대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 26 권 제 3 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 26, No. 3, 489 ~ 508. Aug 2016

수와 연산 영역 부진 학생의 산술적 사고 수준에 관한 사례 연구

- 초등학교 6학년 한 학생을 대상으로 -

임 미 인* · 장 혜 원**

수와 연산은 초등수학에서 가장 기본이고 핵심이면서도 학생들이 많은 어려움을 겪는 영역으로 알려져 왔다. 이와 같은 학습의 어려움은 계산 방법이나 계산 기능의 측면을 강조하는 것만으로는 근본적인 해결이 어렵고, 관련 사고의 측면에서 검토할 필요가 대두된다. 본 연구는 Guberman(2014)에 기초하여 수와 연산 영역 부진 학생의 산술적 사고 수준 및 산술에 대한 이해 정도를 분석하여 산술에 관한 어려움의 원인을 진단하고 그에 대한 처방 방안을 모색하는 것을 목적으로 한다. 이를 위해 수학 학습 중 유독 수와 연산 영역에서만 어려움을 보이는 한 초등학교 6학년 학생을 대상으로 두 차례에 걸쳐 산술적 사고 수준 및 산술 개념 이해 검사를 실시하고 학생의 반응을 분석하는 사례 연구를 실시하였다. 분석 결과, 연구 대상 학생의 산술적 사고는 Guberman의 1수준에 해당하며 몇 가지 산술 개념과 관련하여 이해에 어려움을 지니고 있음이 파악되었다. 분석 결과 및 그에 대한 논의로부터 구체적인 처방 방안을 제시하였다.

Ⅰ. 서 론

초등학교 교육과정에서 수와 연산은 가장 기본이며 핵심 영역에 해당된다. 초등 수학에서 산술이 차지하는 범위는 매우 방대하며, 그 가치와 지도의 중요성은 Dewey, Freudenthal, Herbart, Kant, Pestalozzi, Piaget 등을 통해 익히 알려졌을 뿐만 아니라(유충현, 2011), 국내의 여러 연구(강홍규, 1997; 안지영, 전영주, 윤마병, 이종학, 2014 등)를 통해서도 확인된 바 있다.

한편, 산술 지도 자체에 집중한 연구와 더불어 산술에서 대수로의 이행에 관한 다수의 연구(Herscovics & Linchevski, 1994; Warren, 2003; 김성준, 2002 ; 방정숙, 최지영, 2011; 이화영, 2011 등)도 있어왔다. 이에 관한 연구는 크게, 산술과 대수는 분명한 차이가 있다는 전 대수적 접근 방법(pre-algebra approach)과 산술과 대수가 차이가 있기는 하나 완전히 구분될 수 있는 것은 아니기 때문에 수학 학습 초기 단계부터 대수적 사고를 개발시키기 위한 지도가 필요하다는 초기 대수적 접근 방법(early-algebra approach)의 관점으로 구분된다(방정숙, 최지영, 2011). 그러나 전 대수적 접근과는 다른 관점에서 산술과 대수의 연결을 논하는 초기 대수적 접근이라 할지라도, 다수의 연구에서 양자 간에는 인지적 간격이 존재함을 주장하고 있다. 예컨대 이화영(2011)은 후자의 관점에서 산술적 사고와 대수적 사고 간

* 서울교육대학교 교육전문대학원, ssbin22@sen.go.kr (제1 저자)
** 서울교육대학교, hwchang@snue.ac.kr (교신저자)

에는 간격이 존재하기 때문에 학교수학에서 양자 간의 간격을 좁히기 위한 연구가 필요하다고 하였다. 또한 Herscovics & Linchevski(1994), Warren(2003), 김남희(1994) 등에서 산술과 대수 간에는 '인지적 격차(cognitive gap)', '교수학적 단절(didactic cut)'과 같은 성격의 것이 존재한다고 주장하고 있다. 김성준(2002) 또한 Vygotsky의 견해에 기초하여 산술에서 대수로의 이행 측면뿐만 아니라 대수가 산술과는 다른 차원의 수학이라는 의미에서 단절의 측면도 고려될 수 있다고 하였다. 즉 산술과 대수는 분명한 관련성을 지니고 있고 산술과 대수의 포함관계는 산술이 대수를 함의하고 있으며 대수는 산술을 가정하고 있다고 할 수 있으나, 한편으로는 그 인식론적 간격이 너무 크기 때문에 이행이 아닌 단절로 해석할 가능성을 지닌다는 것이다. 이러한 선행 연구들에 기초할 때, 산술과 대수 사이에는 분명히 인지적 간극이 존재함을 알 수 있다.

이처럼 산술이 대수로 이행되는 과정의 어느 지점인가에서 양자가 구분된다면, 다음과 같은 질문이 자연스럽게 제기된다. "대수의 기초이자 초등 수학의 핵심이라 하는 산술은 어떻게 지도되어야 하는가?" 국립국어원(2016)에 따르면, 산술(算術)은 '일상생활에서 실제로 응용할 수 있는, 수와 양의 간단한 성질 및 셈을 다루는 수학적 계산 방법'이라고 정의된다. 이는 보통의 일반인들에게 인식되어지는 산술의 의미일 것이며, 이로부터 산술은 방법적, 기능적 측면의 느낌을 제공한다는 것을 짐작할 수 있다. 이혜민, 신인선(2011)은 구체적인 수와 연산에 대해 수치적인 계산 과정에 초점을 두는 것을 산술이라고 정의하고 있다. Leontiev(2005)에 따르면 산술은 양에 있어서 매개적 연산이 제공되는 시점에서 시작된다. 그렇다면 이와 같이 수, 양, 연산을 대상으로 하는 산술은 어떻게 지도되어야 할까? 단순히 산술의 한자어 풀이 그대로 계산 방법 또는 계산 기능에만 초점을 맞추어 지도하는 것은 적절치 않다는 데에 많은 동의가 있어 왔다. 산술을 의미 있게 지도해야 한다는 주장은 최근에 제기된 이슈가 아니다. Brownell(1947)은 산술의 의미를 기본적인 수 개념의 이해, 기본 연산에 대한 이해, 산술에서의 원리, 관계, 일반화의 이해, 십진법 수 체계의 이해의 4가지로 범주화하여 제시하고, 산술이 양적 사고를 개발하는 방식으로 의미 있게 지도되어야 한다고 하였다. Buswell(1950)은 사용된 연산에 대한 이해 없이 반복 훈련으로 계산 기능을 기르는 데 중점을 두는 산술 지도를 비판하고, 산술이 의미 있게 가르쳐져야 한다고 하였다. 또한 교사는 학생들이 산술을 배울 때 동반되는 사고에 대해 연구해야 하며, 학생들의 사고 수준은 서로 다르기 때문에 그 수준에 적합한 지도가 이루어져야 한다고 주장하였다. 이러한 생각은 약 70년의 세월이 지난 오늘날에도 많은 수학교육자들에 의해 지지받고 있는 견해이다. 이종학(2014)은 산술은 양 사이의 관계 분석, 구조 파악, 모델링, 문제 해결, 정당화, 반성과 같은 수학적인 사고를 계발하는 방식으로 지도되어야 한다고 주장하였다. Krysztofiak(2015), van Hiele(1986), Guberman(2008, 2014) 등 또한 산술에서 사고의 중요성을 주장하였고, 국내에서는 김남희(1994), 도종훈, 최영기(2003), 이화영(2011) 등이 산술적 사고를 언급하고 있어 이로부터 산술 지도 시 학생들의 사고 작용에 관심을 기울일 필요를 파악할 수 있다. 한편 Leontiev(2005)와 Guberman(2008, 2014)은 산술적 사고에서 나아가 산술적 사고의 발달 측면에 집중하고 그에 관한 연구를 수행하였다.

국내에서 산술 지도에 관한 연구는 다수 이루어졌으나 산술적 사고 자체에 주목한 연구는 찾아보기 어렵다. 수학교육에서 사고의 중요성이 강조되는 오늘날, 학생들이 산술에 대해 이해하기 위해서는 그와 관련된 사고, 즉 산술적 사고

가 수반되어야 한다(Guberman, 2014). 따라서 초등 수학의 많은 부분을 차지하는 산술 지도 시 산술에 대한 학생들의 풍부한 이해를 도모하기 위해서 산술적 사고의 관점에서 학교수학에서의 관련 사례를 집중 분석하는 것은 의미 있는 연구라고 할 수 있다. Guberman(2014)에 따르면 산술적 사고는 수에 대한 기초적인 이해부터 논리적 관계 인식 및 형식적 증명에 이르기까지 사고 요소의 스펙트럼이 광범위하기 때문에, 학생별로 발달 정도에 따라 서로 다른 사고 수준에 위치할 것이 예상된다. 따라서 산술적 사고 발달의 관점에서 학생의 이해를 파악할 필요가 있다. 이에 본 연구는 산술적 사고 수준에 관한 Guberman(2008, 2014)의 연구에 기초하여 타 영역 및 타 교과에서는 매우 우수한 성취를 보이지만 유독 수와 연산 영역만을 어려워하고 기피하는 특별한 한 학생 사례의 원인을 산술적 사고 발달의 관점에서 분석하고 처방 방안을 모색하고자 한다.

