통해 재조직되므로 이는 실제 수업 상황에 비추어 논의될 필요가 있다(Turner & Rowland, 2011).

최근 들어 수업 개선을 위한 전문성 신장 방안으로 주목받는 것 중 하나가 수업 비평이다(방정숙, 선우진, 2015). 수업 비평은 교사들에게 수업을 관찰한 후 수업에 대한 자신의 생각을 작성하게 함으로써 수업과 관련된 반성과 성찰을 유도하여 궁극적으로 교사의 수업 전문성을 개발하는데 목적을 둔다<sup>2)</sup>. 또한 교사들이 수업을 볼 때 어떤 관점으로 수업을 이해하고 분석하는지 파악하는 것은 교사의 수업 전문성 개발을 위한 기초 자료로서도 중요한 가치를 지닌다

\* 전남대학교, bomi0210@jnu.ac.kr

1) 이 논문은 2014년 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 연구되었음(NRF-2014S1A5A8016015).  
2) ‘비평’이란 용어가 ‘옳고 그름을 분석하여 가치를 논한다’는 통상적인 의미를 갖기 때문에 많은 교사들이 ‘수업 비평’에서 다른 교사의 수업을 평가적으로 보는 경향이 있다(김남균, 유제정, 2015). 이에 이 연구에서는 ‘수업 비평’대신 ‘수업 분석’이라는 용어를 사용한다.

(김남균, 유제정, 2015). 수업을 의미있게 분석하기 위해서는 교사, 학생, 교과 사이의 복합적인 상호 작용에 대한 이해를 필요로 하기 때문에 교사의 수업 분석 능력은 수업 실행 능력과 직결된다고 볼 수 있다(Lampert, 2001).

실제로 Sabers, Cushing, & Berliner(1991)에 따르면 전문가 교사들은 초임교사와 달리 관찰한 수업에 대해 수학적으로 풍부하고 의미있는 분석을 제시하였으며 수업의 핵심을 더 잘 인식하였다. Kersting(2008)은 교사들이 수업을 관찰하고 작성한 분석문을 점수화하여 MKT(mathematical knowledge for teaching, Ball, Thames, & Phelps, 2008) 점수와 비교한 결과 높은 상관관계가 있음을 밝힌 바 있다. Silver, Clark, Ghousseini, Charalambous, & Sealy(2009)는 수업 동영상에 대한 사례 분석 활동을 통해 교사의 전문성을 개발하는 교사 교육 프로그램을 설계하였다. 이상에 따르면 교사들의 수업 분석 관점을 탐색하는 것은 수업과 관련된 실행 지식의 특징을 보다 구체적으로 살필 수 있으며, 교사 전문성 개발에 의미있는 시사점도 얻을 수 있다.

이에 이 연구의 목적은 현직 중·고등학교 교사 38명이 무게중심 수업을 관찰한 결과로부터 주요 분석 관점을 확인하여 교사들의 수업 실행 지식에 대한 구체적인 특징을 기술함으로써 교사 전문성 신장과 관련된 시사점을 얻는데 있다. 무게중심 수업 사례에 대한 교사들의 관찰 결과는, 수학 수업을 통해 구체화되는 교사 지식의 특징을 살필 목적으로 개발된 ‘교사 지식의 사중주(Knowledge Quartet [이하 KQ], Rowland, Turner, Thwaiters, & Huckstep, 2009)’에 비추어 분석한다. KQ는 수업을 통해 구현되는 교사 지식을 증진시킬 목적으로 수업 평가나 수업 관찰의 기준으로 활용될 수 있으므로(Rowland & Turner, 2006), 교사들의 무게중심 수업 사례 관찰 결과를 KQ에 비추어 분석하는 것은 수업 실행

역량 개발과 관련된 교사 전문성 함양에 실질적인 시사점을 줄 수 있다.

## II. 이론적 배경

이하에서는 교사 지식 분석틀로서 KQ를 소개한 연구와 무게중심 교수-학습에 대한 선행 연구를 검토하여 교사들의 무게중심 수업 관찰 결과를 KQ에 비추어 분석함에 있어 주목할 필요가 있는 준거를 추출한다.

### 1. 교사 지식 분석틀로서 KQ

교사 지식은 학생의 학업 성취에 직접적인 영향을 미치기 때문에 그 특징에 대한 연구는 교육정책 입안자들과 수학교육학자들에게 주요 관심사가 되어 왔다(Turner & Rowland, 2011). 그러나 교사의 고학력이 학생의 높은 학업성취도를 보장하지는 않는다(Askew, Brown, Rhodes, Johnson, & Wiliam, 1997). 수학을 가르치는데 필요한 지식은 교사의 머릿속에 맥락 독립적으로 존재하는 것이 아니기 때문에 실제로 수업을 실행하는 상황을 통해 의미있게 확인될 수 있다(Hegarty, 2000; Petrou & Goulding, 2011).

이상과 같은 관점에서 KQ는 수학을 가르칠 때 필요한 교사 지식의 특징을 수업 맥락 안에서 해석하기 위해 개발된 분석틀이다(Rowland & Turner, 2007). 교사 지식의 사중주인 KQ는 토대(foundation), 변환(transformation), 연결(connection), 우발(contingency)의 네 가지 차원(dimension)으로 구성되어 있다. 여기서 사중주(Quartet)는 이 네 가지 차원이 분절적으로 존재하는 것이 아니라 서로 조화를 이루며 통합적으로 작용한다는 점을 의미한다. Rowland et al. (2009)에 따르면 KQ의 각 차원이 지닌 의미는 다음과 같다.

토대는 교사 지식의 이론적인 배경과 신념을 의미하는 것으로 교사가 거쳐 온 중·고등학교 교육과정이나 교사 교육프로그램을 통해 습득된 지식이다. 이는 수학 수업에 사용되는 것과는 무관하게 교사가 사전에 보유하고 있는 지식이라는 점에서 다른 세 가지 차원과는 구별된다. 여기에는 수학 자체에 대한 지식과 이해 정도, 수학 교수-학습에 대한 이론적 지식, 수학의 가치와 가르치는 목적에 대한 교사의 개인적인 인식 등이 포함된다. 토대는 수학 수업을 위한 전략 수립 및 실행, 수업에서의 의사결정 등에 잠재적인 영향을 미치며 변환, 연결, 우발의 기초로 작용한다.

변환은 교사가 알고 있는 것을 학생이 학습할 수 있도록 바꾸어 제시하는 능력으로, 학생에게 수학적 아이디어를 보여주기 위해 사용하는 표현(representation)과 관련되는 지식이다. 이는 수업에서 유추, 도해(illustration), 예시, 설명이나 시범 등의 형태로 드러난다. 토대와 달리 변환은 학생을 향한 교사의 행동 지식으로 ‘수학을 가르친다’는 교사의 역할에서 핵심적인 의미를 지닌다.

연결은 한 수업 내에서 또는 여러 수업 간의 학습 내용을 통합하고 서로의 연관성에 집중하여 수업 내의 학습 활동, 논의, 연습 등에 대한 순서와 계열을 정하는 것과 관련된 지식이다. 연결은 수업에서 과제와 활동의 계열을 결정할 때, 수학적 지식의 구조적 관계를 반영하거나 과제와 활동에서 요구되는 인지적 차이를 인식하여 이를 적절히 배치하는 능력이다. 여기에는 해당 수업이 이전 수업이나 학생의 지식과 관련되도록 하는 결정력, 무엇이 쉽고 어려운지에 대해 예상하는 능력 등이 포함된다. 연결은 한 차시 수업뿐만 아니라 여러 수업에 대한 설계와 실행에 있어 일관성의 추구와도 관련된다.

우발은 수업에서 예상하지 못한 상황에 접했을 때 이에 대처하는 교사의 순간적인 판단 능

력과 관련되는 지식이다. 아무리 철저히 준비한 수업이라 하더라도 학생의 모든 반응을 예측하는 것은 불가능하기 때문에 수업 상황에서 즉각적인 의사 결정을 내리기 위해서는 교사의 충분한 준비와 유연성이 필요하다. 교사는 학생들이 제시한 의외의 질문이나 반응, 예외적인 수업 상황의 교육적 가치를 순간적으로 판단하여 적절히 대처할 수 있을 정도의 지식을 갖춘 상태이어야 하며, 필요하다고 여겨질 경우 사전에 의도하지 않았던 방향으로 수업 계획을 바꾸어 실행하는 유연성을 지닐 필요가 있다. 근래에 강조되고 있는 학생과의 상호작용 수업에서 학생 활동에 대한 교사의 반응은 근본적으로 우발적일 수밖에 없으며, 이러한 우발 지식은 교사가 지닌 수학적 지식과 학생의 이해에 대한 지식에 의해 결정되는 것이 보통이다(Turner & Rowland, 2011).

이상에서 살펴본 KQ의 각 차원에 따른 세부 코드와 예시 내용은 <부록 1>과 같다. KQ의 세부 코드는 교사 지식이 드러나는 수업의 실제 상황을 구체화한 것으로 수업과 관련하여 교사가 사용하는 지식의 특징을 살피는데 의미있는 틀이 될 수 있다(Rowland et al., 2009). KQ를 활용하여 교사가 수학 수업 과정에서 내렸던 판단과 결정, 행위 등이 맥락에 비추어 적절했는지 논의하고 분석할 수 있으며, 분석 결과를 기반으로 더 나은 수학 수업을 위해서는 어떤 지식이 더 필요하며 이를 어떻게 개발할 수 있을지 모색할 수 있다(정유경, 방정숙, 2015). 이를 위해서는 우선 수업과 관련하여 KQ의 각 차원에서 어떤 지식이 어떻게 드러나는지 구체적으로 확인할 필요가 있다. 이에 이 연구에서는 무게중심 수업 사례에 대한 교사들의 분석 관점을 KQ의 각 차원과 관련하여 다음과 같은 준거로 살펴본다.

준거 1. 교사들의 수업 분석에서 드러나는 토대 지식의 특징은 무엇인가?

- 준거 2. 교사들의 수업 분석에서 드러나는 변환, 연결, 우발 지식은 어느 정도인가?  
 준거 3. 교사들의 수업 분석에서 드러나는 변환, 연결, 우발 지식의 특징은 무엇인가?

## 2. 무게중심 교수-학습에 대한 선행 연구

이 연구의 목적은 교사들이 무게중심 수업 사례를 관찰한 결과를 KQ에 비추어 살펴봄으로써 교사들의 수업 분석 관점과 수업 실행 지식의 특징을 알아보는 데 있다. van Driel, Verloop, & de Vos(1998)에 따르면 교사의 수업 전략은 가르치고자 하는 내용 요소의 특징과 그에 대한 교사의 이해에 기반하므로 수학을 가르치기 위한 교사 지식의 특징은 수업에서 다루어진 내용의 특징과 관련하여 기술될 때 교수학적인 의미를 갖는다. 이에 교사들의 무게중심 수업 분석문을 KQ에 비추어 검토함으로써 수업 실행에 대한 의미있는 시사를 얻기 위해서는 무게중심 교수-학습에 대한 선행 연구를 확인하여 이와 관련된 주요 논점을 구체화할 필요가 있다.

