East Asian Math. J.
Vol. 32 (2016), No. 4, pp. 483-500
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2016.035

유클리드 분할론에 기반한 작도교육의 방향 분석[1)]

Analytic study on construction education based on Euclid's ‘On divisions’

서 보 억

ABSTRACT. Ancient Greek mathematician Euclid left three books about mathematics. It's ‘The elements', 'The data', 'On divisions of figure'. This study is based on the analysis of Euclid's 'On divisions of figure'. 'On divisions of figure' is a book about the construction of the shape. Because, there are thirty six proposition in 'On divisions of figure', among them 30 proposition are for the construction. In this study, based on the 'On divisions of figure' we explore the direction for construction education. The results were as follows. First, the proposition of 'On divisions of figure' shall include the following information. It is a 'proposition presented', 'heuristic approach to the construction process', 'specifically drawn presenting', 'proof process'. Therefore, the content of textbooks needs a qualitative improvement in this way. Second, a conceptual basis of 'On divisions of figure' is 'The elements'. 'The elements' includes the construction propositions 25%. However, the geometric constructions contents in middle school area is only 3%. Therefore, it is necessary to expand the learning of construction in the our country mathematics curriculum.

Received August 12, 2016; Accepted August 27, 2016.
2010 Mathematics Subject Classification: 97D30
Key Words: 유클리드의 분할론(Euclid's On division of figures), 작도(Construction), 작도교육(Construction Education), 수학과 교육과정(Mathematics Curriculum), 기하교육(Geometry Education)
* 이 연구는 충남대학교 학술연구비에 의해 지원되었음.
(This work was supported by research fund of Chungnam National University.)

(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

I. 서론

역사상 최초의 수학자라고 평가하는 인물은 고대 그리스 시대의 Thales이다(Eves, 1990). 하지만 고대 그리스 시대에 가장 위대한 수학자 한 사람을 꼽으라고 한다면 많은 사람이 Euclid를 선택할 것이다. 그 이유는 그가 쓴 '원론(The elements)' 때문이다. Euclid의 원론의 가치는 지금 이 시대에도 많은 수학자에 의해 높게 평가되고 있다(Boyer & Merzbacj, 1991; Heath, 1981). 원론을 제외하고 Euclid에 대해 논하는 것은 다소 의아한 것이 사실이다. 그렇지만 Euclid가 남긴 수학에 대한 삼대 저작 중, 원론을 제외한 나머지 두 저작에 대한 관심은 매우 부족하다(서보억, 2010). Taisbak(2003a)은 Mcdowell과 Sokolik(1993)이 '자료론(On data)'에 대한 해설서를 출간하였는데, 이를 서보억과 김동근(2013)이 번역판으로 출판하였고, 도종훈(2014)은 '분할론(On divitions)'에 대한 번역판을 출판하는 등 Euclid의 다른 저작에 대해 관심을 가지기 시작한 정도이다. 이러한 관심에도 불구하고 자료론에 대한 수학교육적 가치에 대한 연구는 수행되고 있지만, 분할론에 대한 수학교육적 관점에서의 연구는 전무한 실정이다.

본 연구는 '분할론은 어떠한 책인가?'라는 의문으로 출발하였는데, 이에 대해 서보억(2010)은 분할론은 작도에 큰 의미가 있다고 지적하고 있다. Eves(1990)가 Euclid의 원론에 대해 서술한 부분을 보면, 연습문제 부분에서 분할론에 제시된 문제를 언급하면서 '자와 컴퍼스로 풀어라'는 단서를 붙이고 있다. 이는 분할론이 작도에 대한 문제임을 전제로 한 것이다. Heath(1981)는 Euclid의 자료론을 'On divisions of figures' 라고 하면서 도형이라는 용어를 삽입하여 소개하고 있다. 또한 자료론에 제시된 몇 가지 명제를 소개하면서 주어진 명제에 대한 이해를 위한 최고의 방법은 '작도(construction)'라고 하였고, 분할론의 이해가 작도와 깊은 관련이 있음을 시사하였다.

Euclid의 분할론은 Euclid적 도구인 컴퍼스와 자를 이용하여 도형을 분할하는 것과 관련 있음이 분명해 보인다. 실제로 분할론에 제시된 36개의 명제 중에 기초 성질에 해당하는 6개의 명제를 제외하고 30개의 명제가 '분할하는 것(to divide)', '잘라내는 것(to cut)', '그리는 것(to draw)'이라는 형태로 시작하고 있다(Archibald, 1915a). 이러한 표현으로 명제를 시작하고 있는 것은 컴퍼스와 자라는 작도 도구만을 이용하여 주어진 도형을 분할하고 잘라내고, 그리라는 의미를 담고 있는 것으로 전적으로 작도를 의미하고 있다고 보아야 한다. 고대 그리스의 수학문헌 중에 전체 내용을 작도로 할애하고 있는 책은 이 책이 거의 유일하다고 볼 수 있다. 따라서 본 연구에서는 기하학의 출발이라고 볼 수 있는 고대 그리스 시대의 거의 유일한 작도만으로 구성된 분할론을 기반으로 작도교육의 의미와 학교수학에서 작도교육의 방향에 대해 고찰하는 것을 목적으로 한다.