II. 산술적 사고 수준

본 연구는 산술적 사고 발달의 관점을 취하였으므로 사고의 발달 수준에 대한 연구로 van Hiele(1986)과 Guberman(2008, 2014)을 살펴보고자 한다.

van Hiele(1986)은 상이한 언어와 구조 등을 특징으로 다른 수준에 있는 사고 간의 차이를 설명하였고, 생물학적 성숙이 아닌 적절한 교수·학습을 통해 상위 수준의 사고로 발달할 수 있다고 하였다. 이때, 언어는 구조를 파악하기 위한 중요한 매개체이고 구조는 사고와 밀접한 관련이 있기 때문에 수준의 발달은 언어의 발달과 병행한다고 주장하였다[1]. 따라서 학습자의 사고는 그들이 주장에 대해 설명하거나 논하는 것을 통해 확인이 가능하다. van Hiele은 이와 같은 사고 수준이 단지 기하에만 국한되는 것이 아니며 학교에서 가르쳐지는 어떠한 수학 영역에도 적용될 수 있고, 산술에서도 이러한 사고 수준을 확인할 수 있다고 하였다. 예컨대, 2개의 물체와 1개의 물체를 함께 모아 놓은 다음, 그것을 세어서 3개의 물체가 있다고 말하면 1수준에 해당하며, “2와 1을 더하면 3이다.”는 2수준, “두 정수의 합은 정수이다.”는 3수준에 속한다고 하였다. 즉, 3수준은 2수준의 구조를, 2수준은 1수준의 구조를 취급하게 된다. 교사가 학생의 사고 수준에 대한 지식을 지니면, 가르치고자 하는 내용을 어디에서부터 시작해야 할지 찾을 수 있고 학생들이 미달성한 수준에 있는 개념을 이용하여 지도하는 위험을 피할 수 있다.

Guberman(2008, 2014)은 산술적 사고에 초점을 둔 산술 교육의 가치에 집중하고 van Hiele의 수준 이론에 기초하여 산술적 사고를 1~5수준으로 구분하였다. 이때 van Hiele이 학교수학에서는 기하적 사고의 0~4수준을 취급한 것을 토대로[2], 산술적 사고 수준도 그 중 수학교육적으로 유의미한 1~4수준과 각 수준별 특징을 제시하였다[3].

구체적으로 Guberman(2008, 2014)은 van Hiele의 기하적 사고 수준에 따라 산술적 사고 수준을 대응시키는 사전 작업을 실시한 후, 이러한 사고 수준을 검사할 수 있는 문항 20개를 구안하여 검사 도구를 제작하였다. 검사 도구의 문항은 산술

1) van Hiele(1986)의 언어와 구조, 사고와의 관계에 대한 주장은 그 양이 방대하고 본 연구의 핵심이 아니기 때문에, 본고에서는 이에 대해 자세한 논의는 다루지 않을 것이다.

2) van Hiele(1986)은 4수준보다 상위 수준의 존재 여부는 단지 이론적 가치만 있을 뿐이라고 주장하였다.

3) Guberman이 최종적으로 산술적 사고를 1~4수준으로 제시한 것은, 2008년, 2014년 두 연구에서 교육 대학 학생들의 산술적 사고 수준을 검사한 결과, 성인들을 대상으로 검사를 실시하였음에도 불구하고 5수준을 보인 연구 참여자가 단 한 명도 없었음에 근거한다.

적 사고의 4가지 수준을 변별할 수 있도록 구성되었다. 이어서 Usiskin(1982)에 따라 선다형 문항으로 구성한 뒤, 초등학교에서 수학을 지도하고 있는 6명의 대학원생을 대상으로 예비 검사를 실시하였다. 그 결과를 통해 문항을 수정·보완하였으며, 이때 학생들에게 해결 방법에 대해 설명하라는 요구를 추가함으로써 이후 산술적 사고를 수준별로 재범주화하는 데 그 기술 결과를 활용하였다. Guberman은 예비 검사, 전문가 검토, Guttman Scale Analysis를 통해 검사 도구의 타당도를 검증하였다. Guberman(2008)에서는 190명, Guberman(2014)에서는 96명의 이스라엘 교육 대학 학생들을 대상으로 검사를 실시한 후[4)], 그 결과를 양적・질적으로 분석하여 <표 II-1>과 같이 산술적 사고의 수준별 특징을 최종 정리하였다.

III장에서의 검사 도구 2의 구성을 위하여 Guberman(2014)이 제시한 이와 같은 수준별 특징을 토대로 산술적 사고의 요소를 추출하고 이를 수, 연산 관련 요소로 범주화하여 정리하면 <표 II-2>와 같다. Guberman(2008, 2014)은 산술적 사고의 요소에 대해 별도로 제시하고 있지는 않으나, 4가지 수준별 특징으로부터 도출된 각 요소들은 산술적 사고의 요소로 간주될 수 있다.

이러한 선행 연구 분석 결과는 학생별로 산술적 사고 수준의 발달에 차이가 있음을 시사한다. 이에 수와 연산 학습에서 어려움을 보이는 학생의 경우, 낮은 산술적 사고 수준이 그 부진의 주요 원인일 수 있음을 추측할 수 있다. 이는 수와 연산 영역에서 부진을 경험하는 학생에 대한 산술적 사고 수준의 관점에서의 분석을 필요로 한다.

<표 II-1> Guberman(2014)의 산술적 사고 수준별 특징

수준	각 사고 수준에 해당하는 학생(예비 교사)들이 보인 특징
1수준: 행동 수준	· 다양한 수를 (식별 수준에서) 잘 알고 있으며 그 수들에 대한 연산을 수행할 수 있다. · 수와 산술 연산의 성질에 대해서는 아직 잘 알지 못한다. · 비효율적인 계산의 특징을 보이며, 대체적으로 계산 능력이 낮다. · 언어 수준은 미흡하며, 그들의 언어는 유창성, 논리 정연함과 거리가 멀다. · 산술의 도구적 이해에 의존한다.
2수준: 설명 수준	· 다양한 유형의 수(십진수, 유리수 체계 등)를 쓰는 방법을 학습하는 단계에 있다. · 수가 주어졌을 때, 같은 그룹과 다른 그룹의 수들을 비교할 수 있다. · 수와 산술 연산의 성질을 이해하지만, 다양한 연산과 성질들 사이를 연결하지 못한다. · 개별 사례 또는 '예제'의 수행에 의해 그들의 주장을 설명할 수 있다. · 수행 능력과 생각을 언어로 표현하는 것 사이에 분명한 간격이 존재한다. · 산술 용어의 사용이 부분적이고 미흡하다. · 부분적으로 일반화가 가능하다.
3수준: 비형식적 산술 수준	· 연산의 성질과 수의 성질 간의 연결이 직접적으로 요구될 때 이를 연결할 수 있다. · 일반적 사례, 부분적인 대수 도구를 사용하여 비형식적 추론을 하고 그것들을 보조할 수 있다. · 연역적 추론을 따르는 것이 가능하며 그러한 주장의 일부를 보이기도 한다. 그러나 그러한 추론은 여전히 산술 연산 간의 관계를 보조하지는 못한다.
4수준: 형식적 산술 수준	· 수학적인 결론을 뒷받침하기 위한 논리의 필요를 이해한다. · 산술적 주장을 분석하고, 무엇이 주어졌으며 수의 어떤 범위에서 이 주장이 타당한지 확인할 수 있다. · 주어진 자료 간의 논리적 관계를 인식하고 대략의 형식적 증명을 제시할 수 있다(종종 이 유형의 증명은 일반적 사례에 의존하여 통합되거나 증명 그 자체로는 미완성이다). · 수학적 이론 형성에 있어서 핵심 개념(주장, 정리, 증명 등)을 사용하기 시작한다. 그러나 학습자들은 이러한 개념의 의미를 전체적으로 명백히 이해하지는 못한다.

4) Guberman(2008, 2014)은 교육 대학 학생들을 대상으로 검사를 실시하였으나 이 검사 도구는 특정 연령이나 학교급만을 대상으로 개발된 것이 아니며 초등학교 교육과정과 관련된 문제로 구성하였기 때문에, 이를 통해 기초적인 산술 교육을 완료한 초등학교 6학년 학생에게의 적용 가능성을 파악할 수 있다.

<표 II-2> Guberman(2014)으로부터 도출된 산술적 사고 요소

수 관련 요소	연산 관련 요소
· 다양한 수(십진수, 유리수 등) 인식 및 표현 · 수 비교(같은 그룹과 다른 그룹의 수 비교 포함) · 수의 성질 이해	· 산술 연산의 수행 방법 / (효과적인) 계산 수행(계산 능력) · 연산의 성질 이해 · 연산과 성질 간의 연결 · 연산의 성질과 수의 성질 간의 연결 · 연산의 다양한 성질 간의 연결 · 연산 간의 상호성(관계) 이해 · 계산에 대한 설명 / 수학적 언어 표현 / 산술 용어 사용 · 산술에 대한 이해(도구적 이해 / 관계적 이해) · 특정 사례를 통한 주장 설명 · 일반화 · 산술 추론(비형식적 추론) · 논리 이해 / 자료 간의 논리적 관계 인식 · 산술적 주장 분석, 타당성 확인 · 형식적 증명 · 수학적 이론에 대한 핵심 개념(주장, 정의, 증명 등)의 사용

III. 연구 방법

본 연구는 질적 사례 연구 방법을 택하였다. 사례 연구는 한 가지 상황이나 특정 사건, 한 명의 연구 참여자 등에 대해 상세하게 조사하는 연구를 말한다(Merriam, 1988). 사례 연구에서 사례란 연구하고자 하는 일정한 현상을 대표하는 하나의 예이고, 사례 연구는 사례에 집중함으로써 연구하려는 현상의 특징을 보여줄 수 있는 중요한 요소들 사이의 상호작용을 밝히면서 사례가 속해있는 부류의 특징적 현상을 파악해내는 연구라고 할 수 있다. 사례 연구에서 사례의 선정은 연구 목적에 따라 다양한 방법이 모두 가능하고, 사례는 하나의 통합된 체계로 경계 지을 수 있는 한 가지 일, 하나의 요소, 하나의 단위로서, 집단뿐만 아니라 한 학생이나 교사 등의 개인일 수도 있다(우정호, 정영옥, 박경미, 이경화, 2006). 따라서 본 연구에서는 수와 연산 영역을 기피하고 부진을 보이는 한 학생을 대상으로 하여 사고 수준을 파악하고 더불어 이해가 부족한 산술 개념을 진단하여 처방 방안을 모색하는 것을 주요 내용으로 한다.