무게중심은 일반화와 특수화, 해의 존재성과 유일성, 실제계의 수학적 모델링 및 공리적 방법론 등과 관련지어 다양한 논의와 추론이 가능하므로 학교 수학에서 탐구활동의 소재로 다루기에 적합하다(홍갑주, 2005). 그러나 중학교 교육과정에서는 삼각형의 무게중심에 대한 개념적 본질을 충분히 탐구하기보다 세 중선의 교점이라는 정의를 소개한 다음 무게중심이 중선을 2:1로 나눈다는 성질을 활용하여 문제를 해결하는 것에 집중한다(하영화, 고호경, 2011).

정진영(2010)은 중학교 교육과정에서 삼각형의 무게중심을 다루는 방식이 무게중심의 의미보다

는 세 중선의 교점이라는 정의에만 사고를 고착하게 만들어 무게중심의 개념을 삼각형에서 다각형으로 확장할 때 여러 가지 오개념을 낳게 된다고 하였다. 홍갑주(2005)에 따르면 삼각형의 무게중심이 세 중선의 교점으로 정의되고, 각 중선은 넓이를 이등분하기 때문에 교사와 학생들은 무게중심이 ‘넓이를 이등분하는 선분의 교점’이라는 오개념을 갖는 경향이 있다. 최병철(2016)은 영재 학생도 사각형의 무게중심을 거의 구하지 못하였을 뿐만 아니라, 삼각형의 무게중심에서 각 꼭짓점을 연결해 생긴 삼각형의 넓이가 같기 때문에 사각형의 무게중심에서 각 꼭짓점을 연결하여 생긴 삼각형의 넓이도 같다는 오류를 보였다고 하였다. 김래영, 이현희(2013)에 따르면 무게중심을 구하는 아르키메데스의 방법을 소개하였음에도 불구하고 학생들은 평행사변형의 무게중심을 삼각형의 무게중심에 기초하여 ‘각 변의 중점을 이은 선분의 교점’으로 부적절하게 추론하였다<sup>3)</sup>.

한편, 박달원(2006)은 삼각형의 무게중심을 중선의 교점으로만 정의하고 물리적인 성질과 원리가 규명되지 않은 상태로 학생들을 지도하는 것은 무게중심을 형식적으로만 다루는 것이며 삼각형에서 일반화된 도형의 무게중심을 탐구할 수 없도록 하는 원인이라고 하였다. 이에 여러 선행 연구는 삼각형의 무게중심을 지도하는 대안적 방안을 모색하였다.

이경숙, 유미현(2014; 김수금, 유시규, 김선배, 2014)은 무게중심이 물체의 평형에 관한 물리적 개념에서 출발하였음을 밝히고 이 사실을 학생들이 인식할 수 있도록 과학적인 실험과 수학적 접근을 통해 삼각형의 무게중심을 탐구하도록 하였다. 삼각형의 무게중심과 지렛대의 원리를 통해 다각형의 무게중심을 찾고, 이렇게 찾은

3) 김래영, 이현희(2013: 234)는 다음과 같은 문제를 제시하여 무게중심에 대한 학생들의 이해를 분석하였다; 그리스의 수학자 아르키메데스는 한 도형을 두 부분으로 나누었을 때, 각 부분의 무게중심을 연결한 선분위에 도형 전체의 무게중심이 있다는 것을 알아냈다. 평행사변형을 두 부분으로 나누어 본 후 평행사변형의 무게중심을 잡고 그 이유를 서술하시오.

점이 다각형의 평형점이 되는지 무게중심 실험기 등과 같은 도구를 활용하여 확인하도록 하였다.

금정연, 김동화(2013)는 삼각형이 평형을 이루도록 하는 선분이 중선이라는 사실을 실험에 의해 알아내도록 한 다음 두 중선의 교점을 G라 하고 나머지 한 중선이 이 점을 지나는 것 역시 실험을 통해 알아보도록 하였다. 그런 다음 점 G를 연필 끝에 올려놓아 삼각형이 평형을 이루는 것을 확인함으로써 삼각형의 무게중심은 삼각형을 받칠 때 평형을 이루게 하는 점이라는 사실을 구체적으로 경험할 수 있도록 하였다.

하영화, 고호경(2011)은 2009 개정 교육과정에서 중점연결정리에 대한 성취기준이 삭제되었음에 주목하여 무게중심의 본질이 충분하게 지도되지 못하는 중학교 교육과정의 전개 방식을 개선할 수 있는 방안을 제시하였다. 이들은 우선 세 중선이 한 점 G에서 만난다는 사실을 실험을 통해 직관적으로 발견하도록 한 다음 중선에 의해 분할되는 삼각형 6개의 넓이를 이용하여 세 중선이 한 점에서 만나는 성질을 수학적으로 설명한다. 이후 삼각형의 무게중심은 ‘평형을 이루게 하는 점’으로 정의하고 실험을 통해 이를 찾도록 한다. 학생들은 삼각형이 평형을 이루도록 하는 여러 개의 직선을 찾아 이들의 교점이 세 중선의 교점과 일치함을 발견함으로써 중선의 교점과 무게중심의 관계를 파악하게 된다.

이상 무게중심 교수·학습에 대한 선행연구에 따르면 세 중선의 교점이라는 삼각형의 무게중심 정의는 무게중심의 개념적 의미를 드러내는데 한계가 있다. 특히 삼각형에서는 중선이 넓이를 이등분하기 때문에 학생들은 무게중심이 일반적으로 넓이를 이등분하는 선분의 교점이라거나 각 변의 중점을 이은 선분의 교점으로 오해할 가능성이 있다. 이에 여러 선행 연구는 물체가 평형을 이루게 하는 점이라는 무게중심의 발생적 아이디어를 학생들이 경험할 수 있도록 실험

과 탐구활동을 통해 삼각형의 무게중심을 도입하고, 세 중선의 교점은 무게중심의 정의가 아니라 이를 구하는 방법으로 소개할 것을 제안하였다. 무게중심이 중선을 2:1로 나눈다는 성질은 중점연결정리와 닮음 개념을 통해 정당화할 수 있지만 2009 개정 교육과정의 성취기준에서 중점연결정리가 삭제되었으므로 이러한 설명 방식을 재검토하여 대안적 접근도 고려해 볼 필요가 있다.

이에 무게중심 수업을 실행할 교사들은 삼각형의 무게중심 정의와 관련된 중학교 교과서의 문제점을 인식하고 이로부터 기인할 수 있는 오개념의 특징을 숙지할 필요가 있다. 또한 이러한 문제점을 극복하기 위해서는 삼각형이 평형을 이루게 하는 점을 찾아보도록 하는 실험을 설계하고 이로부터 세 중선의 교점이라는 무게중심의 정의를 이끌어내는 탐구활동을 진행할 수 있는 전략적 지식도 지닐 필요가 있다. 이러한 맥락에서 이 연구는 무게중심 수업 사례에 대한 교사들의 관찰 결과를 분석함에 있어 교사들이 무게중심의 정의 및 개념, 지도 방안과 관련된 이러한 이슈에 주목하는지 다음 준거에 비추어 살펴본다.

- 준거 4. 교사들의 수업 분석에서 삼각형의 무게중심 정의 및 개념과 관련된 논의의 특징은 무엇인가?
- 준거 5. 교사들의 수업 분석에서 삼각형의 무게중심을 실험과 탐구활동에 의해 지도하는 전략에 대한 논의의 특징은 무엇인가?

### III. 연구 방법

#### 1. 연구대상

이 연구에서는 교사 38명의 수업 관찰 결과를

KQ에 비추어 해석함으로써 교사들의 수업 분석 관점에서 두드러진 특징을 기술하고, 이로부터 수업 실행 지식에 대한 전반적인 특징을 알아보고자 한다. 수업에서 드러나는 교사 지식의 분석 틀인 KQ를 활용하여 교사 38명의 수업을 낱날로 분석하는 것은 수업 실행과 관련된 각 교사의 지식을 구체적으로 알아보는 장점이 있지만 그 전반적인 특징을 추출하는 데는 현실적인 한계가 있다. 여러 선행 연구(Star & Strickland, 2008; van Es & Sherin, 2008; 방정숙, 2011)는 수업을 ‘보는’ 능력이 수업을 ‘하는’ 능력과 밀접하게 관련됨을 지적하고 있는 바, 이 연구에서는 교사들이 수업을 ‘보는’ 관점에 내재된 경향을 파악하여 교사들이 수업을 ‘하는’ 능력과 관련된 시사점을 찾고자 한다. 수업을 관찰할 때 교사들이 주목한 부분은 실제 수업을 실행할 때도 중요하게 간주할 것이므로, 이상과 같은 논의는 수업 상황에서 드러나는 교사 지식의 특징을 예상하는데 의미있게 활용될 수 있다.

수업 분석에 참여할 현직 중·고등학교 교사 38명은 편의 표집(convenience sampling, 성태제, 2005)을 통해 선정하였다. 연구대상은 2016년 현재 대도시 지역의 학교에 근무하고 있으며 교직 경력 등의 세부 정보는 다음과 같다.

## 2. 자료 수집

여러 선행 연구(Maher, 2008; Markovits & Smith, 2008; 나귀수, 2009; 방정숙, 2011)는 다른

교사의 녹화된 수업 사례를 교사들에게 분석하도록 하여 이로부터 드러나는 교사 지식의 특징을 확인함으로써 수업 전문성 개발과 관련된 시사점을 기술하였다. 녹화된 수업 사례 분석은 실제 수업을 공개하고 참관하는데 부담을 느끼는 우리나라 교사들에게 대안적인 수업 분석 방법이 될 수 있다(신보미, 2014). 이 연구에서는 교사들이 관찰할 무게중심 수업 사례를 한국교육학술정보원이 제공하는 에듀넷 우수 수업 동영상 서비스에 탑재된 1차시 분량의 동영상으로 정하였다<sup>4)</sup>.

연구대상에게 앞서 제시한 무게중심 수업 동영상을 관찰하면서 개별적으로 A4용지 2~3쪽 분량에 해당하는 수업 분석문을 작성하도록 하였다. 특히 수업 분석문 작성은 일정한 틀에 얽매이지 않고 자유롭게 하도록 하였으며 시간이나 형식에 제한을 두지 않았다. 이는 무게중심 수업에 대한 교사들의 분석 관점을 현상학적 측면에서 그대로 기술하고자 하는 연구 의도에 보다 충실하기 위함이다. 수업 분석을 위한 지침이나 이론적 틀이 제공되지 않았을 때 연구대상은 나름의 관점에 기초하여 수업을 관찰할 것이므로 교사들이 수업을 분석할 때 어떤 측면에 주목하거나 간과하는지 효과적으로 확인할 수 있을 것으로 보인다.