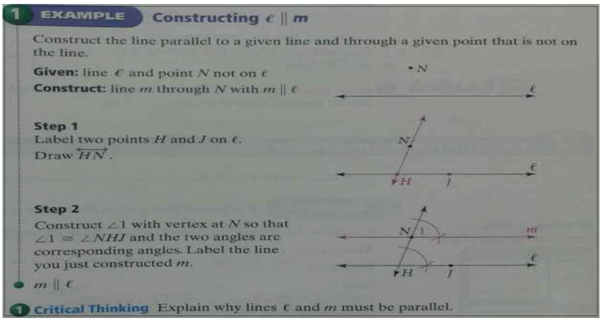
이러한 목적에 따라 본 연구에서는 첫째, 우리나라 교육과정에 나타난 작도교육에 대해 분석하고, 분할론을 통해 작도교육의 질적인 방향을 탐색하고, 당시 최고의 수학책인 원론을 통해 작도교육의 양적 방향을 탐색하며, 결론적으로 분할론 분석을 근거로 작도교육의 대안 제시를 연구내용으로 선정하였다.

기하교육은 사고력 향상과 창의력 신장에 큰 장점이 있고, 특히 작도는 이러한 기하교육에서 매우 중요한 일부분임에 틀림이 없다. 분할론은 기하에서 작도를 통한 도형의 분할에 대한 명제를 수록하고 있어 고대 그리스 시대의 작도교육에 대한 기본적인 방향을 추출할 수 있을 것으로 생각된다. 또한 논증기하학이 발생하기 시작한 고대 그리스 초기 도형의 분할에 대한 역사 발생적 고찰은 당시 작도 및 작도의 수학적 사고과정을 이해하는 중요한 계기가 될 것이다. 본 연구를 통해 기하에서 작도 개념의 발생적 탐색에 유의미한 시사점을 기대할 수 있다.

Ⅱ. 수학과 교육과정, 교과서에 나타난 작도교육

우리나라에서 작도교육이 어떻게 이루어져 왔는가를 살펴보기 위한 방법으로 수학과 교육과정의 고찰, 현행 교과서의 고찰을 선택하였다. 우리나라의 수학교육은 국가가 고시한 교육과정을 기반으로 하고 있고, 교과서 중심의 교육이 이루어지기 때문이다.

우리나라 교육과정과 교과서에 대해 살펴보기 전에 미국의 한 교과서에 대해 간략히 살펴본다. 일반적으로 미국에서는 기하 내용을 어려워한다고 알려져 있다. 하지만, 미국에서 사용되는 Prentice Hall Mathematics에서 출판한 기하 교과서(Bass, Charles, Hall, Johnson & Kennedy, 2007)에 나타난 작도내용을 보면 매우 광범위하게 다루고 있음을 알 수 있다. 컴퓨터의 사용과 디자인, 같은 길이의 선분 작도, 같은 크기의 각의 작도, 수직이등분선 작도, 각의 이등분선 작도, 공학도구와 작도, 평행선 작도, 평행사변형 작도, 수직선 작도, 수선의 발 작도, 삼각형의 작도와 합동 등을 다루고 있다.



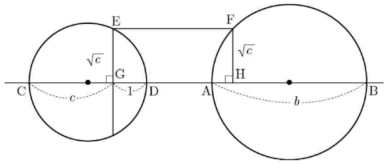
[그림 Ⅱ-1] 기하교과서에서 작도(Bass et al, 2007)

미국 교과서에서 이러한 양적인 측면과 더불어 작도를 다루는 방식을 보면 [그림 Ⅱ-1]에서 엿볼 수 있다. 평행선 작도에 대한 내용인데, 총 세 가지의 단계가 있다. 하나는 주어진 것 및 작도할 것의 제시이고, 두 번째는 작도의 절차를 순차적으로 제시하는 것이고, 마지막은 'critical thinking'이라는 제목으로 작도의 이유를 설명하는 문제를 제시하는 단계이다.

1. 수학과 교육과정에서의 작도

우리나라는 9차례의 개정을 통해 10개의 수학과 교육과정이 있다. 1955년에 고시된 제1차 수학과교육과정에서부터 2015년에 고시된 2015개정 수학과 교육과정에 제시된 작도와 직접 관련 있는 학습요소를 중심으로 살펴본다.