1. 연구 대상

본 사례 연구의 대상은 수학의 타 영역 및 전 교과에서 높은 성취도를 보이는 반면, 유독 수와 연산 영역에서 학습 곤란 및 불안을 보이고 이에 따라 성취도가 낮은 초등학교 6학년 학생(이하 ’S’라고 칭함)이다. S는 서울시 소재의 A 초등학교에 재학 중이다. 수와 연산에 대한 기본적인 지도가 완료된 시기라고 할 수 있는 6학년이고 타 교과, 특히 언어와 예술 관련에서 매우 뛰어난 재능을 보임에도 불구하고, 수와 연산 영역에서만 부진을 겪고 있는 특별한 사례이기 때문에 본 사례 연구의 대상자로 선정하였다.

S의 기초적인 배경 파악을 위한 면담 결과, S는 수학에 흥미는 없지만 그 필요성을 인지하고 있었다. S는 수학의 부족한 부분을 보충하기 위하여 현재 개인 과외 지도를 받고 있지만 본인이 원하는 바는 아니라고 하였다. S에 대한 심도 있는 정보를 파악하기 위해 S의 학부모와도 면담을 실시하였다. 학부모는 선행 학습을 많이 한

아이들도 못 푸는 문제를 S가 직관적으로 맞히는 것을 보면 지능이 우수한 것으로 보임에도 불구하고, 수학을 싫어하며 수만 보면 머리가 뱅글뱅글 돈다거나 머릿속이 뒤섞이는 것 같다고 말한다고 하였다. 또한 수학의 부족한 부분에 대해서 극복하려 하기 보다는 어떻게든 피하고 싶어 하며 자신이 수학에서 부족한 부분이 있다는 것이 알려지는 것을 매우 싫어한다고 하였다.

S의 산술적 사고 수준 및 이해가 부족한 산술 개념을 분석하기에 앞서, S의 수학 학습에 대한 정의적 영역 관련 검사를 실시하였다. 수학 학습 부진의 원인을 인지적 측면뿐만 아니라 정의적 측면에서 찾는 다수의 연구(Reys, 1984; 강완 외, 2014; 김선희, 김부미, 이종희, 2014; 이형주, 고호경, 2015 등)가 있어 왔고, 따라서 S의 수와 연산 학습 부진에 정의적 요인이 영향을 미치고 있지는 않은지를 파악하기 위함이다. 정의적 영역 검사 도구로서 '수학클리닉 진단검사지(한국과학창의재단, 2015)'를 활용하였다. 이 검사지는 초등학교 5, 6학년 학생을 대상으로 수학 학습 심리, 수학 학습 방법, 수학 학습 개인적 성향의 정의적 요소를 측정할 수 있도록 개발된 표준화 검사 도구이며, 검사 실시 후 검사지에 포함된 가이드라인에 따라 각 요인별로 점수를 산출하여 등급을 파악하였다. 검사 결과는 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> S의 수학클리닉 진단검사 결과

구성	요인	결과
수학학습심리	수학학습능력 자신감	58.3 (중위)
	수학불안	60.7 (중위)
	수학학습 태도	64.3 (중위)
수학학습방법	수학학습 자기관리	65.6 (중위)
	수학학습 전략	86.4 (상위)
수학학습 개인적 성향	학습내용 정리	강한 성향
	학습관리 방법	강한 성향
	학습 동기	중간 성향
	직관적 접근성	강한 성향

S는 수학 학습 능력 자신감, 수학 불안, 수학 학습 태도, 수학 학습 자기관리에서 보통 수준인 중위 등급으로 분석되었으며, 수학 학습 전략은 높은 수준인 상위 등급으로 나타났다. 수학 학습 성향에 있어서도 학습 내용 정리, 학습 관리 방법, 직관적 접근성이 강한 성향으로 판별되었고 수학 학습 동기도 중간 성향을 보이고 있었다. 결과적으로, S는 어떠한 요인에서도 하위 등급으로 판별되지 않았고, 이는 정의적 요인이 S의 학습 부진에 주요 영향을 미치는 것은 아님을 함의한다.

2. 검사 도구 및 분석 방법

S의 산술적 사고 수준과 이해가 부족한 산술 개념을 파악하기 위하여 2가지 검사 도구를 적용하였고, 각 도구의 내용 및 분석 방법은 다음과 같다. 첫째는 앞서 II장에서 언급한 Guberman (2014)이 산술적 사고 수준을 파악하기 위해 개발한 20문항의 설문지(검사 도구 1)이다. 이는 여러 방법으로 타당도와 신뢰도 검증을 받은 표준화 도구이기에 본 연구의 검사 도구로 채택하였다. Guberman은 문항 구성 시 이스라엘의 초등학교 교육과정에서 다루고 있는 주제만을 포함하였는데, 이는 그 주제에 대한 지식 부족이 산술적 사고의 수준 판별에 영향을 미치는 것을 방지하기 위함이었다. 예컨대, 비율 개념에 대한 문항을 제시할 수도 있으나 이스라엘 초등학교에서는 비율이 충분히 지도되고 있지 않기 때문에 이를 포함할 경우 비율에 대한 단순 지식 부족이 오답의 원인이 될 수 있다는 것이다. 본 연구 역시 Guberman(2014)의 설문지를 번역한 뒤, 초등 수학교육 전문가 2인과 박사학위과정 2인의 검토를 통해 이 설문지가 우리나라 초등학교 교육과정에 비추어 적절한지를 확인하여 수정·보완하였다. 총 20문항 중 1~5번은 1수준, 6~10

<표 III-2> 검사 도구 1의 문항 및 수준

<table>
<tr><td colspan="2">문항 번호</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr>
<tr><td rowspan="4">수준 판별</td><td>1수준</td><td colspan="5">4개 이상 정답</td><td colspan="5"></td><td colspan="5"></td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>2수준</td><td colspan="5">5개 모두 정답</td><td colspan="5">4개 이상 정답</td><td colspan="5"></td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>3수준</td><td colspan="5">5개 모두 정답</td><td colspan="5">5개 모두 정답</td><td colspan="5">4개 이상 정답</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>4수준</td><td colspan="5">5개 모두 정답</td><td colspan="5">5개 모두 정답</td><td colspan="5">5개 모두 정답</td><td colspan="5">4개 이상 정답</td></tr>
</table>

번은 2수준, 11~15번은 3수준, 16~20번은 4수준에 해당하는 내용으로 구성되며, 각 수준별 5개 문항 중 최소 4개를 옳게 응답하고 이전 수준의 문항을 모두 옳게 해결한 학생은 그 수준에 해당한다고 판단한다(<표 III-2>). 본 연구에서도 이와 같은 판정 기준을 적용하였고, 아울러 S가 해결 방법에 대해 진술한 설명에 기초하여 S의 산술적 사고의 특징을 분석하였다.

검사 도구 1은 S가 산술적 사고 발달의 어느 수준에 있는지, 또 그 수준에 대한 일반적 특징을 파악케 한다. 그러나 본 연구는 산술적 사고 수준의 판별뿐만 아니라 구체적으로 S에게 부족한 이해 요소를 진단하고 그에 대한 처방 방안의 모색을 목적으로 하기 때문에, S가 어려움을 경험하고 있는 산술 개념을 파악할 필요에 따라 이에 기초한 둘째 검사 도구(검사 도구 2)를 마련하였다. 검사 도구 2는 Guberman(2014)의 산술적 사고 요소(<표 II-2>)를 기반으로, 권미선(2015)에서 문헌 분석을 통해 제시한 범자연수와 사칙연산의 핵심 학습 요소, 우리나라 초등학교 수학과 교육과정과 그에 따른 수학 교과서를 고려하여 문항을 구성하였다. 이때 연구 대상이 6학년이라는 점을 반영하여 수 쓰고 읽기, 수 구구 사용하기 등과 같이 기초적인 수준의 문항은 제외하였다. 또한 수 개념 이해에 관한 문항은 자연수, 분수, 소수를 모두 다루되, 연산에 있어서는 자연수보다 분수, 소수를 주 대상으로 하였다. 아울러 선행 연구 결과에 기초하여 학생들이 0 처리 관련 어려움을 보이는 '피감수에 0이 포함된 뺄셈, 승수나 피승수에 0이 포함된 곱셈, 몫의 중간에 0이 포함되는 나눗셈, 0÷수(장혜원, 최민아, 임미인, 2014)'와 Berman(2011)의 자릿값 이해 검사 도구인 SToPV(the Six Tasks of Place Value) 과제 중에서 학생들이 가장 큰 어려움을 보였던 '비전형적인 묶어 세기(장혜원, 임미인, 강태석, 2015)'를 포함시켜 이에 관한 S의 이해 또한 파악하고자 하였다. 일부 문항은 몇 개의 하위 문제를 포함하며, 구체적인 문항 내용은 <표 III-3>과 같다[5].

검사 도구 2는 검사 도구 1과 같은 표준화 검사 도구의 성격을 취하지는 않으나, S에게 부족한 구체적인 산술 개념 요소를 파악케 하며, 아울러 산술적 사고 요소를 기반으로 구성하였기 때문에 그 결과를 산술적 사고 수준과 연결 지어 분석 가능하다는 이점이 있다. 즉, 검사 도구 2에서 S가 보이는 산술적 사고의 특징이 검사 도구 1에서 판별된 사고 수준의 특징과 일치하는지 비교함으로써 보다 정확한 검사 결과를 도출할 수 있다.