## 3. 자료 분석

연구대상이 개별적으로 작성한 수업 분석문은,

<표 III-1> 연구대상 세부 정보

내용	성별		경력			담당학년						학력		무게중심 지도경험	
	남	여	5년미만	5년이상 ~10년미만	10년이상 ~15년미만	중1	중2	중3	고1	고2	고3	학사	석사	유	무
인원수	18	20	17	10	11	8	9	7	7	5	2	21	17	31	7

4) 수업 동영상의 탑재 위치는 다음과 같으며, 해당 수업의 전반적인 흐름은 <부록 2>을 참조하기 바란다 ; <http://good.edunet4u.net/classMovie/player/pop/frame.jsp?movieID=178170&startTime=0&endTime=0>.

<부록 1>에 제시된 KQ의 각 차원과 세부 코드에 비추어 살펴보았다. 우선 연구대상 38명이 작성한 분석문에서 드러나는 특징적인 관점을 토대, 변환, 연결, 우발로 분류한 다음 각 차원별로 교사들의 분석 내용을 요약하여 추후 논의를 위해 번호를 붙이고 요약된 내용을 언급한 교사의 인원수를 각각 조사하였다. 교사들의 분석 내용을 요약하고 분류하는 것은 연구자와 수학교육전공 박사 학위 과정에 있는 중학교 교사 2명이 개별적으로 진행하여 그 결과를 종합하였다. 분석 내용 요약과 분류에 차이가 있는 부분은 5회에 걸친 공동 논의를 통해 최종 범주를 확정하고 해당하는 교사의 인원수를 계산하였다. 이 때 한 교사가 하나의 요약된 내용을 여러 번 언급한 경우에도 인원수는 한 명으로 세어<sup>5)</sup> 연구대상 전체가 수업을 관찰할 때 해당 분석 내용에 얼마나 많이 주목하였는지 전반적인 경향을 나타내고자 하였다.

이상과 같은 자료 분석 과정에서 어떤 수업 분석 관점이 어떻게 드러나는지 구체적으로 확인하기 위하여 KQ의 네 가지 차원인 토대, 변환, 연결, 우발에 해당하는 특징을 공통된 분석 내용 및 교사의 인원수를 통해 알아보았다(준거 1, 준거 3). 다만 변환, 연결, 우발과 관련된 특징은 각 차원의 분석 내용을 언급한 교사 인원수의 총합을 구하여 수업 관찰에서 교사들이 변환, 연결, 우발 중 어느 차원에 더 주목하는지 살펴보았다(준거 2). 정유경(2014)에 따르면 토대는 교사의 배경 지식과 관련되며 변환, 연결, 우발은 수업을 실행하는 행동 지식에 해당한다. 이에 삼각형의 무게중심 정의 및 개념에 대한 논의는(준거 4) 수업 분

석에서 드러나는 토대 지식과 관련하여 주로 검토하였다. 또한 삼각형의 무게중심을 실험과 탐구 활동에 의해 지도하는 전략과 관련된 수업 분석 관점은(준거 5) 변환, 연결, 우발 지식의 특징을 확인하는 과정에서 중점적으로 알아보았다.

한편, 무게중심 수업 사례에 대해 교사들이 작성한 분석문의 내용 중에는 <부록 1>에 제시된 KQ의 각 차원과 세부 코드로 범주화하기 어려운 것이 있었다. KQ는 교사의 수업 활동을 수업에서 다루어진 수학 내용 요소와 관련하여 논의하기 위해 개발되었으므로(Rowland et al., 2009), 교사들의 분석 내용이 수업의 내용 요소인 무게중심과 직접적으로 연관되지 않은 경우 적절한 차원으로 분류하기가 쉽지 않았다. 선행 연구에 따르면 일부 교사들은 수업의 핵심 요소인 수학 내용보다는 수업 장비나 모듈 구성 등과 같은 수업의 외적 측면에 집중하여 수업을 관찰하며(Star & Strickland, 2008), 수업에 대한 의견을 제시할 때도 수업 주제와 관련된 내용-특수적(content-specific) 조언보다는 교과나 수업 내용과는 무관한 일반적인(generic) 논점을 다루는 경향이 있다(Strong & Baron, 2004). 이에 이 연구에서는 교사들이 작성한 무게중심 수업의 분석문에서 수학 교과나 무게중심이라는 내용 요소에 직접적으로 관련되지 않는 내용은 ‘기타’ 범주로 분류하고 해당하는 내용을 언급한 교사의 인원수를 조사하여 교사들이 수업을 분석할 때 내용-특수적 측면과 일반적인 이슈 중에서 어느 부분에 집중하는지도 살펴보았다<sup>6)</sup>.

이상과 같은 자료 분석 방법을 토대로 연구대

5) 이를테면 우발과 관련하여 연구대상 한 명이 ‘수업하는 교사는 학생들의 반응에 주의를 기울이지 않는다’는 요약 내용을 분석문에 두 번 이상 언급하였더라도 이에 대한 인원수는 한 명으로 세었다.

6) 수업 관찰에서 제기될 수 있는 내용-특수적 질문과 일반적 질문의 예에는 다음과 같은 것이 있다(Rowland et al., 2009: 10).

\* 내용-특수적 질문의 예 : 뿔셈의 다양한 수학적 의미가 수업에서 다루어 졌는가?, 뿔셈의 의미를 이해 시키는데 개구리 인형을 사용한 것은 적절했는가?, 뿔셈이라는 수학적 용어를 적절히 사용하였는가?, 동기유발 자료로 특별히 8, 5, 7을 택한 의도는 무엇인가?

\* 일반적 질문의 예 : 수업의 속도는 적절한가?, 모듈활동에서 하위 모듈에 주의를 기울였는가?, 탐구활동에 너무 긴 시간을 사용한 것은 아닌가?, 동기유발 자료로 사용한 모자는 학생들의 흥미를 자극하였는가?

상이 작성한 수업 분석 내용을 요약한 결과는 <표 IV-1>과 같다.

<표 IV-1> 교사들의 무게중심 수업 분석 내용 요약

차원 및 세부 코드(인원수)		교사들의 분석 내용 요약(인원수)
토대 (93)	교수법의 이론적 기반(49) <sup>7)</sup>	① 형식적인 증명은 딱딱하고 수업을 지루하게 만들기 때문에 그림을 이용한 설명이 중학생들에게 적절하다(27). ② 판서를 하지 않고 대화로 수업을 이끌어 가면 수학적 의사소통이 활성화된다(20). ③ 기하 증명의 목적은 보기에 당연한 것을 논리적으로 설명하는데 있으므로 그림에 의한 설명은 적절하지 않다(2).
	교과 지식의 명시적 표현(21)	④ 무게의 중심이 되는 이유는 중심이 넓이를 이등분하기 때문이다(11). ⑤ 삼각형을 꼭짓점이 겹치도록 변을 밖으로 접으면 무게중심이 생긴다(7). ⑥ 무게중심은 어떤 방향으로도 기울어지지 않는 위치이다(3).
	교과서 교수(23)	⑦ 중심이나 무게중심과 같은 수학적 용어가 교과서를 바탕으로 제시되면 학생들이 기억하기에 좋다(20). ⑧ 삼각형의 무게중심에 대한 교과서의 정의에 지나치게 의존하면 개념보다는 구하는 방법에 치중하게 된다(3).
변환 (148)	교사의 시범(35)	① 중심을 그릴 때는 자로 제어 정확하게 그려야 한다(14). ② 구하고자 하는 $x$ 는 수이므로 $x = 6cm$ 라고 쓰면 안된다(9). ③ 무게중심의 성질을 증명할 때는 주어진 것과 증명할 것을 명확히 제시하여야 한다(7). ④ 세 중심이 한 점에서 만나는 이유에 대해 설명하여야 한다(5).
	교수 자료의 활용(44)	⑤ 무게중심의 성질을 증명할 때 색깔이 다른 삼각형(시각적 자료)을 활용하여 학생의 직관적 이해를 도왔다(17). ⑥ 삼각형을 세워보는 활동이 의미있게 진행되기 위해서는 손가락 하나를 사용하여야 한다(3). 활동의 방법이 정확히 안내되어야 한다(10). ⑦ 삼각형을 세워보는 활동이 이 수업에서 가지는 가치를 알 수 없다(6). ⑧ 삼각형이 너무 작으면 무게중심의 위치를 정확히 찾는 활동 자료로 적합하지 않다(5). ⑨ 무게중심의 위치를 찾기 위해서는 모뎀의 다른 삼각형도 살펴보도록 하여야 한다(4). ⑩ 무게중심의 성질을 증명할 때 사용한 색깔이 다른 삼각형은 학생이 발견해야 할 것을 교사가 대신한 것이다(2).
	표현의 선택(20)	⑪ '가운데' 라는 일상용어를 사용하여 학생들이 배운 내용을 흥미를 느낄 수 있게 하였다(18). ⑫ '가운데' 는 외심이나 내심 등과 혼동될 수 있으므로 적절한 표현이 아니다(2).
	예의 선택(49)	⑬ 무게중심의 성질을 설명할 다음에는 예제 풀이가 필요하다(24). ⑭ 탐구활동지에 실제로 제어보는 과제가 있어 무게중심의 성질을 발견하는데 적절하다(19). ⑮ 탐구활동지가 단순히 길이를 제어 비를 구하는 과제만으로 되어 있어 성질을 발견하는데 의미를 갖지 못한다(6).
연결 (95)	개념 간 연결(19)	① 무게중심의 성질을 증명하는 과정에서 중점연결정리 및 달음을 언급하여 학생의 이해를 도왔다(16). ② 무게중심의 성질을 증명하는 과정에서 중점연결정리를 언급만 하고 의미있게 다루지 않았다(3).
	계열 짓기에 대한 결정(43)	③ 무게중심의 성질을 증명하기 이전에 다양한 조작활동을 통해 학생의 흥미를 자극하였다(25). ④ 세 중심의 교점에 손가락을 놓아 삼각형을 세우는 활동과 중심이 넓이를 이등분한다는 사실 간의 관계가 설명되지 않았다(10). ⑤ 뱃목 과제와 삼각형을 세워보는 활동은 동일한 성격의 과제이므로 두 가지 모두를 사용할 필요는 없다(8).
	개념적 적절성 인식(33)	⑥ 사각형의 무게중심을 알아보는 숙제는 삼각형의 무게중심을 확장할 기회를 주는 좋은 과제이다(26). ⑦ 사각형의 무게중심을 알아보는 숙제는 학생들에게 너무 어렵기 때문에 적절한 과제가 아니다(7).
우발 (51)	학생 아이디어에 반응(51)	① 삼각형을 세워보는 활동에서 '창의적이야', '두 손가락을 사용 하네' 와 같은 말로 적절한 피드백을 주었다(9). ② 무게중심의 성질을 증명할 때 증명해야 할 SAS를 사용한 학생에게 당황하지 않고 즉각적인 피드백을 주었다(9). ③ 무게중심의 성질을 증명할 때 2:1과 1:2을 혼동하여 답한 학생에게 적절히 대응하였다(8). ④ 삼각형을 세워보는 활동에서 학생이 찾은 점은 무게중심이었다. 교사는 이 학생의 설명에 적절하게 대응하였다(7). ⑤ 삼각형을 세워보는 활동에서 학생이 찾은 점은 외심이었다. 교사는 이 학생의 설명이 옳다고 잘못 판단하였다(6). ⑥ 교사가 학생들의 반응(예, 전시학습 확인)에 주의를 기울이지 않는다(6). ⑦ 무게중심의 성질을 증명할 때 증명해야 할 SAS를 사용한 학생에게 적절히 대응하지 않았다(5). ⑧ 세 번째 중심을 두 중심의 교점과 꼭짓점을 이어서 그는 학생에 대해 교사의 조직이 없다(1).
	기타(321)	① 시간배분이 좋다(32). ② 뱃목과 같은 실생활 자료가 흥미를 자극한다(29). ③ 학생이 발표한 다음에는 다른 학생의 발표도 들어보아야 하므로 발표할 학생은 골고루 시켜야 한다(27). ④ 활동을 통해 학습자가 지식을 찾아가게 하여 수업에 흥미를 부여하였다(26). ⑤ 모듈활동 수업인데 실제로는 모듈활동이 이루어지지 않았다(24). ⑥ 교사가 칭찬을 많이 한다(21). ⑦ 뱃목 동영상의 소리가 작다(20). ⑧ 교사의 목소리와 발음이 또박또박하고 수업이 안정적이다(20). ⑨ 교사와 학생의 유대관계가 좋다(18). ⑩ 모니터 화면에는 글씨가 보이도록 썬야 한다(18). ⑪ 학생의 이해를 돕기 위해서 문제 풀이나 개념을 설명할 때는 칠판에 판서할 필요가 있다(17). ⑫ 교사가 반복하여 설명하는 것은 학생의 이해에 도움이 된다(16). ⑬ 교사가 조력자 역할을 하고 발견은 학생이 한다(16). ⑭ 모듈을 골고루 순회하며 지도하여야 한다(12). ⑮ 학생들이 수업에 적극적으로 참여한다(10). ⑯ 모듈활동에 대한 유의사항을 모니터로 제시한 것이 좋았다(9). ⑰ 원리탐구수업은 상위수준 학생들만 할 수 있다(6).