제1차 수학과 교육과정은 중학교와 고등학교에서 작도내용을 다루도록 하였다(문교부, 1955). 먼저 중학교의 경우, 이차방정식에 의한 문제해결 즉, 이차방정식의 해법으로 도해를 제시하고 있다. 서보억(2013)은 이차방정식의 도해(기하적 해법)라는 것은 $x^2-bx+c=0$의 해를 지름이 $c+1$, b인 두 원을 이용하여 [그림 Ⅱ-2]와 같이 해결하는 방법으로 소개하고 있다. 그 외, 평면도형 그리기와 기본 도형 그리기를 작도내용으로 다룬다. 고등학교의 경우, 고등학교 1학년 '수학'과목에서는 간단한 작도문제를 다루고 있고, '기하'과목에서는 궤적의 뜻과 증명, 그리고 간단한 작도를 학습요소로 다룬다.



[그림 Ⅱ-2] 이차방정식의 도해

제2차 수학과 교육과정은 중학교에서만 작도내용을 다루도록 하였다(문교부, 1963). 이후의 모든 교육과정은 중학교에서만 작도를 직접적으로 다룬다. '도형의 구적'이라는 단원에서 구적공식의 정리 및 기본적인 도형의 구적을 다룬다. 구적은 어떤 특정 다각형을 정사각형으로 변환시키는 작도와 깊은 관련이 있다. 또한 '기본 작도와 간단한 도형의 작도'에서는 평행선의 작도, 각의 작도, 선분의 등분, 각의 등분, 수선 및 수직이등분선의 작도, 삼각형의 작도, 사각형의 작도를 다룬다. 비록 고등학교에서는 작도와 관련된 직접적인 내용은 찾을 수 없지만 중학교에서 매우 폭넓은 주제를 다루도록 하였다.

제3차 교육과정은 '컴퍼스와 눈금 없는 직선 자를 이용한 기본 작도를 통하여 삼각형의 결정 조건 및 합동 조건을 알아보고 삼각형의 합동 개념을 파악하게 한다'로 제시하고 있다(문교부, 1973). 구체적으로 선분의 이동, 수직이등분선의

작도, 각의 이동, 각의 이등분선의 기본 작도, 삼각형의 작도와 삼각형의 결정 조건, 삼각형의 작도와 삼각형의 합동 조건을 다룬다.

제4차 교육과정에서는 '삼각형의 합동조건과 이등변삼각형의 성질을 이해하고'로 제시하면서, 간단한 작도(각의 이등분선, 선분의 수직이등분선 등)와 삼각형의 합동을 다루도록 하였다(문교부, 1981). 제5차 및 제6차 교육과정은 '작도를 통하여 두 삼각형의 합동조건을 알아보게 하고, 간단한 도형의 성질을 알 수 있게 한다'로 제시하면서, 간단한 작도, 도형의 합동, 삼각형의 합동조건을 다루도록 하였다(문교부, 1981; 교육부, 1987). 제7차 및 2007개정 교육과정은 '작도와 합동'이라는 중단원에서 간단한 도형의 작도, 합동인 도형의 간단한 성질, 삼각형의 합동조건을 다루도록 하였다(교육부, 1997; 교육인적자원부, 2007).

2009개정 및 2015개정 수학과 교육과정은 '작도와 합동'이라는 학습요소를 제시하고 있다. 이 학습주제에서 다루는 내용은 삼각형 작도 및 이를 이용한 삼각형의 합동조건으로 제한하고 있다(교육과학기술부, 2011; 교육부, 2015).

결론적으로, 작도를 중심으로 지난 60년 동안의 수학과 교육과정을 분석하면 다음 세 시기로 구분할 수 있다. 1기는 다양성 시대로 제1차 및 제2차 교육과정이 이에 해당하는데, 작도에 대한 내용을 다양한 주제로 폭넓게 다루던 시기이다. 2기는 기본작도 시대로 다각형 및 원을 다루는데 필요한 기본적인 작도 중심으로 작도내용을 다루던 시기이다. 3기는 삼각형 작도 시대로 삼각형의 합동조건을 유도하기 위해 최소한의 내용만을 다루는 시기이다.