본 검사는 S의 인지적 부담을 고려하여 1주 간격으로 2회에 걸쳐 각각 약 2시간씩 개별 면담을 통해 이루어졌다. 김용태(2016)는 면담은 학생의 사고 과정과 학생들이 사용하는 전략들, 수학적 능력 등을 알아볼 수 있는 좋은 기회를 제공하기 때문에 학생의 인식론적 장애를 진단하는 평가에 있어서 핵심이 된다고 하였다. 따라서

5) 지면의 제약 상 검사 도구 1, 2의 전체 문항을 본고에 제시하지 못하였음을 밝힌다. 다만, IV장에서 결과 분석 시 일부 문항을 제시하여 이해를 돕고자 하였다.

<표 III-3> 검사 도구 2의 문항 구성

문항	관련 요소	문항 내용
1	수	· 수 세기 · 수 표현하기 · 위치적 기수법 및 자릿값 이해하기
2		· 수(자연수, 분수, 소수)의 크기 비교하기(+세 수) · 소수의 크기 비교하는 방법 알기
3		· 수(자연수)의 계열 이해하기
4	연산 (덧셈, 뺄셈)	· 등호(=) 이해하기
5		· (분수, 소수의) 덧셈과 뺄셈 능숙하게 계산하기
6		· 연산의 성질(덧셈의 교환법칙, 결합법칙) 이해하기
7		· 연산(덧셈과 뺄셈) 간의 관계 이해하기
8		· 다양한 계산 방법 찾기
9		· □가 사용된 덧셈식, 뺄셈식을 쓰고, □의 값 구하기(문장제)
10	연산 (곱셈, 나눗셈)	· (분수, 소수의) 곱셈과 나눗셈, 0÷자연수 능숙하게 계산하기
11		· 연산과 수의 성질 연결하기 · 소수의 곱셈의 계산 원리 이해하고 계산 방법 형식화하기 · 소수의 곱셈의 연산 결과 이해하기
12		· 연산의 성질(곱셈의 교환법칙, 결합법칙) 이해하기
13		· 연산(곱셈과 나눗셈) 간의 관계 이해하기
14		· 곱셈, 나눗셈 결과 어림하기 · 가상 곱, 몫 세우기 · 계산 결과 점검하기
15		· □가 사용된 곱셈식, 나눗셈식을 쓰고, □의 값 구하기(문장제) · 미지수 활용하기
16	연산	· 혼합 계산하기

서 면담을 통해 S가 검사에 참여하는 과정 전반을 관찰한 후 일부 문항에 대해서는 왜 그렇게 해결하였는지 추가 질문을 하고 이를 녹음하여 분석함으로써 S의 산술적 사고의 수준과 특징 및 이해가 부족한 산술 개념을 심층적으로 파악하였다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 산술적 사고 수준 분석 결과

가. 검사 도구 1에 따른 분석 결과

S의 검사 도구 1에 대한 결과는 <표 IV-1>과 같다. 1수준에 해당하는 5개 문항 중 4개를 옳게 답한 반면, 그 이상의 수준에서는 판정 조건을 충족하지 못하여 1수준으로 판명되었다.

또한 풀이 과정 분석 및 면담 결과에서도 S는 <표 II-1>에서 제시한 산술적 사고의 1수준에 해당하는 다음과 같은 특징을 보였다.

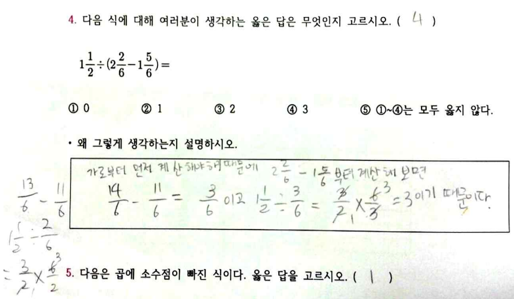
- 다양한 수를 잘 알고 있으며 그 수들에 대한 연산을 수행할 수 있다.
- 연산의 성질에 대해서는 아직 잘 알지 못한다.
- 비효율적인 계산의 특징을 보이며, 대체적으로 계산 능력이 낮다.
- 풀이 방법이나 그렇게 생각한 이유를 이야

<표 IV-1> S의 검사 도구 1 문항별 응답 결과

문항	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
정답 여부	○	○	○	○	×	○	○	×	×	×	○	○	○	×	×	○	○	×	×	×
수준	1수준					2수준					3수준					4수준				

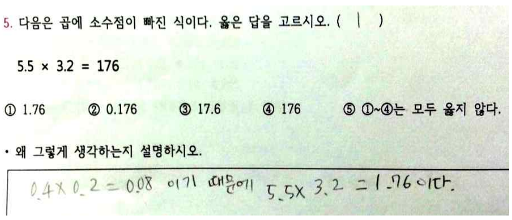
기할 때 유창성, 논리 정연함이 부족하다.

예컨대, 4번 문항과 관련하여 [그림 IV-1]에서 볼 수 있듯이 S는 분수의 뺄셈이나 곱셈, 나눗셈과 같은 연산을 수행할 수는 있으나, 종이의 빈 공간을 활용하여 일차적으로 문제를 해결하는 과정에서 $2\frac{2}{6}$를 $\frac{13}{6}$이라고 바꾸어 문제를 해결하다가 해당하는 답안이 없자 다시 계산한다거나 $\frac{3}{6}$을 약분하지 않은 채 분수의 나눗셈을 하는 등 다소 비효율적이고 낮은 수준의 계산 수행 과정을 보였다. 게다가 계산 수행 시간도 3분 이상 소요되어 계산 수행이 능숙하지 않음을 보였다.



[그림 IV-1] S가 보인 1수준 특징 사례(4번)

또 S는 5번 문항에서 $5.5\times3.2=176$에서 소수점을 옳게 찍으면 1.76이고, 그렇게 생각한 이유는 '$0.4\times0.2=0.08$이기 때문에 $5.5\times3.2=1.76$이다.'라고 하였다. 이로부터 S가 연산에 대한 충분한 이해나 수 감각에 기초하지 못한 채 기계적으로 풀이 방법을 암기하여 계산함으로써 낮은 계산 능력과 오류를 보임을 파악하였다([그림 IV-2]).

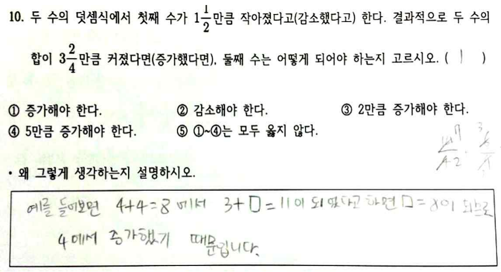


[그림 IV-2] S가 보인 1수준 특징 사례(5번)

한편, S는 몇몇 진술에서 2수준의 특징 중 일부를 보이기도 함으로써 S가 1수준에서 2수준으로의 이행기에 놓여 있는 것으로 추측케 하였다. S가 보였던 특징 중 부분적으로 산술적 사고의 2수준에 해당하는 특징은 다음과 같다.

- 같은 그룹 내 수들을 능숙하게 비교할 수 있다.
- 개별 사례를 사용하여 자신의 주장을 설명하려고 시도한다.
- 산술 용어를 사용하나 부분적이고 미흡하다.

이 중 S가 보였던 가장 주목할 만한 특징 중 하나는 사례를 들어 자신의 주장을 설명하려 한다는 점이다. S는 여러 사례를 제시하기 보다는 개별 사례를 통해 정당화하고 문제를 해결하려는 일관된 특징을 보였고, 이로 인하여 여러 오류를 야기하기도 하였다([그림 IV-3]).



10. 두 수의 덧셈식에서 첫째 수가 $1\frac{1}{2}$만큼 작아졌다고(감소했다고) 한다. 결과적으로 두 수의 합이 $3\frac{2}{4}$만큼 커졌다면(증가했다면), 둘째 수는 어떻게 되어야 하는지 고르시오. (1)

① 증가해야 한다. ② 감소해야 한다. ③ 2만큼 증가해야 한다.
④ 5만큼 증가해야 한다. ⑤ ①~④는 모두 옳지 않다.

• 왜 그렇게 생각하는지 설명하시오.

예를 들어보면 4+4=8 에서 3+□=11이 되었다고 하면 □=8이 되므로 4에서 증가했기 때문입니다.

[그림 IV-3] S가 보인 2수준 특징 사례

이와 같이 S는 부분적으로 2수준에 해당하는 특징을 보였으나, van Hiele(1986), Guberman (2014)의 산술적 사고 수준의 불연속성에 근거하여 최종적으로 1수준에 해당하는 것으로 분석되었다.

나. 검사 도구 2에 따른 분석 결과

검사 도구 2의 결과에 기초하여 S가 보인 산술적 사고의 특징을 추가적으로 분석하였다(<표 IV-2>).

검사 도구 2의 결과에서도 S는 Guberman(2014)의 산술적 사고의 1수준에 해당하는 모든 특징과 2수준 중 일부 특징을 보였다. 먼저 1수준과 관련하여, S는 자연수, 분수, 소수에 대해 이해하고 있으며 그 수들에 대한 기본적인 사칙 연산을 수행할 수 있었다. 그러나 덧셈의 교환법칙과 결합법칙, 곱셈의 교환법칙과 결합법칙과 같은 연산의 성질에 대해 알지 못하였고, 연구자가 검사 완료 후 추가 지도하였음에도 불구하고 결합법칙을 끝내 발견하지 못하였다.