7) 이 연구의 연구대상은 38명이지만 한 명의 연구대상이 세부 코드의 서로 다른 분석 내용을 언급한 경우는 이를 중복하여 세었다. 이를테면 '교수법의 이론적 기반'과 관련하여 연구대상 한 명이 '형식적인 증명은 딱딱하고 수업을 지루하게 만들기 때문에 그림을 이용한 설명이 적절하다'와 '판서를 하지 않고 대화로 수업을 이끌어 가면 수학적 의사소통이 활성화된다'를 모두 기술하였다면 이에 대한 인원수를 2명으로 하였다.



## IV. 연구 결과

이하에서는 <표 IV-1>의 내용을 세부적으로 검토하여 무게중심 수업 사례에 대한 분석 관점의 전반적인 양상을 살펴보고 이로부터 수업과 관련하여 교사들이 보이는 실행 지식의 특징을 기술함으로써 교사 전문성 개발에의 시사점을 논의한다.

### 1. 토대 지식

교사들의 수업 분석 관점에서 토대 지식과 관련된 내용은 ‘교수법의 이론적 기반’, ‘교과 지식의 명시적 표현’, ‘교과서 교수’가 있었다.

‘교수법의 이론적 기반’은 수업의 계획 및 활동의 설계, 학생과의 상호작용 전략 등과 같이 수업과 관련된 모든 선택과 결정에 대한 지식이다(정유경, 2014). 연구대상이 관찰한 수업에서 교사는 판서를 거의 하지 않고 학습 내용을 말로 설명하였으며 무게중심이 중선을 2:1로 나눈다는 것을 증명할 때도 수학적 기호를 통해 증명 내용을 기술하지 않고 그림을 이용하여 설명하였다. 수업에서 학생들 역시 문제 풀이 결과를 칠판에 쓰지 않고 말로만 발표하였다. 이에 대해 연구대상 20명은 ‘대화를 통해 수업을 이끌어 가서 수학적 의사소통이 활성화되었다(토대 ②)’고 보았으며, 연구대상 27명은 ‘형식적인 증명이 수업을 지루하게 만들므로 그림을 이용한 설명이 중학생들에게 적절하다(토대 ①)’고 평가하였다. 연구대상은 수학적 의사소통이 글보다는 대화에 의해 활발하게 진행된다는 견해를 지니고 있으며, 수학적 증명은 수업을 지루하게 만들기 때문에 그림을 통한 정당화가 적절하다고

생각하는 경향이 있다.

그러나 2009 개정 교육과정의 교수·학습 방법에 따르면 수학적 의사소통능력은 수학 용어, 기호 등과 같은 수학적 표현을 이해하고 정확하게 사용하도록 하며, 수학적 아이디어를 말뿐만 아니라 글로 설명하여 다른 사람과 나눔으로써 길러질 수 있다(교육과학기술부, 2011: 35). 또한 2015 개정 교육과정은 중학교 기하 영역 지도에서 도형의 성질을 정당화할 때 요구되는 연역적 추론이 수학적 소양을 기르는데 중요한 역할을 한다고 지적하였다(교육부, 2015: 33). 수학적 의사소통과 증명 지도에 대한 연구대상의 관점은 이상과 같은 교육과정의 취지가 수업을 통해 충분히 구현되는데 한계로 작용할 수 있다. 연구대상 중 17명은 ‘문제 풀이나 개념을 설명할 때 칠판에 판서할 필요가 있다(기타 ①)’고 지적하기는 하였지만 이는 수학적 의사소통이나 정당화 지도와 관련하여 적절한 용어와 기호로 증명이 기술되어야 함을 언급하였다기보다는 학생들이 말보다 글로 써주었을 때 더 잘 이해하기 때문에 판서가 필요하다고 설명한 것으로 수업에 대한 일반적 이슈와 관련된다.

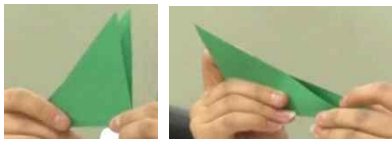
‘교과 지식의 명시적 표현’은 수업의 내용 요소를 다른 개념이나 절차 등을 통해 명확하게 다루는 지식이다(정유경, 2014). 연구대상은 삼각형의 무게중심에 대한 수업을 관찰하였지만 분석문에서 삼각형의 무게중심 개념과 관련된 명시적인 기술을 거의 찾을 수 없었다. 실제로 <표 IV-1>에 따르면 요약된 분석 내용의 총합은 55개, 이를 언급한 교사 인원수의 총합은 708명이다<sup>8)</sup>. 이 중에서 삼각형의 무게중심 개념과 관련된 분석 내용은 3개, 이를 언급한 교사는 21명에 불과하였다. 연구대상은 수업을 분석함에 있어 내용 요소인 삼각형의 무게중심 개념에는 별로

8) <표 IV-1>에 기초하여 ‘토대’, ‘변환’, ‘연결’, ‘우발’, ‘기타’ 범주에 대하여 교사들의 분석 내용 요약은 각각 8개, 15개, 7개, 8개, 17개로, 언급한 교사들의 인원수는 각각 93명, 148명, 95명, 51명, 321명으로 계산하였다.

주목하지 않았다고 볼 수 있다(준거 4).

또한 연구대상 11명은 무게중심이 되는 이유가 중선이 넓이를 이등분하기 때문이라고 기술하였다(토대 ④). 이는 삼각형의 무게중심과 관련된 전형적인 오개념으로(홍갑주, 2005), 중학교 교과서에서 삼각형의 무게중심을 다루는 방식에 영향을 받았다고 볼 수 있다. 박지현(2008; Stein, Remillard, & Smith, 2007)에 따르면 교과 내용 지식이 충분하지 않은 교사는 가르치는 교과서의 자료 및 내용 제시 순서에 의존하여 수업을 실행하는 경향이 있는 바, 이 연구에 참여한 교사들의 무게중심에 대한 교과 내용 지식에 한계가 있을 가능성이 있다.

한편 연구대상 7명은 삼각형을 꼭짓점이 겹치도록 변을 반으로 접어서 생기는 선들이 만나는 점이 무게중심이라고 보았다(토대 ⑤). 연구대상이 관찰한 수업에서 교사는 삼각형을 손가락에 세워보는 탐구활동을 시키는데 이 때 한 학생이 삼각형을 접어서 무게중심을 찾으려는 시도를 하였다. 그러나 이 학생은 삼각형을 [그림 IV-1]과 같이 양 꼭짓점이 겹치도록 변을 반으로 접었다. 이렇게 생긴 선은 중선이 아니고 변의 수직이등분선이 되므로 이는 무게중심이 아니라 외심을 만들게 된다. 그러나 연구대상 7명은 이 학생이 종이접기를 통해 무게중심을 적절히 찾았다고 보았다.

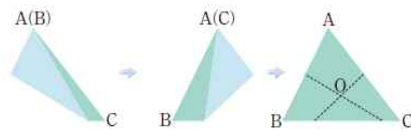


[그림 IV-1] 삼각형을 접어서 무게중심을 찾는 학생 활동의 예

2009 개정 중학교 2학년 교과서 전체 13종에서 11종은 [그림 IV-2]와 같이 종이접기를 통해 삼각형의 외심 또는 내심을 탐구하는 활동을 소

개하고 있다. 그러나 이상과 같은 연구대상의 토대 지식을 고려할 때 [그림 IV-2]와 같은 탐구활동이 실제 수업 상황에서 의미있게 구현될 수 있을지 보장하기 어렵다. 학교 수학의 주요 개념을 구체물을 활용하여 탐구해보는 직접적인 경험이 예비 교사 교육에서도 필요해 보인다.

- 가. 삼각형 ABC에서 꼭짓점 A에 꼭짓점 B가 겹치도록 접고 펼친다.
- 나. 삼각형 ABC에서 꼭짓점 A에 꼭짓점 C가 겹치도록 접고 펼친다.
- 다. 위의 가와 나에서 접어서 생긴 교점을 O로 표시한다.



[그림 IV-2] 종이접기로 외심 찾기(이준열 외, 2009: 254)

‘교과서 교수’는 가르치는 교사가 교과서의 전개 방식을 엄격하게 순서 그대로 따르기보다는 일부만 선택하거나, 순서를 변경하여 활용하는 것과 관련된 지식이다(정유경, 2014). 교사는 가르치고자 하는 수학 내용과 학생의 수준에 비추어 교과서를 비판적으로 검토하여 제시된 내용을 개선하거나 보충하는 전략 또는 자원을 지니고 있어야 한다(Watson, 2012). 그러나 연구대상이 관찰한 수업에서 교사는 삼각형을 손가락 위에 세워보는 탐구활동을 진행하여 평형을 이루는 점으로서 무게중심을 다루려는 시도를 하였으나 이를 세 중선의 교점이라는 무게중심의 정의로 이끌어가지 못하고 무게중심의 정의를 교과서에 밀줄을 그으면서 제시하는 것으로 탐구활동을 마무리하였다. 여러 선행연구(정진영, 2010; 박달원, 2006; 홍갑주, 2005)가 삼각형의 무게중심을 세 중선의 교점으로 정의하는 중학교 교육과정의 접근 방식에 대해 한계를 지적했음에도 불구하고, 연구대상 20명은 중선과 무게중심의 정의를 교과서에 쓰여진 대로 안내한 것이 적절

하다고 판단하였다(토대 ⑦). 연구대상 3명만이 교과서에 제시된 무게중심의 정의를 그대로 읽어 준 것에 문제점을 지적하였다(토대 ⑧).

## 2. 변환 지식

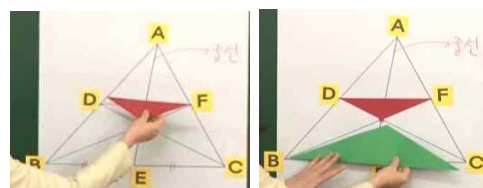
교사들의 수업 분석 관점에서 변환 지식과 관련된 내용으로는 ‘교수 자료의 활용’, ‘예의 선택’, ‘교사의 시범’, ‘표현의 선택’ 등을 볼 수 있었다.

‘교수 자료의 활용’은 수학 내용을 학생들에게 설명하기 위하여 일상생활에서 사용하는 물건이나 교구를 활용하는 지식을 말한다(정유경, 2014). 연구대상이 관찰한 수업에서는 삼각형의 무게중심을 찾아보는 탐구활동에서 삼각형 모양의 색종이가 쓰였으며, 무게중심의 성질을 증명하는 과정에서 색깔이 다른 두 개의 삼각형 종이 활용되었다.

여러 선행 연구(이경숙, 유미현, 2014; 김수금 외, 2014; 금정연, 김동화, 2013; 하영화, 고호경, 2011)에 따르면 무게중심은 평형을 이루게 하는 점이므로 실험이나 탐구활동을 통해 학생들이 그 개념적 본질을 경험할 수 있어야 한다. 그러나 연구대상 6명은 삼각형을 손가락 위에 세워보는 활동이 해당 수업에서 어떤 의미를 가지는지 알 수 없다고 하였다(변환 ⑦). 또한 연구대상 10명은 이러한 활동이 의미있게 진행되기 위해서는 삼각형을 손가락 하나에 세워야 한다는 활동의 방법이 정확하게 안내되어야 한다고 지적하였다(변환 ⑥). 물론 수업에서 교사가 탐구활동을 진행할 때는 학생들에게 활동의 방법이 명시적으로 설명되어야 함에 유의할 필요가 있다. 그러나 이와 더불어 교사는 수학적 개념과 관련하여 탐구활동의 의도가 제대로 구현될 수 있도록 보다 본질적인 전략을 고려할 수 있어야 한다.

삼각형을 손가락에 세워보는 활동에는 어떤 삼각형이든 평형을 이루게 하는 점이 있으며 이는 중선의 교점으로 찾을 수 있음을 직관적으로 이해하게 하려는 교수학적 목적이 있다. 이를 위해서 학생들은 모양이 다른 여러 개의 삼각형을 손가락에 세워 볼 필요가 있다. 또한 삼각형의 크기가 너무 작으면 손가락을 대충 어디에 대든 삼각형이 세워질 것이므로 삼각형의 크기도 적절히 클 필요가 있다. 그러나 이처럼 삼각형을 세워보는 탐구활동이 성공적으로 진행되기 위한 전략(준거 5)을 무게중심 탐구의 본질과 관련하여 언급한 연구대상은 모두 9명에 불과하였다(변환 ⑧, ⑨).

무게중심의 성질을 증명하는 과정에서 사용된 두 가지 색깔의 삼각형에 대해 연구대상 17명은 시각적 자료를 활용하여 학생들의 직관적 이해를 도왔다고 평가하였다(변환 ⑤). 연구대상이 관찰한 수업에서 교사는 무게중심이 중선을 2:1로 나눈다는 성질을 증명하는데 중점연결정리와 삼각형의 닮음을 활용하고자 하였다. 이를 위해 어떤 삼각형이 어떻게 닮았는지를 설명하는 과정에서 [그림 IV-3]과 같이 두 가지 색깔의 삼각형 종이를 사용하였다.



[그림 IV-3] 무게중심의 성질을 증명하는데 활용된 두 가지 색깔의 삼각형

그러나 [그림 IV-3]과 같은 접근은 연구대상 2명이 지적한 것처럼 학생들이 스스로 발견해야 하는 것으로(변환 ⑩) 해당 수업에서 가장 본질적인 학습 내용 중 하나이다. 두 가지 색깔의 삼

각형 종이에 대한 이러한 한계에도 불구하고 적지 않은 연구대상이 이를 가치있는 자료로 평가한 것은 현행 교육과정과 교육정책을 통해 다양한 교수 자료의 활용이 강조되고 있는 것과 무관하지 않아 보인다. 수업을 실행하는 교사들은 일상의 물건이나 교구 등이 수학 내용을 설명하는데 활용되었느냐 그렇지 않느냐 보다 사용된 교구가 수업의 목적과 의도에 부합하는지를 보다 면밀히 살피는 안목을 지닐 필요가 한다 (Rowland et al., 2009).

한편 연구대상 24명은 무게중심의 성질을 중점연결정리와 닮음을 이용하여 증명한 다음에는 성질 자체를 활용하는 예제를 다룰 필요가 있다고 지적하였다(변환 ⑬). 정유경(2014)에 따르면 학습 주제의 개념과 본질을 탐색하는데 적절한 연습문제나 전형적인 예를 선택하는 지식이 변환에서 ‘예의 선택’에 해당한다. 연구대상 대부분은 무게중심의 성질을 활용하는 문제가 무게중심이라는 학습 주제의 본질을 다루는 전형적인 예라고 생각하고 있으며, 이는 무게중심의 개념보다는 무게중심의 성질에 교사들이 좀 더 주목하고 있음을 보여준다.

‘교사의 시범’과 ‘표현의 선택’은 각각 ‘수학 내용이나 절차의 실행 과정을 교사가 명확하게 보여주었는지’와 ‘수학 내용을 반영하는 효과적인 표현을 선택하였는지’를 살피는 세부 코드이다(정유경, 2014). 연구대상 23명은 해당 수업의 핵심 내용 요소인 무게중심의 개념이나 정의, 성질과 관련된 교사의 시범보다는 ‘중선을 정확하게 그리는 것(변환 ①)’, ‘수를 나타내는 문자  $x$  에 단위를 붙이는 것(변환 ②)’과 같이 관찰한 수업의 주제와는 다소 거리가 있는 교사의 행동에 주목하였다. 또한 수업 동영상에서 교사가 삼각형의 무게중심을 삼각형의 ‘가운데’라고 표현한 것에 대해 연구대상 18명은 일상용어를 사용하여 학생들이 흥미를 갖게 하였다고 평가하였

다(변환 ⑩). 수학적 개념을 일상용어에 의한 은유로 표현하는 것은 직관적인 이해에 도움이 될 수도 있지만, 은유라는 추론의 본질적 한계로 인해 해당 수학적 개념에 대한 인식론적 장애를 유발할 수도 있다(English, 2009). 연구대상 2명이 지적한 바와 같이 ‘가운데’는 말 그대로 삼각형의 가운데를 이르기 때문에 삼각형의 외심이나 내심 등과 혼용하여 사용될 수 있음에 유의하여야 한다(변환 ⑫).

### 3. 연결 지식

교사들의 수업 분석 관점에서 연결 지식과 관련되는 것으로 보이는 내용에는 ‘개념 간 연결’, ‘계열 짓기에 대한 결정’, ‘개념적 적절성 인식’이 있었다.

‘계열 짓기에 대한 결정’은 수학적 내용을 효율적인 순서로 학습할 수 있도록 의도하는 방향으로 학습 활동의 계열을 결정하는 지식이다(정유경, 2014). 연구대상 25명은 무게중심의 성질을 증명하기 전에 진행된 다양한 조작활동이 학생들의 흥미를 자극하였기 때문에 바람직하다고 평가하였으며(연결 ③), 다른 연구대상 10명은 삼각형을 세워보는 활동과 중선이 넓이를 이등분한다는 내용사이의 관계가 명시적으로 다루어지지 않아 탐구활동이 학습 내용을 지도하는데 기여하지 못하였다고 보았다(연결 ④). 앞서 토대 지식에서 논의하였던 것처럼 해당 수업에서 교사는 삼각형을 세워보는 탐구활동을 진행하였지만 이를 세 중선의 교점이라는 무게중심의 정의로는 이끌지 못하고 교과서를 읽으면서 무게중심의 정의를 제시하는 것으로 탐구활동을 마무리하였다. 삼각형을 세워보는 탐구활동이 해당 수업의 주요 내용 요소를 학습하는데 효과적으로 작용하였는지에 대해서는 논란의 여지가 있지만, 연구대상 25명은 ‘지도하는 수학 내용’에

적합성'보다 '학생의 흥미'에 주목하여 학습 활동 계열의 적절성을 판단하였다.

'개념간 연결'은 학생이 수학적 개념 사이의 관련성에 주목하도록 하는 지식이다(정유경, 2014). 연구대상이 '개념간 연결'과 관련된 내용을 분석문에서 언급한 경우는 '계열 짓기에 대한 결정'에 비해 상대적으로 적었다. 무계중심의 성질과 중점연결정리, 닭음 사이의 관계에 주목한 연구대상 19명 중에서 16명은 수업을 진행한 교사가 중점연결정리와 닭음을 무계중심의 성질을 증명하는 과정에서 언급하였다는 것 자체를 가치있게 보았다(연결 ①). 앞서 변환 지식에서 살펴보았듯이 연구대상이 관찰한 수업에서 교사는 무계중심의 성질을 증명하기 위해 중점연결정리와 닭음과의 관계를 의미있게 탐구하기보다 중점연결정리와 닭음이라는 용어만을 언급하고 두 색깔의 삼각형 종이를 이용하여 성급하게 결과를 유도하였다. 위계적인 학문인 수학을 가르치는 교사는 학생들이 수학적 개념의 연결성을 충분히 인식할 수 있도록 수업을 의미있게 조직하는 안목과 전략을 지닐 필요가 있다(Thwaites, 2012).