S는 분수와 소수의 사칙 연산 전반에서 계산 시간이 오래 소요되고 비효율적인 계산의 특징과 낮은 계산 능력을 보였다. 예컨대, 소수의 덧셈, 뺄셈 대부분을 세로셈에 의존하여 계산하거나 $3.68+0.4$와 $0.4+3.68$을 교환법칙을 이용하지 못하고 각각 계산하여 구하는 점 등은 비효율적인 계산의 특징을 보여준다. 또한 간단하고 기초적인 수준의 분수의 덧셈, 소수의 뺄셈에서 실수를 범하여 추후 연구자의 지도에 따라 수정하거나, 계산 과정 중 가분수를 대분수로 고칠 때(예, $\frac{83}{12}$, $\frac{71}{28}$) 일일이 12×7이나 28×3, 28×2 등을 세로셈으로 계산하여 그 결과를 확인한 뒤 대분수로 고침으로써 (몇십 몇)×(몇)의

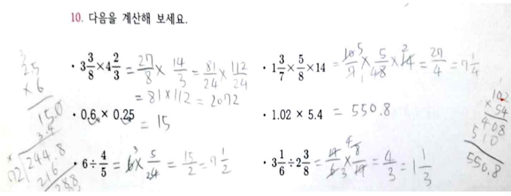
<표 IV-2> 검사 도구 2에서 S의 산술적 사고 특징 분석 결과

수준	각 사고 수준별 특징	S의 결과
1수준: 행동 수준	· 다양한 수를 잘 알고 있으며 그 수들에 대한 연산을 수행할 수 있다.	○
	· 수와 산술 연산의 성질에 대해서는 아직 잘 알지 못한다.	○
	· 비효율적인 계산의 특징을 보이며, 대체적으로 계산 능력이 낮다.	○
	· 언어 수준, 유창성, 논리 정연함이 미흡하다.	○
	· 산술의 도구적 이해에 의존한다.	○
2수준: 설명 수준	· 다양한 유형의 수(십진수, 유리수 등)를 쓰는 방법을 학습하는 단계에 있다.	×
	· 수가 주어졌을 때, 같은 그룹과 다른 그룹의 수들을 비교할 수 있다.	△
	· 수와 산술 연산의 성질을 이해하지만, 다양한 연산과 성질들 사이를 연결하지 못한다.	×
	· 개별 사례 또는 '예제'의 수행에 근거하여 주장을 설명할 수 있다.	△
	· 수행 능력과 생각을 언어로 표현하는 것 사이에 분명한 간격이 존재한다.	×
	· 산술 용어의 사용이 부분적이고 미흡하다.	○
	· 부분적으로 일반화가 가능하다.	×

[○: 드러남, ×: 드러나지 않음, △: 일부만 드러남]

머리셈이 미흡함을 보였다. 또 [그림 IV-4]와 같이 분수의 곱셈, 소수의 곱셈에서 오류를 보여 분수와 소수의 사칙 연산 전반에 대한 충분한 이해를 토대로 계산하는 것이 아님이 드러났다. 예를 들어, S는 $3\frac{3}{8}\times 4\frac{2}{3}$을 $\frac{27}{8}\times\frac{14}{3}=\frac{81}{24}\times\frac{112}{24}=81\times 112=2072$라고 계산하였고, 그 과정에서 112×81을 세로셈으로 계산하면서 오류를 보이기도 하였다. 다음 문제를 해결하면서 분수의 곱셈 방법이 기억났다고 하면서 옳게 계산하기 시작하였으나, 여전히 이 문제는 오류를 인식하지 못하고 수정하지 않은 채 지나갔다. 이어서 세 수의 곱셈 시 $1\frac{3}{7}\times\frac{5}{8}\times 14$를 $\frac{10}{7}\times\frac{5}{8}\times 14$로 쓰고 약분하여 계산하였으나, 분자의 5×5×2를 27로 잘못 암산하고 이를 대분수로 고치는 과정에서 또 다시 오류를 보였으며, 결과적으로 곱을 $\frac{27}{4}=7\frac{1}{4}$이라고 썼다.

또한 소수의 곱셈에서 소수점 처리의 원리와 방법을 이해하지 못하고 소수의 나눗셈에서의 소수점 처리와 혼동하는 행동 특성을 보였다. 예를 들어, 0.6×0.25에서 0.6과 0.25의 소수점을 둘 다 오른쪽으로 한 칸씩 옮겨서 2.5×6을 세로셈으로 계산하여 15를 구하였으며, 연구자가 왜 소수점을 그렇게 옮겼는지 물으니 둘 다 똑같이 한 칸씩 옮기는 거라고 대답하였다. 1.02×5.4도 둘 다 소수점을 한 칸씩 옮겨서 10.2×54를 세로셈으로 계산하여 550.8을 구하였다. 이와 같은 오개념은 S의 기본적인 수 감각 부족에 기인한 것으로 보여 진다. 마찬가지로 11번 문항에서 $157\times 32=5024$가 주어진 상태에서 $157\times 0.032=5024000$, $157\times 3.2=50240$, $157\times 0.32=502400$이라고 답한 것은 S가 같은 수가 반복됨을 인지하고 계산은 하지 않은 채 소수점만 이동하여 곱을 쓰고자 한 것으로 보이지만, 소수점의 개수만큼 0을 붙이는 잘못된 전략 사용은 수와 연산 개념의 오류를 보여준다.



[그림 IV-4] S가 보인 1수준 특징 사례

덧셈과 뺄셈 간의 관계를 이해하는지 확인하기 위한 문항에서 S는 소수의 덧셈과 뺄셈을 한 뒤, 덧셈식을 뺄셈식으로, 뺄셈식을 덧셈식으로 옳게 바꾸었다. 그러나 왜 그렇게 되는지에 대해서는 설명하지 못하였다. 다만 각각의 칸을 가리키며 식을 바꿀 때 큰 수를 쓰는 위치에 대해서만 언급함으로써, S는 단지 큰 수를 쓰는 위치를 외워서 이와 같은 유형의 문제를 해결하는 것으로 보였다. 이러한 도구적 이해는 이어지는 곱셈과 나눗셈 간의 관계를 묻는 문항에서도 동일하게 나타났다.

한편 S가 보인 부분적인 2수준의 특징은 같은 그룹 내 수들끼리, 즉 자연수끼리, 분수끼리, 소수끼리 능숙하게 크기를 비교할 수 있고, 대부분의 문제에서 1가지의 사례를 들어 주장을 설명하려고 시도하였으며, 미흡하기는 하나 산술 용어를 사용하여 풀이 과정 및 결과를 표현하였다는 점이다. 그러나 교환법칙, 결합법칙 등 연산의 성질을 이해하여 활용하지 못하였고, 주어진 연산을 조작적, 절차적으로 수행할 뿐 이를 일반화하려는 시도는 드러나지 않았다. 또한 계산 수행과 그에 대한 언어적 표현에 있어서 둘 다 낮은 능력을 지니고 있는 것으로 파악되었다. S가 언어적 재능이 뛰어나고 정의적 영역 검사에서 보통 수준의 자신감을 보였음(<표 III-1>)에도 불

구하고, 본 연구의 검사 수행 전반에서 자신의 풀이 방법이나 그렇게 생각한 이유에 대해 이야기할 때 논리성이 부족하고 낮은 자신감을 보인 점도 S가 산술적 사고의 1수준에 해당함을 뒷받침한다. 한편 S는 자연수, 분수, 소수를 쓰는 방법에 대해서는 거의 학습이 완료된 것으로 파악되었다.

2. 산술 개념 이해 분석 결과

개념은 사고의 단위라고 할 수 있고(우정호, 2011), 산술의 개념적 이해와 그에 기초한 사고 작용을 위해서는 산술에 관한 사실, 정의, 성질들 간의 풍부한 연결 지식이 필요하다(Hiebert & Lefevre, 1986; Guberman, 2014). 따라서 본 연구에서는 산술적 사고 수준의 판별 외에, 검사 도구 2를 통해 S에게 부족한 주요 산술 개념 요소를 분석할 수 있었다.

검사 도구 2의 결과 분석은 S가 자연수, 분수, 소수에 대해 기본적인 개념을 형성하고 있고 그에 관한 기초적인 연산을 수행할 수 있음을 보여준다. 그러나 연산과 관련된 일부 요소에서 산술적 사고의 장애물로 작용할 만한 미흡한 개념 이해를 보였다. 이하에서 크게 수, 연산 관련 요소에 따라 S에게 부족한 개념에 대한 구체적인 분석 결과를 제시하였다.

가. 수 관련 요소에 대한 개념 이해 분석 결과

S는 수 관련 요소에 있어서, 수 인식 및 세기, 수 표현하기, 위치적 기수법 및 자릿값, 수의 크기 비교, 수의 계열 등을 전반적으로 잘 이해하고 있는 것으로 분석되었다. 다만 SToPV(Berman, 2011)의 '비전형적인 묶어 세기'를 구현한 1번 문항인 바둑돌의 수(26개) 세기 과제에서 S가 시도한 수 세기 전략이 1씩 세기인 점은 효과적인 수 세기 전략의 미흡함을 보여준다.

나. 연산 관련 요소에 대한 개념 이해 분석 결과

검사 도구 2의 연산 관련 요소 중 S에게 미흡한 요소는 크게 계산 원리, 연산의 성질, 연산 간의 관계, 산술 용어, 계산 결과 어림에 대한 이해의 5가지이다. 각각에 대한 분석 결과를 정리하면 다음과 같다.