'개념적 적절성 인식'은 수업에서 다룰 수학적 내용이 학생의 이해 수준에 적합한지 고려하면서 수업을 계획하고 실행하는 지식과 관련된다(정유경, 2014). 연구대상 26명은 해당 수업의 교사가 숙제로 제시한 삼각형의 무계중심 찾기가 이번 시간에 배운 삼각형의 무계중심을 삼각형으로 확장하도록 자극하는 좋은 과제라고 평가하였다(연결 ⑥). 그러나 앞서 토대 지식과 변환 지식에서 살펴보았듯이 연구대상은 관찰한 수업에서 삼각형의 무계중심 자체를 탐구하는 것보다 삼각형의 무계중심에 대한 성질을 이용하여 관련 문제를 해결하는 것에 집중하여 수업을 관찰하였다. 실제 해당 수업에서도 삼각형의 무계중심을 찾는 탐구활동이 진행되기는 하였지만

삼각형이 평형을 이루게 하는 점으로서 무계중심의 의미를 명시적으로 다루기보다는 세 중선의 교점이라는 정의와 중선을 2:1로 나눈다는 성질, 이를 활용하는 문제 해결 등이 주요한 학습 내용이 되었다. 여러 선행연구(최병철, 2016; 김래영, 이현희, 2013; 정진영, 2010)가 현재 중학교 교육과정에서 삼각형의 무계중심을 다루는 방식으로는 무계중심의 아이디어를 삼각형으로 확장하는 것이 매우 어렵다는 것을 지적한 바, 삼각형의 무계중심을 찾는 과제에 대한 연구대상의 견해는 '개념적 적절성 인식'에 있어 한계를 보여준다.

#### 4. 우발 지식

교사들의 수업 분석 관점에서 우발 지식에 해당하는 내용은 '학생 아이디어에 반응'으로 분류할 수 있었다. '학생 아이디어에 반응'은 수업에서 일어나는 학생과의 상호작용에 대한 교사의 반응으로서 학생들의 예상치 못한 아이디어나 제안에 타당하고 합리적이며 의미있는 응답을 할 수 있는 능력과 관련된다(정유경, 2014). 연구대상 51명이 '학생 아이디어에 반응'으로 범주화할 수 있는 내용을 분석문에 기술한 것으로 보아 연구대상 대부분이 수업 중에 교사가 학생의 이해를 모니터링하고 이에 대해 적절히 반응하여야 함을 인식하고 있다고 볼 수 있다(준거 3). 그러나 연구대상은 학생의 아이디어에 대한 적절한 반응이 '창의적이야'와 같은 칭찬을 한다거나 '두 손가락을 이용하네'와 같이 학생의 행동을 말로 옮겨주는 것(우발 ①), 증명해야 할 것을 사용한 학생의 답변에 당황하지 않고 즉각적인 피드백을 준 것(우발 ②) 등으로 보았다. 연구대상이 해당 수업의 교사가 학생의 예기치 않은 답변에 대해 적절히 반응하였다고 평가한 장면①에서 실제 교사와 학생들 간의 대화를 살펴

보면 다음과 같다.

교 사 : 닳음비가 얼마야?

학생들 : 2대 1이요.

교 사 : 왜 2대 1이야?

학생들 : 무게중심이니 까요. BG대 GF가 2대 1이예요(①).

교 사 : 우리는 BG와 GF가 2대 1인 것은 아직 모릅니다(②). 뭐를 알고 있어요? 삼각형의 중점연결정리에 의해서 삼각형 DGF와 삼각형 CGB는 닳았고, 닳음비가 몇 대 몇(③)?

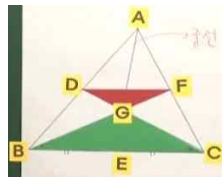
학생들 : 2대 1(④).

교 사 : 그렇지, 작은 것 대 큰 거 하면 1대 2이고, 큰 것 대 작은 거 하면 2대 1이고(⑤). 이해되죠? 그럼 나머지 대응하는 변도 어때야 되겠어? 따라서 CG대 GD도 몇 대 몇 이어야 돼?

학생들 : 2대 1.

교 사 : 그렇죠? 이해되었지요?

위 대화에서 학생들은 증명해야 할 무게중심의 성질을 사용하려고 하고(①), 이에 대해 교사는 ‘그것은 아직 모릅니다(②)’라고 답변한다. 하지만 수업의 전반부 활동에서 학생들은 선분 BG와 선분 GF의 길이를 재어 그 길이의 비가 2대 1임을 이미 확인한 상태이다. ‘그것은 아직 모릅니다’ 정도의 답변만으로는 현재 하고자하는 증명의 목적이 무엇인지 학생들이 인식하도록 하는데 한계가 있다. 특히 연구대상 7명이 지적하였듯이 수업의 교사는 무게중심의 성질을 증명하고자 할 때 주어진 것은 무엇이고 증명하고자 하는 것은 무엇인지 명확히 제시하지 않았기 때문에(변환 ③), 학생들이 이를 더욱 혼동한



[그림 IV-4] 무게중심의 성질 증명에 쓰인 도형

것처럼 보인다.

또한 ③에서 교사는 삼각형 DGF와 삼각형 CGB의 닳음비를 물어보고 이에 답하기 위해 학생들이 중점연결정리를 사용하기를 기대하지만, 학생들은 전혀 머뭇거리지 않고 즉각적으로 2대 1이라고 답한다(④). 수업 동영상에서 교사 질문 ③에 대해 학생들이 ④와 같이 답하는데 걸린 시간과 대답하는 학생들의 분위기 등을 고려해 볼 때, ④는 ③에서 교사가 묻는 내용을 중점연결정리와 관련하여 숙고한 다음 나온 답변이 아니라, 해당 수업에서 비가 얼마인지를 묻는 교사의 모든 질문에 항상 답이 2대 1이었기 때문에 학생들이 2대 1이라는 답을 의미없이 그냥 반복하는 것으로 보인다. 그러나 교사는 학생들이 중점연결정리를 활용하였지만 두 삼각형의 닳음비만 실수로 잘못 구했다고 판단하고 ⑤와 같이 반응하였다.

이상과 같이 무게중심의 성질을 증명하는 수업 장면을 고려할 때 교사가 학생의 반응에 적절히 대응하였다는 연구대상의 판단에 대해서는 여러 가지 논란의 여지가 있다. ‘학생 아이디어에 반응’은 교사가 학생의 예상치 못한 아이디어나 제안을 수업 내용에 비추어 해석하여 학습 요소와 연결시키거나 가르칠 내용을 변환하는 방법을 수업의 매 순간마다 즉각적으로 수정하려는 목적을 갖고 있다(Rowland, Thawaites, & Jared, 2011). 좋은 수학 수업은 학생과의 상호작용이 수업에서 다루어지는 내용 요소를 매개로 활발히 진행되는 수업이라고 볼 때(이지현, 이기돈, 2015), 학생의 반응에 대한 교사의 응답은 단순한 칭찬이나 옳다 그르다와 같은 즉각적인 피드백 이상의 것일 필요가 있다.

## 5. 논의

9) 수업 동영상의 33분 44초부터 34분 32초 사이에 해당하는 장면이다.

이상에서 교사들이 무게중심 수업 사례를 관찰하고 작성한 분석문을 KQ의 네 가지 차원인 토대, 변환, 연결, 우발에 비추어 살펴본 바에 따르면 이 연구에 참여한 교사들의 수업 실행 지식의 특징 및 교사 전문성 개발에의 시사점은 다음과 같이 6가지로 요약할 수 있다.

첫째, 토대 지식과 관련하여 연구대상은 수학적 의사소통이 글보다는 대화를 통해 활성화된다고 생각하며 형식적인 증명은 딱딱하고 지루하기 때문에 그림을 이용한 비형식적 정당화가 바람직하다는 인식을 갖고 있다(준거 1). 2009 개정 교육과정과 2015 개정 교육과정의 취지에 비추어 볼 때 수학적 의사소통 및 정당화의 의미와 특징에 대한 교사들의 안목이 보다 확장될 필요가 있어 보인다. 한편 수업에서 다루는 내용 요소인 무게중심의 정의와 개념에 대한 논의는 전체 분석 내용 요약의 약 5% 정도만을 차지할 정도로 연구대상의 주목을 거의 받지 못하였다(준거 4). 수업에서 다룬 무게중심의 정의와 개념에 대해 기술한 연구대상 21명중 18명은 교과서를 고수하면서 무게중심의 정의를 제시한 것이 학생들의 이해를 도왔다고 판단하였다(준거 4). 교사 교육프로그램을 통해 무게중심의 개념적 본질 및 의미에 대해 명시적으로 논의될 필요가 있다.

둘째, 연구대상의 수업 분석문에서 살펴볼 수 있는 교사 지식의 특징은 변환, 연결, 우발의 순서로 나타났다(준거 2). 변환 지식으로 요약된 분석 내용의 개수가 15개, 이를 언급한 교사 인원수가 148명으로, 연결 지식의 8개와 95명, 우발 지식의 8개와 51명보다 상당히 많았다. 이는 변환 지식이 학생에게 수학을 가르친다는 교사의 역할과 관련하여 가장 핵심적이면서도 기초적인 측면을 담고 있는 바, 연구대상이 수업을 관찰할 때 가장 자연스럽게 주목하게 됨을 알 수 있다. 다만 수업을 실행할 때 교사는 수학의

계통성과 학생의 사전 지식을 충분히 고려해야 하며, 학생의 반응에 수학적으로 의미있게 대처해야 하는 바, 연결 지식 및 우발 지식과 관련되는 수업 양상에도 좀 더 주목할 수 있도록 교사 교육프로그램을 통해 안내될 필요가 있다.

셋째, 변환 지식과 관련하여 연구대상은 일상의 물건이나 교구와 같이 수업에서 활용되는 교수 자료에 주목하였다(준거 3). 연구대상은 삼각형의 무게중심을 찾는 탐구활동에서 사용된 삼각형 모양의 색종이와 무게중심의 성질을 설명하는데 활용된 두 가지 색깔의 삼각형을 의미있게 평가하였다. 삼각형의 무게중심을 찾는 탐구활동이 성공적으로 진행되기 위해서는 활동을 진행하는 방법이 학생들에게 정확히 안내되어야 한다고 보았으나 사용된 삼각형의 모양이나 크기에 대해서는 거의 논의하지 않았다(준거 5). 이는 수업에서 활용된 교수 자료를 수업 활동의 목적과 의도에 비추어 해석하고 평가하는 논의가 교사들의 수업 전문성 개발 프로그램에서 주요하게 다루어질 필요가 있음을 시사한다. 또한 연구대상 대부분은 무게중심의 성질을 활용하는 문제를 해당 수업의 전형적인 예로 보았으며, 이는 교사들이 수업을 관찰할 때 무게중심의 개념보다는 무게중심의 성질을 다루는 장면에 보다 집중하고 있음을 보여준다(준거 4).

넷째, 연결 지식과 관련하여 연구대상 대부분은 학습 활동 계열 결정의 적절성을 학생의 흥미 유발에 주목하여 평가하였다(준거 3). 또한 연구대상은 무게중심의 성질을 증명할 때 관련 개념인 중점연결정리와 닮음이 함께 언급되는지에 대해서는 관심을 두었지만 이들이 무게중심의 성질을 증명하는데 얼마나 유기적으로 활용되는지에 대해서는 주목하지 않았다. 한편 연구대상은 삼각형의 무게중심을 사각형으로 확장하는 과제가 학생에게 적합하다고 판단하였지만 선행연구에 따르면 현재 중학교 교과서의 접근

방식으로 삼각형의 무게중심을 학습한 학생들에게 이러한 확장은 매우 어려운 과제가 된다. 이처럼 연구대상이 사각형의 무게중심 개념의 적절성을 학생들이 배운 내용과 연결하여 충분히 인식하지 못한 것은 삼각형의 무게중심 정의와 개념에 크게 주목하지 않는 연구대상의 성향과 관련되어 보이므로(준거 4), 교사 교육프로그램을 통해 무게중심에 대한 교수학적 분석 및 논의의 기회가 주어질 필요가 있다.

다섯째, 우발 지식과 관련하여 연구대상은 수업 상황에서 교사가 학생의 반응에 대해 칭찬을 하거나 즉각적인 피드백을 제공하는 것을 적절한 응답으로 간주하였다(준거 3). 우발 지식에는 교사가 학생의 학습을 지속적으로 살피므로써 진행되는 수업을 학습에 도움이 되도록 즉각적으로 개선하려는 목적이 담겨 있는 바, 수업을 실행할 교사는 학생의 반응을 가르치는 내용 요소에 비추어 해석하고 대처하는 안목을 가질 필요가 있으며 이 점에 대한 구체적인 논의가 교사 교육프로그램을 통해 진행될 필요가 있다.

여섯째, 무게중심 수업 사례에 대한 교사들의 관찰 결과에는 수업 주제와 관련된 내용-특수적 분석보다 수업 내용과는 독립적인 일반적 논의에 해당하는 기술이 훨씬 많았다. 수업 활동 주제인 무게중심과 관련하여 KQ의 변환, 연결, 우발 지식으로 범주화할 수 있는 분석 내용을 언급한 교사의 인원수 총합이 294명인데 반하여 무게중심이라는 수학적 내용과는 크게 관련되지 않는 '기타' 범주에 주목한 교사의 총합은 321명이었다. 수업의 시간 배분(기타 ①)이나 학생 발표를 균등하게 배정하는 문제(기타 ③), 실생활 소재 사용 여부(기타 ②) 등에 대해서는 거의 모든 연구대상이 한 번 이상씩 분석문에 기술할 정도로 주목하였으나 무게중심의 개념(토대 ⑥)이나 무게중심의 성질과 중점연결정리 및 닳음과의 관계(연결 ②), 무게중심을 찾는 탐구활동

을 의미있게 진행하는데 필요한 전략(준거 5) 등에 대한 논의는 거의 드러나지 않았다. 본질적으로 수학 수업은 교사가 수학 내용을 소재로 하여 학생들과 수학적 탐구활동을 진행하는 과정이므로 교사들이 수업을 관찰하고 실행할 때 수업의 핵심 내용 요소에 주목하도록 교사 교육 프로그램을 통해 안내하는 것은 교사들의 수업 전문성 개발에 필수적인 측면이라고 볼 수 있다.

## V. 결론

교사 지식의 특징은 수업 상황에 비추어 기술될 때 의미있게 규명될 수 있다. 여러 선행 연구에 따르면 교사 지식의 본질적인 특징은 수업 맥락을 통해 드러나는 경향이 있으며, 다른 교사의 수업을 관찰하는 과정에서도 구체화될 수 있다. 이에 이 연구는 교사들의 수업 분석에서 드러나는 실행 지식의 양상을 알아보고 이로부터 교사들의 수업 전문성 개발과 관련된 시사점을 얻고자 하였다.

이를 위해 현직 교사 38명이 무게중심 수업 사례를 관찰하고 작성한 분석문을 KQ에 비추어 검토하였다. 이러한 검토 과정에서 분석문을 작성한 교사들의 토대, 변환, 연결, 우발 지식을 보여주는 내용에는 어떤 것이 있으며 각각에 주목한 교사의 인원수는 얼마나 되는지 알아보았다. 또한 삼각형의 무게중심 교수-학습과 관련된 주요 이슈를 선행 연구로부터 구체화하여 교사들의 수업 분석에서 이러한 이슈가 얼마나 중점적으로 논의되었는지 살펴보았다. 그 결과 무게중심 수업에 대한 교사들의 분석 관점 및 교사 전문성 개발과 관련된 전반적인 특징 6가지를 추출하였다.

이 연구에서는 수학적 의사소통과 형식적인 증명에 대한 교사들의 견해를 알아볼 수 있었으



며, 교사들이 수업을 분석할 때 수업에서 다루는 수학 내용 요소 자체에 얼마나 주목하는지도 확인할 수 있었다. 또한 교사들이 수업을 볼 때는 수업의 여러 측면 중에서 일상적인 물건이나 교구와 같은 수업 자료를 집중적으로 살피는 경향이 있으며, 수업 활동의 적절성은 학생의 흥미 유발 정도에 비추어 평가하는 특징이 있음을 알 수 있었다. 교사들은 학생의 행동에 대해 즉각적인 피드백을 준다거나 다양하게 칭찬하는 것을 교사의 적절한 반응이라고 보았으며, 학생의 반응을 수업에서 다루는 내용 요소와 관련하여 면밀히 해석하거나 전략적으로 대처하는 것에 대한 논의를 수업 분석 과정에서 명시적으로 진행하지는 않았다. 이상의 결과는 교사 교육프로그램을 통해 수업 실행과 관련된 논의가 보다 본격적으로 진행될 필요가 있으며 이 때 수업에서 다루는 내용 요소의 개념적 본질과 의미에 대해 구체적인 분석이 필요함을 시사한다.

## 참 고 문 헌

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**. 서울: 교육과학기술부.

교육부(2015). **수학과 교육과정**. 서울: 교육부.

금정연, 김동화(2013). 중학교 삼각형의 무게중심 단원에 대한 효과적인 지도 방안. **동아시아 수학학술지**, 29(4), 425-447.

김남균, 유제정(2015). 초등학교 현직교사와 예비 교사의 수학 수업 비평의 관점에 대한 연구. **수학교육**, 54(1), 1-11.

김래영, 이현희(2013). 서술형 평가에 나타난 무게중심 문제 해결과정에서의 오류 분석. **수학교육연합학회학술지**, 233-237.

김수금, 유시규, 김선배(2014). 창의적 융합교육을 위한 무게중심 프로그램 개발과 적용사례

연구. **수학교육학연구**, 24(3), 333-357.

나귀수(2009). 초등학교 교사의 수학 수업 비평의 특징에 대한 연구. **학교수학**, 11(4), 583-605.

박달원(2006). 영재학생들을 위한 삼각형의 무게중심 지도 방법. **한국학교수학회논문집**, 9(1), 93-105.

박지현(2008). **학습자의 오개념과 오류에 대한 교사들의 Pedagogical Content Knowledge 사례 연구 -중학교 1학년 함수 영역을 중심으로-**. 이화여자대학교대학원 석사학위논문.

방정숙(2011). 예비 교사의 초등 수학 수업 분석과 인식. **한국초등수학교육학회지**, 15(2), 221-246.

방정숙, 선우진(2015). 예비교사의 초등 수학 수업에 대한 비평 수준 분석. **한국초등수학교육학회지**, 19(4), 625-647.

성태제(2005). **교육연구방법의 이해**. 서울: 학지사.

송근영, 방정숙(2013). 수학과 교사지식에 관한 국내 연구의 동향 분석. **한국학교수학회논문집**, 16(1), 265-287.

신보미(2014). 교사들의 수업 분석 특징에 대한 연구: 통계지도를 위한 교사 지식을 중심으로. **학교수학**, 16(3), 519-542.

이경숙, 유미현(2014). 초등 수학영재 수준을 고려한 무게중심에 대한 교수 학습 프로그램의 개발 및 적용. **과학영재교육**, 6(1), 15-34.

이준열 외(2009). **중학교 수학 ②**. 서울: 천재교육.

이지현, 이기돈(2015). 맞다 틀리다의 단순한 심판을 넘어: 예비교사들은 수업관찰을 통하여 무엇을 배울 수 있는가? **수학교육학연구**, 25(4), 549-569.

정진영(2010). **무게중심에 대한 교수학적 분석**. 전남대학교대학원 석사학위논문.

정유경(2014). **한국 초등학교 수학수업에서 발견되는 교사 지식의 분석틀 탐색**. 한국교원대학교대학원 박사학위논문.

정유경, 방정숙(2015). 수학을 가르치는 데 발현

- 되는 교사 지식에 관한 선행연구 고찰. **수학 교육학연구**, 25(4), 617-630.
- 최병철(2016). 질량중심 개념의 구조적 개념 형성에 관한 연구. **수학교육학연구**, 26(1), 23-45.
- 하영화, 고희경(2011). 2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정에서의 무게중심 교수·학습 제안. **수학교육논문집**, 25(4), 681-691.
- 홍갑주(2005). 도형의 무게중심과 관련된 오개념 및 논리적 문제. **학교수학**, 7(4), 391-402.
- Askew, M., Brown, M., Rhodes, V., Johnson, D., & Wiliam, D. (1997). *Effective teachers of numeracy*, London: Kings College.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- English, L. D. (2009). Analogies, metaphors and image: Vehicles for mathematical reasoning. In L. D. English (Eds.), *Mathematical reasoning: Analogies, metaphors and images* (pp. 3-18). New York and London: Routledge.
- Fennema, E. & Frnake, L. M. (1992). Teachers' knowledge and its impact. In D. A. Grouws (Eds.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-164). New York: Macmillan.
- Hegarty, S. (2000). Teaching as a knowledge-based activity. *Oxford Review of Education*, 26(3), 451-465.
- Kersting N. B. (2008). Using video clips of mathematics classroom instruction as item prompts to measure teachers's knowledge of teaching mathematics. *Educational and Psychological Measurement*, 68(5), 845-861.
- Lempert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. London: Yale University Press.
- Maher, C. A. (2008). Video recordings as pedagogical tools in mathematics teacher education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education: Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 65-83). The Netherlands: Sense.
- Markovits, Z. & Smith, M. (2008). Cases as tools in mathematics teacher education. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education: Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 39-64). The Netherlands: Sense.
- Petrou, M. & Goulding, M. (2011). Conceptualising teachers' mathematical knowledge in teaching. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical Knowledge in Teaching* (pp. 9-25). London and New York: Springer.
- Rowland, T., Thawaites, A., & Jared, L. (2011). Triggers of contingency in mathematics teaching. In B. Ubuz (Eds.), *Proc. 35<sup>th</sup> Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 73-80). Turkey: PME.
- Rowland, T. & Turner, F. (2007). Developing and using the 'knowledge quartet': A framework for the observation of mathematics teaching. *The Mathematics Educator*, 10(1), 107-124.
- Rowland, T. & Turner, F. (2006). A framework for the observation and review of mathematics teaching. *Mathematics Education Review*, 18, 3-17.
- Rowland, T., Turner, F., Thwaiters, A., & Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching*. London: SAGE.
- Rowland, T., & Ruthven, K. (2011). Introduction: Mathematical knowledge in teaching. In T.