1) 계산 원리 이해

이전 장에서 밝힌 바와 같이 S는 분수와 소수의 사칙 연산 전반에 대해 그 계산 원리를 충분히 이해하지 못하는 것으로 드러났다. 그 밖에 0 처리 오류 문항(장혜원 외, 2014)으로서 의도적으로 포함시킨 0÷수, 승수나 피승수에 0이 있는 곱셈, 몫의 중간에 0이 포함되는 나눗셈에 대한 이해도 부족한 것으로 파악되었다. S는 $0 \div 7$에 대해 한참을 고민하다가 7이라고 기록하였다. 추후 연구자가 왜 7이냐고 묻자, 다시 고민하다가 $0 \times 7 = 0$이니까 $0 \div 7 = 0$이라고 수정함으로써 곱셈과 나눗셈의 관계에 대한 이해를 활용하는 양상을 보였다. 한편 몫의 중간에 0이 포함되는 나눗셈 중 $9.03 \div 3$은 옳게 구하였으나 $36.3 \div 6$은 세로셈으로 천천히 계산했음에도 불구하고 6.5라고 계산하는 오류를 범하여 후자의 유형에서 0처리 어려움을 지니는 것으로 파악되었다. 또한 $810.4 \div 101.3$을 계산할 때 몫이 8인지, 7인지를 5회 이상 번복하며 고민하였고, 이 과정에서 1013×8과 1013×7을 제대로 계산하지 못한 채 결과적으로 그냥 8인 것 같다고 말하며 8을 썼다. 이는 S가 피승수에 0이 있는 곱셈 시에도 0처리의 어려움을 지니고 있음을 보여 준다. 이러한 어려움은 곱셈 그 자체뿐만 아니라 주어진 나눗셈 문제 미해결의 주요 원인으로 작용하

였다. 이러한 결과들은 S가 전반적으로 0처리 오류 문항을 숙달하지 못하였을 뿐 아니라 그 원리를 충분히 이해하고 있지 못함을 파악케 한다.

2) 연산의 성질 이해

S는 연산의 기본적인 성질을 이해하지 못해 이를 적절히 활용하지 못하였다. 특히, 연구자가 덧셈, 곱셈에서의 교환법칙과 결합법칙에 대해 추후 지도하였음에도 불구하고 문항에 내재된 결합법칙은 발견하지 못하였다. 예컨대, 12번 문항은 곱셈의 교환법칙, 결합법칙의 이해와 관련된다. 교환법칙은 연구자가 검사 완료 후 추가지도를 실시하자 발견하고 이해하였으나, 결합법칙은 발견하지 못하고 $3\frac{1}{9}\times\frac{5}{28}\times36$과 $3\frac{1}{9}\times(\frac{5}{28}\times36)$ 두 식을 별개로 취급하였다. 후자의 경우 ( ) 안에 있는 $(\frac{5}{28}\times36)$을 따로 먼저 계산하여 $6\frac{3}{7}$을 구한 후 $3\frac{1}{9}\times6\frac{3}{7}=\frac{28}{9}\times\frac{45}{7}=20$을 계산하였다. 이때, 처음에는 $6\frac{3}{7}\times3\frac{1}{9}$이라고 썼다가 이를 지우고 두 수의 순서를 바꾸어 쓴 뒤 계산함으로써 곱셈의 교환법칙을 완벽히 이해하지 못했음을 파악하였다. 연구자가 두 수를 바꾸어 곱하면 안 되냐고 물으니, 될 것 같기도 하고 안 될 것 같기도 하다면서 기억이 나질 않는다고 답하였다.

3) 연산 간의 관계 이해

S는 연산 간의 상호성에 관해 도구적으로 이해하여 그 관계에 대해 명확히 설명하지 못하였다. 예컨대, 앞서 언급한 덧셈과 뺄셈의 관계뿐만 아니라, 곱셈과 나눗셈 간의 관계 이해를 파악하기 위한 13번 문항에서도 S는 소수의 곱셈식을 나눗셈식으로, 나눗셈식을 곱셈식으로 옳게 바꾸었다. 그러나 여기서도 단지 큰 수를 쓰는 위치에 대해서만 언급함으로써, 마치 큰 수를 쓰는 위치를 외워서 해결하는 것과 같은 양상을 보였다. 연구자가 추가적으로 만약 $4\times0.5=2$와 같이 곱이 승수나 피승수보다 작은 경우는 어떻게 나눗셈식으로 바꿀 것인지 물었으나 대답하지 못하여 이에 대해 관계적으로 이해하고 있지 않음을 보여주었다.

4) 산술 용어에 대한 이해

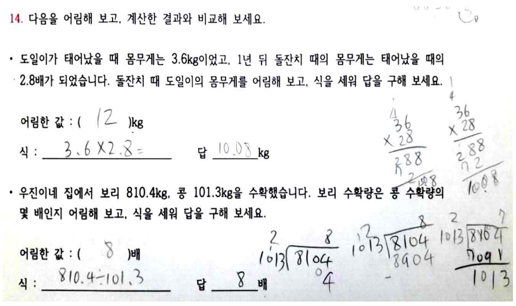
S의 풀이 과정 및 설명을 분석한 결과, S는 산술 용어 및 기호에 대해 기본적인 이해를 지니고 있으나, 아직 이를 구조적으로 파악하거나 충분히 이해하지는 못함을 확인할 수 있었다. 예를 들어, 4번 문항에서 S는 등호(=)를 '양쪽이 서로 같다'와 같이 관계적 의미로 이해하고 있으나, 그 이해와 달리 실제 등식을 구조적으로 파악하여 활용하지는 못하였다. 예컨대 '$17+12=29$는 옳은 식입니다. 그렇다면 $17+12+8=29+8$은 옳은 식일까요, 틀린 식일까요?'에서 '틀림'으로 표시하였다가 $17+12+8$, $29+8$ 각각을 계산하여 둘 다 37이 나오니 '옳음'으로 수정하였다. 또한 $48+13=49+\square$와 $63-35=\square-37$은 등식에서 양변의 수의 관계 파악을 기대한 문제이나 S는 이를 등호 개념을 활용하여 해결하지 못하였다. 전자는 $48+13=61$을 계산한 후 $61-49$를 계산하여 12를 구하였으나, 후자는 해결하지 못하고 포기하였다.

또한 주어진 상황을 □가 사용된 덧셈식이나 뺄셈식으로 나타내고 □의 값을 구하는 것과 관련된 문제 중 '피겨 스케이트 경기에서 1등의 점수는 74.92점이고, 1등과 2등의 점수 차이는 1.28

점입니다. 2등의 점수는 몇 점인지 □를 사용하여 뺄셈식으로 써 보세요.'의 해결 시 S는 매우 오랫동안 고민하다가, $\square = 74.92 - 1.28$이라고 식을 썼다. 연구자가 이 식도 옳지만 또 다른 뺄셈식으로도 나타낼 수 있냐고 물었으나 모르겠다고 하였고, 이후 $74.92 - 1.28$을 세로셈으로, 받아내림을 일일이 표시하면서 계산함으로써 S가 주어진 상황을 □가 사용된 식으로 나타내는 데 충분한 이해를 지닌 것은 아니며 비효율적이고 능숙하지 못한 계산 능력을 지녔음을 재차 확인하였다. 주어진 상황을 □가 사용된 곱셈식이나 나눗셈식으로 나타내고 □의 값을 구하는 문항에서도 S는 나머지가 있는 나눗셈 상황을 식으로 나타내는 데 큰 어려움을 보였다. '78을 어떤 수로 나누었더니 몫이 15이고, 나머지가 3이었습니다. □를 사용하여 식으로 써 보고 어떤 수를 구하세요.'에 대해, 한참을 고민하다가 $78 \div \square = 15 \cdots 3$이라고 식을 세운 뒤 이를 계산하려다가 포기하였다. 그러다가 다시 $\square \div 78 = 15 \cdots 3$이라고 식을 세운 뒤, 15×78을 세로셈으로 계산하였다. 곱 1170을 구했으나 자신의 답에 대한 확신을 갖지 못하였다. 연구자가 어느 것이 옳은지 묻자 후자를 지목하였고, 한참을 고민한 뒤에도 결국 옳은 식과 답을 구하지 못한 채 포기함으로써 나머지가 있는 나눗셈 상황을 □가 사용된 식으로 나타내는 것에 대한 이해가 부족함을 보여 주었다.

5) 계산 결과 어림에 대한 이해

S는 어림하기에 자신이 없다고 말하였으나 능숙하지는 않아도 소수를 반올림하고 곱셈, 나눗셈을 함으로써 적절하게 어림을 하는 것으로 드러났다. 이때 S는 14번 문항의 첫째 문제를 해결하면서 앞서 인지하지 못했던 소수점 처리의 오류를 스스로 발견하였다([그림 IV-5]). 어림한 것을 확인하기 위해 3.6×2.8을 이전과 같이 36×28로 바꾸어 계산한 뒤 곱이 1008이 나오자, 이를 자신이 어림한 값과 비교해 본 뒤, 이건 말이 안 된다고 하면서 그때서야 소수점을 옳게 찍어 10.08이라고 구하였고 소수의 곱셈 시 소수점 처리에 오류가 있었음을 인지하였다.