- Rowland & K. Ruthven (Eds.), *Mathematical knowledge in teaching* (pp. 9-25). London and New York: Springer.
- Sabers, D. S., Cushing, K. S., & Berliner, D. C. (1991). Differences among teachers in a task characterized by simultaneity, multidimensionality, and immediacy. *American Educational Research Journal*, 28, 63-88.
- Silver, E., Clark, L. M., Ghouseini, H., Charalambous, C. Y., & Sealy, J. (2009). Where is the Mathematics? Examining Teachers' Mathematical Learning Opportunities in Practice-based Professional Learning Tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 261-277.
- Star, J. R. & Strickland, S. K. (2008). Learning to observe: Using video to improve preservice mathematics teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 107-125.
- Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Eds.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). United States of America: Information age publishing.
- Strong, M. & Baron, W. (2004). An analysis of mentoring conversations with beginning teachers: suggestions and responses, *Teaching and Teacher Education*, 20, 47-57.
- Thwaites, A. (2012). Knowledge quartet coding commentary. <http://www.knowledgequartet.org/263/mcp-scenario-3/>.
- Turner, F. & Rowland, T. (2011). The Knowledge Quartet as an organising framework for developing and deepening teachers' mathematics knowledge. In T. Rowland & K. Ruthven (Eds.) *Mathematical Knowledge in Teaching* (pp. 195-212). London and New York: Springer.
- van Driel, J. H., Verloop, N., & de Vos, W. (1998). Developing science teachers' pedagogical content knowledge. *Journal of Research in Science Teaching*, 35(6), 673-695.
- van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, 24, 244-276.
- Wetson, T. (2012). Knowledge quartet coding commentary. <http://www.knowledgequartet.org/393/atb-scenario-1/>.

# A Study about the Characteristics of Teachers' Viewpoint in Analysis of an Instruction : Focused on a Centroid Teaching-Learning Case<sup>10)</sup>

Shin, Bomi (Chonnam National University)

This study analyzed characteristics which emerged while 38 secondary school teachers observed a video clip about a centroid of triangles instruction. The aim of this study based on the analysis was to deduce implications in terms of the various means which would enhance teachers' knowledge in teaching mathematics and assist in designing mathematics education programs for teachers and professional development initiatives. To achieve this goal, this research firstly reviewed previous studies relevant to the 'Knowledge Quartet' as a framework of analyzing teachers' knowledge in mathematics instructions. Secondly, this study probed the observation results from the teachers in the light of the KQ. Therefore, some issues in the teacher education program for teaching mathematics were thirdly identified in the categories of 'Foundation', 'Transformation', 'Connection', and 'Contingency' based on the analysis. This research inspires the elaboration of what features have with regard to effective teachers' knowledge in teaching mathematics through the analyzing process and additionally the elucidation of essential matters related to mathematics education on the basis of the analyzed results.

\* Key Words : Analysis of Instruction(수업 분석), Teachers' Knowledge(교사 지식), Centroid Teaching-Learning(무계중심 교수-학습)

논문접수 : 2016. 7. 8

논문수정 : 2016. 8. 8

심사완료 : 2016. 8. 8

---

10) This work was supported by the National Research Foundation of Korea Grant funded by the Korean Government(NRF-2014S1A5A8016015).

<부록 1> KQ의 차원 및 세부 코드와 예시

차원 및 세부 코드 (Turner & Rowland, 2011)		차원 관련 예시 (Rowland et al., 2009: 35-37)
토 대	교수법의 이론적 기반 (Theoretical underpinning of pedagogy)	* 수학을 배워야 하는 이유와 수학교육의 목적에 대한 분명하고 일관된 신념을 가지고 있는가?
	목표 인지 (Awareness of purpose)	* 수학적 이해를 자극할만한 적절한 교수 전략을 사용하는가?
	학생 오류 확인 (Identifying pupil errors)	* 수학을 가르치는데 주요한 요인에 대한 지식을 보여주는가(예, 수학교육학자의 논문에 대한 언급)?
	교과 지식의 명시적 표현 (Overt display of subject knowledge)	* 절차보다 이해를 개발하는데 집중하는가?(절차는 '도구적 이해'와 관련될 수 있다)
	수학 용어 활용 (Use of mathematical terminology)	* 교과서나 교육과정만을 고수하기보다 나름의 교수 전략을 사용하는가? * 수업 설계 단계에서 일반적으로 오류나 오개념에 대한 지식을 보여주며 이를 피하는 방법을 제시하는가?
	교과서 고수 (Adherence to textbook)	* 수학적 표현을 올바르게 쓰기위해 노력하는가(예, 등호 기호의 옳은 사용)? * 사칙연산과 같은 절차를 제대로 이해하고 있는가? * (암산과 같이) 신속한 정신적인 방법(quick mental methods)을 사용할 수 있는가? * 수학적 용어를 바르게 사용하는가?
절차에 집중 (Concentration on procedures)	* 수학적 아이디어와 개념에 대해 정확한 이해를 보여주는가(예, 10을 곱하는 것을 '0을 추가하는 것'으로 인식하는 것은 의미가 없음을 아는 것, 정사각형의 집합과 직사각형의 집합이 공집합이 아님을 아는 것)?	
변 환	교사의 시범 (Teacher Demonstration)	* 수에 대한 연산을 설명하기 위해 도구(예, 십진막대)를 적절한 곳에서 사용하는가?
	교수 자료의 활용 (Use of instructional materials)	* 적절한 표현을 선택하는가(예, 뿔뿔을 '뒤로 세기'로 가르칠 때 수직선 사용, 자릿값을 가르칠 때 자릿값 도표나 화살표 카드를 사용)?
	표현의 선택 (Choice of representations)	* 아이디어를 설명하거나 정교화하기 위해 적절한 예를 선택하는가(23×6은 쓰기 곱셈과제로 적절한 반면 19×4는 암산 과제로 적절하기 때문에 쓰기 곱셈과제로는 적절하지 않음을 아는 것)?
	예의 선택 (Choice of Examples)	* 절차를 수행하는 방법을 분명하게 정확하게 보여주는가? * 이해를 개발하고 평가하기 위해 대화형 교수전략을 사용하는가? * 학생들의 지식과 이해를 평가하고 개발하기 위해 효과적으로 질문하는가?
연 결	절차 간 연결 (Making connections between procedures)	* 이전 수업과 연결시키는가? * 도입 활동과 수업의 본론을 연결시키는가?
	개념 간 연결 (Making connections between concepts)	* 내용 요소를 개념적으로 적절하게 연결시키는가(예, 도형에서 분수와 수에서 분수)?
	복잡성에 관한 예상 (Anticipation of complexity)	* 가르치는 학생들에 비추어 수학적 아이디어의 개념적 적절성을 인식하는가?
	계열 짓기에 대한 결정 (Decisions about sequencing)	* 수학적 아이디어간의 연결성에 대한 학생의 이해를 유도하기 위한 질문을 하는가? * 어떤 주제를 다룰 때 난이도의 수준 차이를 인식하는가?
	개념적 적절성 인식 (Recognition of conceptual appropriateness)	* 아이디어의 복잡성을 예측하여 학생들이 이해할 수 있도록 이를 단계별로 쪼갤 수 있는가? * 수학적 사고가 적절히 심화될 수 있도록 아이디어와 전략을 소개하는가? * 학생들의 이해를 평가하여 이에 따라 수업을 바꾸는가?
우 발	학생 아이디어에 반응 (Responding to students' ideas)	* 학생들의 설명, 질문과 답에 적절하게 반응하는가?
	수업 의제로부터 이탈 (Deviation from lesson agenda)	* 다양한 수준의 학생들로부터 제기되는 질문에 적절히 대처하는가? * 활동에 대한 학생들의 반응에 적절히 대처하는가?
	교사 통찰 (Teacher insight)	* 논의 과정에서 학생들이 오답 또는 부적절한 설명을 제시하였을 때 적절하게 반응하는가?
	도구나 자원의 활용 (불)가능성에 대한 반응 (Responding to (un) availability of tools and resources)	* 적절한 순간에 의제로부터 벗어나는가? * 수업 중에 학생의 이해를 지속적으로 평가하여 이에 따라 가르치는 과정을 수정하는가?

<부록 2> 삼각형의 무게중심 수업의 흐름

흐름	내용 <sup>11)</sup>	시간 (소요시간)
도입 (삼각형의 중점연결정리)	* 전시학습 확인 : ppt자료를 보면서 삼각형의 중점연결정리 기억해보기 * 학습목표 제시 : 교사가 불러주는 학습목표를 공책에 받아 적고 모르는 단어의 의미를 추측해 보기	~7:00 (7분)
	* 동기유발 : 삼각형 모양의 뗏목을 타고 무인도에서 안전하게 나오려면 뗏목의 어느 부분에 앉아야 할지를 생각해보도록 하는 플래시 자료를 시청하고 그 답을 추측해 보기	~8:30 (1분30초)
전개 (중선, 무게중심의 뜻과 무게중심의 성질 알기)	* 자유탐구활동 : 삼각형을 손가락 위에 세워보는 모둠활동 - 삼각형 모양의 색종이를 손가락 위에 세워보기 - 세우는데 사용한 방법을 모둠에서 토론하기	~15:30 (7분)
	* 이미 학습한 수학적 원리로부터 유추 : 중선과 무게중심의 뜻 - 삼각형을 세우는데 사용한 방법을 발표하기 - 교사의 설명을 듣고 중선의 정의 배우기 - 삼각형 모양의 색종이에 세 중선을 그리기 - 세 중선이 한 점에서 만나는 것을 확인하기 - 세 중선의 교점을 손가락 위에 놓아 삼각형을 다시 세워보기 - 교사의 설명을 듣고 삼각형의 무게중심의 정의 배우기 - 교과서에 밑줄을 그으면서 중선과 무게중심의 정의 확인하기	~24:00 (8분30초)
	* 학습할 원리와 관련한 조작활동 : 무게중심의 성질에 대한 탐구활동 - 탐구활동지의 과제를 해결하기 위해 선분의 길이제기 - 선분의 길이를 간단한 정수비로 나타내기 - 과제 해결 결과 발표하기	~29:00 (5분)
	* 탐구한 수학적 원리의 형식화 : 무게중심의 성질 증명하기 - 무게중심이 중선을 2:1로 나뉘는 인식하기 - 무게중심의 성질을 중점연결정리와 닮음을 이용하여 정당화하는 교사의 설명 듣기	~35:00 (6분)
	* 익히기 및 적용하기 : 교과서 문제 5 해결하기	~38:30 (3분30초)
	* 형성평가	~43:30 (5분)
정리 (내용 정리 및 차시 예고)	* 학습 내용 정리하기	~45:30 (2분)
	* 과제 제시 : 사각형에서 무게중심 찾기	~47:00 (1분30초)

11) 수업의 내용은 수업 동영상과 함께 에듀넷 우수 수업 동영상 서비스에 탑재된 교수-학습 지도안을 근거로 작성하였다.