[그림 IV-5] 곱셈과 나눗셈의 결과 어림 사례

임의의 곱(20000)과 몫(20)을 정하고 이에 가깝게 곱셈식과 나눗셈식을 만드는 문제에서는 계산 결과에 대한 어림뿐만 아니라, 끈기를 가지고 시도하려는 태도, 또 다른 식을 생각해 내는 유창성 또한 부족한 것으로 드러났다. 먼저 □□□×□□=20000에 근접한 곱셈식을 구할 시, S는 $20000 \div 500$을 세로셈으로 계산한 뒤 501×42를 쓰고 이를 계산하여 20000에 가깝다고 말하였다. 그 후 그 식보다 곱이 더 근접한 것을 찾으려는 시도는 하지 않았다. 몫 20을 위한 나눗셈 문제에서도 곱셈과 같은 패턴으로, $201 \div \square\square$, $401 \div 23$, $601 \div 32$를 쓰고 20에 가까운 몫을 찾으려 하였다. 그러나 나눗셈이 나누어떨어지지 않자, 고민하다가 결국 문제 해결을 포기하였다. 이때 곱셈에 이어서 여전히 '□01÷□□' 패턴만을 사용하였고, 연구자가 또 다른 수를 이용해볼 수 있는지 물었으나 그에 대해 대답하지 못하였다.

Ⅴ. 논의 및 제언

학교수학에서 중요한 산술 지도가 지나치게 계산 기능 숙달에 집중할 경우 수학적 성향 및 올바른 수학관 형성에 부정적인 영향을 미칠 수 있다. 물론 계산 기능, 계산 능력이 중요한 기본임은 부인할 수 없다. 그러나 계산 능력에서 컴퓨터가 인간을 넘어서고 있음을 단편적으로 보여주는 '알파고' 사례를 통해서도 단순 계산보다는 인간만이 할 수 있는 능력, 즉 사고력을 신장시키는 데 보다 역점을 두어야 할 필요가 제기된다. 이는 본 연구의 관심인 산술적 사고와 무관하지 않으며, 학교수학의 사례를 산술적 사고의 관점에서 심도 있게 분석할 필요로 이어진다.

이에 본 연구는 수와 연산 영역에서만 부진을 보이는 6학년 학생 S의 산술적 사고 수준 및 산술적 사고 요소에 기초한 산술 개념 이해 정도를 검사하였고 그 결과에 대한 논의로부터 구체적인 처방 방안을 모색하고자 한다.

첫째, S의 산술적 사고 수준은 검사 도구 1에 의해 Guberman(2014)의 1수준으로 판별되었고 (<표 IV-1>) 검사 도구 2에서도 1수준의 특징을 보임으로써(<표 IV-2>) 최종적으로 1수준으로 분석되었다. 비록 S가 2수준 관련 문항에서 2문항을 맞혔고 2수준에 관련된 사고의 특징 중 일부를 보였으나 Guberman(2014)의 판별 기준에 의거하여 아직 2수준에 도달하지 못한 것으로 파악된다. van Hiele(1986)에 의하면 상위 수준인 2수준에 도달하기 위한 적절한 학습 과정이 제공될 때 S의 수준 전이가 가능할 것이다. 따라서 기하 학습과 마찬가지로 산술 학습에서도 상위 수준에 이르는 학습 과정 및 그 단계에 대한 심도 있는 연구가 요구되며 S의 경우에는 그 중 2수준으로의 전이를 위한 적절한 학습 프로그램이 제공되어야 할 것이다. Guberman(2014)은 1수준을 행동 수준, 2수준을 설명 수준이라고 칭하였고 van Hiele(1986)에 따르면 2수준은 1수준의 구조를 취급하며 관계망이 등장하는 수준이라 할 수 있다. 따라서 1수준의 S에게 제공될 산술 학습에서는 여러 수들의 비교, 수와 연산의 성질에 대한 풍부한 경험을 통해 구조 및 관계에 대한 이해를 자극할 필요가 있다.

둘째, S가 보인 1수준 특징 중 비효율적이고 낮은 계산 능력에 대한 처방이 요구된다. 물론 이러한 S의 특징이 단순히 계산 연습의 부족 때문일 수도 있으나 S가 6학년이고 수와 연산 이외의 영역에서 모두 우수한 성취도를 보이며 이미 개인 수학 과외 지도까지 받고 있다는 점 등을 고려할 때 계산 연습만으로 이 문제를 해결하는 것은 어려울 것으로 예상된다. 이를 산술적 사고 발달의 관점에서 살펴보면 수와 연산의 성질에 대한 풍부한 이해, '무엇을 해야 할지', '왜 그렇게 되는지'와 관련되는 산술에 대한 관계적 이해(강완 외, 2014)를 수반하는 계산 연습이 요구된다.

셋째, 검사 도구 2의 결과 분석에서 S는 수 관련 요소에 대한 개념을 전반적으로 잘 이해하고 있는 것으로 드러났으나, 바둑돌의 수 세기 과제에서 S가 처음 사용한 수 세기 전략이 1씩 세기인 점은 효과적인 수 세기 전략이 미흡함을 보여준다. 이로부터 저학년 수준에서 수 세기 지도가 충분히 이루어지지 않았을 가능성을 엿볼 수 있다. 따라서 매우 기초적인 활동이기는 하나, S의 수 세기 전략을 점검하고 다양한 수 세기를 충분히 경험할 수 있는 기회를 제공할 필요가 있으며, 이는 더 나아가 초등학교에서 저학년 단계의 수학 학습 시 다양한 구체물을 이용한 충분한 수 세기 경험의 필요성을 함의한다.

넷째, 검사 도구 2의 결과에 기초하여 연산 개념 이해와 관련한 몇 가지 논의가 처방 방안의 모색에 의미 있다. 먼저 S는 분수와 소수의 사칙

연산 전반에 대해 여러 어려움을 보였고, 특히 0 처리 오류 문항 해결 시 불충분한 이해를 보였다. 이러한 결과는 S가 사칙 계산의 원리를 충분히 이해하지 못하여 계산에 숙달하지 못하였음을 보여준다. 계산 원리의 이해는 연산 개념 및 산술적 사고의 주요 요소일 뿐만 아니라, 후속하는 연산 학습의 기초가 되기 때문에 이에 대한 체계적인 처방이 필요하다. 이때 S와 같이 산술적 사고의 1수준에 있는 학생들이 사칙 계산의 원리를 이해하는 데 도움을 줄 수 있는 도구로서 계산기의 사용에 대해 고려해볼 만하다. 예컨대, S는 소수의 곱셈에서 소수점 처리의 오류를 보였으나([그림 IV-4]), 본 검사가 끝난 후 계산기를 이용하여 다양한 소수의 곱셈을 해 보고 계산기 화면에 제시된 출력 값에서 규칙을 발견하여 자신의 오류를 수정하였다. 연구자가 오류 수정을 위해 그 원리를 설명하여 지도했을 때는 명확히 이해하지 못하였던 S가 계산기를 활용함으로써 이를 수정한 것이다. 비록 계산기를 통해 관계적 이해가 아닌 도구적 이해 수준에서 이를 파악하였을지라도, 6학년인 S가 기본적인 계산 학습을 목적으로 하고 있지 않기 때문에 S의 수준에 적절하게 계산기를 활용하는 것은 S의 산술적 사고 수준 발달을 독려할 수 있을 것이다.

연산의 성질과 관련하여 S는 덧셈의 교환법칙과 결합법칙, 곱셈의 교환법칙과 결합법칙에 대해 알지 못하였고, 연구자가 검사 완료 후 추가 지도를 실시하였음에도 불구하고 결합법칙을 발견하지 못하였다. S가 지속적으로 ( )에만 의존하여 계산하려는 경향을 보였고 $(207+193)+(488+12)$와 $207+(193+488)+12$ 두 문제를 각각 별도로 계산하여 해결한 것은 우리나라 학교수학의 현실에 따른 자연스러운 결과일 것이다. 현재 초등수학 교과서에서 연산의 성질을 명시적인 지도 없이 계산 과정에서 다루는 학습 상황이 있는 반면, 4학년 1학기 수학 교과서(교육부, 2015) 혼합 계산 단원에서 '( )가 있는 식은 ( ) 안을 먼저 계산합니다.'를 매 차시 강조하여 지도하고 있기 때문이다. 계산 순서의 지도는 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈이 섞여 있는 식의 계산을 위해 필수적인 내용이지만, 산술적 사고의 관점에서 연산의 성질을 이해하는 것 또한 결코 간과하기 어려운 요소이다. 실제로 van Hiele(1986)에 따르면, 연산의 성질은 2수준에 속하고 ( )를 이용하여 계산하는 것은 1수준의 사고이다. 이와 관련하여 NCTM(2000)에서는 3~5학년에서 교환법칙, 결합법칙, 분배법칙을 알고 범자연수 연산에 활용할 수 있어야 한다고 하였으며, CCSSM (CCSSI, 2010) 또한 1학년에서 덧셈의 성질을, 3학년에서 곱셈의 성질을 내용 규준으로 포함하고 있다. 또한 Caldwell, Karp, & Bay-Williams (2011)는 덧셈과 뺄셈의 필수 이해 중 하나로 덧셈에 대한 교환법칙과 결합법칙을, Lannin, Chval, & Jones(2013)는 곱셈과 나눗셈의 필수 이해 중 하나로 곱셈의 교환법칙과 결합법칙, 덧셈에 대한 곱셈의 분배법칙을 제시하고 있다. 따라서 연산의 성질을 경험하고 이해할 수 있는 추가적인 학습 기회가 제공되는 것은 S의 산술 이해 및 사고 발달에 긍정적인 영향을 미칠 것이다.

연산 간의 관계에 대하여 S는 덧셈식을 뺄셈식으로, 뺄셈식을 덧셈식으로, 곱셈식을 나눗셈식으로, 나눗셈식을 곱셈식으로 옳게 바꾸었음에도 불구하고 이를 도구적으로 이해하여 연산 간의 관계에 대해 명확히 설명하지 못하였다. 그렇게 수행한 이유에 대해 설명한 것을 분석한 결과, 단지 큰 수를 쓰는 위치를 외워서 해결하는 것으로 파악되었다. 연산 간의 관계 이해는 학생들이 반드시 알아야 하는 수 구구를 줄여주는 등(Caldwell et al., 2011) 여러 이점을 지니며 Guberman(2014)에서도 산술적 사고의 발달을 위해서 반드시 필요한 요소이다. 따라서 S가 연산 간의 관계를 단순히 도구적 이해가 아닌, 관계적

으로 이해될 수 있도록 이에 관한 추가 지도를 실시할 필요가 있다.

또한 S의 등호 개념 이해, □가 사용된 식 및 기본적인 산술 기호의 사용 등을 분석한 결과, S는 산술 용어 및 기호에 대해 기초적인 이해를 보이나, 그 구조를 파악하여 충분히 이해하지는 못하는 것으로 드러났다. 언어를 사고의 매개체로 본 van Hiele(1986)과 마찬가지로 Guberman(2014) 또한 산술적 사고에 있어서 학생들의 산술 용어의 이해 및 사용을 매우 중요한 요소로 취급하였다. S가 언어 관련 활동에 매우 관심이 높고 뛰어난 재능을 보임에도 불구하고 산술 용어의 사용에서 부족함을 보인 것을 단순 자신감 부족의 문제 등 다른 요인만의 원인으로 돌리는 것은 문제의 근본적 해결을 어렵게 할 것이다. van Hiele(1986)은 산술적 사고의 한 수준에서 다음 수준에 이르는 학습 과정 중 셋째 단계에서 학급 토론을 통해 산술 용어의 사용을 배우고 수학적 언어의 정확한 사용이 이루어지도록 할 것을 제안하였다. 따라서 S가 수와 연산 영역을 학습할 시, 토의·토론 등을 통해 충분히 언어 표현을 해 보는 기회를 제공하여 자신의 수학적 언어를 외부 성인의 세계와 비교해보도록 함으로써 상위 수준으로의 사고 발달을 도울 필요가 있다.

어림과 관련하여 S는 주어진 식의 결과를 적절히 어림하지만, 역으로 곱과 몫이 주어질 때 이에 가깝게 곱셈식과 나눗셈식을 만드는 문제에서는 이해가 부족한 것으로 드러났다. 이는 S에게 양방향의 어림이 적절히 포함된 과제를 통한 지도가 이루어질 필요를 함의한다.

본 연구는 6학년 학생 S를 연구 대상으로 한 사례 연구로서 학생의 어려움에 기초한 처방 방안을 모색한다는 목적에서 이루어졌지만, 이상과 같은 논의와 제언이 한 개인에게 국한되는 것은 아닐 것이다. 대부분의 논의가 유사한 유형의 오류를 보이는 학생들에게 일반적으로 적용 가능한 교수학적 함의를 제공할 것으로 기대된다.

참고문헌

강완, 김상미, 박만구, 백석윤, 오영열, 장혜원 (2014). **초등수학교육론**. 서울: 경문사.

강흥규 (1997). Dewey의 지식론과 산술 교육론, **대한수학교육학회 논문집, 7**(1), 415-434.

교육부 (2015). **수학 4-1**. (주)천재교육.

국립국어원 (2016). **표준국어대사전**. http://stdweb2.korean.go.kr/search/List_dic.jsp(2016.06.13).

권미선 (2015). **범자연수와 그 연산의 핵심 교수·학습 요소에 따른 수업 모형 개발 및 지도의 실제**. 한국교원대학교 대학원 박사학위논문.

김남희 (1994). 대수적 사고에 관한 고찰: 산술과의 관련성과 변수개념. **대한수학교육학회 논문집, 4**(2), 189-204.

김선희, 김부미, 이종희 (2014). **수학교육과 정의적 영역**. 서울: 경문사.

김성준 (2002). 수학 학습에서 이행에 관한 고찰 -산술과 대수를 중심으로-. **대한수학교육학회지 수학교육학연구, 12**(1), 29-48.

김용태 (2016). **인식론적 장애 예방을 위한 초등수학의 진단과 처방**. 서울: 교우사.

도종훈, 최영기 (2003). 수학적 개념으로서의 등호 분석. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 42**(5), 697-706.

방정숙, 최지영 (2011). 범자연수와 연산에 관한 수학 교과서 분석: 일반화된 산술로서의 대수 관점을 중심으로. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 50**(1), 41-59.

안지영, 전영주, 윤마병, 이종학 (2014). 한국의 2009 개정 수학과 교육과정과 미국의 수학과

교육과정 규준 CCSSM의 비교·분석 -초등학교 수와 연산 영역을 중심으로-. **한국학교수학회논문집, 17**(4), 437-464.

우정호 (2011). **학교수학의 교육적 기초**(제2증보판). 서울: 서울대학교출판문화원.

우정호, 정영옥, 박경미, 이경화 (2006). **수학교육학 연구방법론**. 서울: 경문사.

유충현 (2011). 산술교육에서의 직관적 전개가 가지는 인간 교육적 의미. *East Asian Mathematical Journal, 27*(4), 453-470.

이종학 (2014). 산술과 대수 영역의 문장제 문제해결 전략에 대한 초등 예비교사의 내용지식 연구. **한국콘텐츠학회논문지, 14**(12), 1083-1099.

이형주, 고호경 (2015). 협동학습 및 또래교수 프로그램이 수학학습부진학생의 인지적・정의적 영역에 미치는 효과 메타분석. **대한수학교육학회지 수학교육학연구, 25**(1), 113-137.

이혜민, 신인선 (2011). 산술과 대수적 사고의 연결을 위한 분수 scheme에 관한 사례 연구. **한국수학교육학회지 시리즈 C <초등 수학교육>, 14**(3), 261-275.

이화영 (2011). **초등학생의 대수 추론 능력과 조기 대수(Early Algebra) 지도**. 건국대학교 대학원 박사학위논문.

장혜원, 임미인, 강태석 (2015). 초등 수학 학습부진아의 자릿값 이해 수준. **대한수학교육학회 수학교육학연구, 25**(3), 347-366.

장혜원, 최민아, 임미인 (2014). 0처리 오류에 기초한 교과용 도서 분석 및 활동 구성. **한국초등수학교육학회지, 18**(2), 257-278.

한국과학창의재단 (2015). **수학 클리닉 진단 검사지 및 수학 클리닉 진단 검사 가이드라인**. http://www.askmath.re.kr.

Berman, J. (2011). SToPV: A five minute assessment of place value. *Australian primary mathematics classroom, 16*(4), pp.24-28.

Brownell, W. A. (1947). The place of meaning in the teaching of arithmetic, *Elementary school journal, 47*, pp.256-265.

Buswell, G. T. (1950). Study pupil's thinking in arithmetic. *The phi delta kappan, 31*(5), pp.230-233.

Caldwell, J. H., Karp, K., & Bay-Williams, J. M. (2011). *Developing essential understanding of addition and subtraction for teaching mathematics in prekindergarten-grades2*. Reston: NCTM.

CCSSI (2010). *Common Core State Standard for Mathematics*. http://www.corestandards.org.

Guberman, R. (2008). A framework for characterizing the development of arithmetical thinking. *Proceeding of ICME-11-topic study group 10: Research and development in the teaching and learning of number system and arithmetic*, pp.113-122.

Guberman, R. (2014). Development of arithmetical thinking: Evaluation of subject matter knowledge of pre-service teachers in order to design the appropriate course. *International journal of science and mathematics education*, pp.1-17.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational studies in mathematics, 27*(1), pp.59-78.

Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In Hiebert, J.(Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*, pp.1-27. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Krysztofiak, W. (2015). *Representational structures of arithmetical thinking: Part I.* DOI 10.1007/s10516-015-9271-1.

Lannin, J., Chval, K., & Jones, D. (2013). *Putting* *essential understanding of multiplication and division into practice in grades 3-5*. Reston: NCTM.

Leontiev, A. N. (2005). On the development of arithmetical thinking in the child. *Journal of Russian and East European Psychology, 43*(3), pp.78-95.

Merriam, S. B. (1988). *The case study research in education*. San Francisco: Jossey-Bass.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. VA: Reston.

Reys, L. H. (1984). Affective variables and mathematics education. *The elementary school journal, 84*(5), pp.558-581.

Usiskin, Z. (1982). *van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*. CDASSG Project. Chicago: University of Chicago.

van Hiele, P, M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, Fla: Academic Press.

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics education research journal, 15*(2), pp.122-137.

A Case Study on Levels of Arithmetical Thinking of an Underachiever in Number and Operation
- Focusing on a 6th Grader -

Lim, Miin (Graduate School, Seoul National University of Education)
Chang, Hyewon (Seoul National University of Education)

Number and operation is the most basic and crucial part in elementary mathematics but is also well known as a part that students have lots of difficulties. A lot of researches have been done in various ways to solve this problem but it can't be solved fundamentally by emphasizing calculation method and skill. So we need to go over it in terms of relevant arithmetical thinking. This study aims to diagnose the cause of an underachiever's difficulties about arithmetic and finds a prescription for her by analyzing her level of arithmetical thinking based on Guberman(2014) and understanding about arithmetic. To achieve this goal, we chose an 6th grader who's having a hard time particularly in number and operation among mathematics strands and conducted a case study carrying out arithmetical thinking level tests on two separate occasions and analyzing her responses. As a result of analyzing data, her arithmetical thinking corresponded to Guberman's first level and it is also turned out that student is suffering from some arithmetic concepts. We suggest several implications for teaching of arithmetic at elementary school in terms of the development of arithmetical thinking based on analysis result and discussion about it.

* Key Words : arithmetical thinking(산술적 사고), levels of arithmetical thinking(산술적 사고 수준), number and operation(수와 연산), underachiever(부진 학생)

논문접수 : 2016. 7. 10
논문수정 : 2016. 8. 2
심사완료 : 2016. 8. 2