<표 Ⅱ-1> 우리나라에서 작도교육의 시대 구분

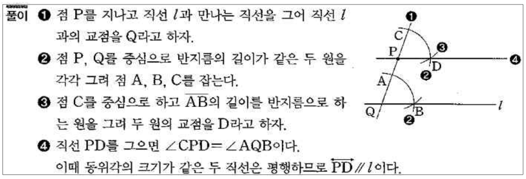
구분	시기	주요 내용
다양성 시대	제1차, 2차 교육과정	다양한 작도, 기본도형 작도, 삼각형작도
기본작도 시대	제3차~2007개정	기본도형 작도, 삼각형 작도
삼각형 작도 시대	2009개정, 2015개정	삼각형 작도

2. 2007개정 및 2009개정 수학교과서에서의 작도

최근 우리나라에서 다루어지고 있는 작도교육의 모습을 살펴보기 위해 2007개정 교육과정에서의 수학교과서와 2009개정 교육과정의 수학교과서를 고찰하였다. 일관성을 위해 동일한 주저자가 동일한 출판사에서 발행한 교과서를 선택하였다. 다른 13종의 교과서도 이 교과서와 큰 차이는 없는 것으로 나타났다.

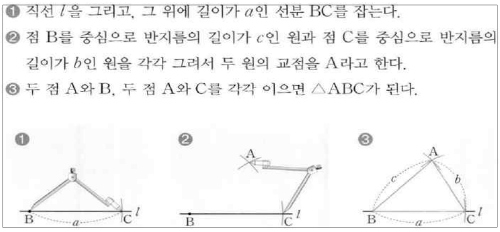
2007개정 교육과정에서 김원경 외(2010)는 '간단한 작도'에서는 작도의 뜻, 같은 길이의 선분 작도, 선분의 수직이등분선 작도, 각의 이등분선 작도, 주어진 각과 같은 크기의 각 작도, 평행선 작도를 다루고, '삼각형의 작도와 결정조건'에서는 삼각형 작도, 삼각형의 결정조건에 따른 작도를 다루고 있다. [그림 Ⅱ-2]는 이 교과서에서 제시된 '평행선 작도'에 대한 부분이다. 교과서에 나타난 평행

선의 작도는 각각의 단계를 세분화하고, 각 단계의 작도 과정을 순서화하여 다루고 있다. 작도는 컴퍼스와 자를 이용하여 상세한 절차로 자세히 다루고 있다.



[그림 Ⅱ-2] 평행선의 작도(김원경 외, 2010)

2009개정 교육과정에서 김원경 외(2013)는 ‘삼각형 작도’에서 작도의 뜻, 선분의 작도를 다룬 다음, 간단한 삼각형의 작도만을 다루고 있다. [그림 Ⅱ-3]은 이 교과서에서 세 변의 길이가 주어졌을 때, 삼각형을 작도하는 부분이다. 교과서에 나타난 삼각형의 작도는 크게 두 개의 부분으로 나누어진다. 세 변이 한 삼각형을 결정하다는 사실을 직관적으로 인식하게 하는 부분과 각각의 단계를 세분화하여 각 단계별로 작도 절차를 순서화하는 부분이다.



[그림 Ⅱ-3] 삼각형의 작도(김원경 외, 2013)

Ⅲ. Euclid의 ‘분할론’에 나타난 작도

1. 분할론의 구성 체제

Heath(1981)에 따르면 Euclid가 쓴 수학에 대한 3대 저작 중의 하나인 분할론은 비록 그리스어가 아닌 아라비아어로 후대에 전해졌지만 순수기하에 대한 책이라고 언급하고 있다. 본 연구에서는 먼저 분할론에 대한 주석(Archibald, 1915a)에서 제시하고 있는 분할론의 내용 구성에 대해 살펴보고, 이러한 고찰을 바탕으로 이 책의 형식적인 체계에 대해 분석한다. 분할론에 제시된 명제의 내용 체제를 간단히 살펴보면, ‘한 도형을 임의의 비율로 분할하는 직선을 작도하는 문제’들로 구성되어져 있다(Eves, 1990). Frederickson(1997)의 평면도형의 분할에서 도형의 분할에 대한 가치를 알 수 있듯이, 분할론을 구성하고 있는 총 30개의 작도 명제들 각각에 대한 형식적인 체계의 공통점을 중심으로 고찰한다.

가. 분할론의 역사

분할론은 아라비아어로 된 책이 현재 가장 표준적인 기준이 되고 있다. 19세기 프랑스어로 번역되었고, 영어로 복원된 것은 1915년이다. Euclid의 다른 저작들은 비교적 일찍 복원이 되어 출판되었지만, 분할론은 상대적으로 늦게 복원작업이 이루어졌는데, 복원할 때 가장 중요한 기준은 Woepcke에 의한 것이었다(Archibald, 1915a). 실제로 1915년 이전까지도 Heath의 원론에 대한 편집본에서 분할론을 잠시 언급한 것 이외에는 그 이전까지 영어로 분할론을 소개한 것이 전혀 없었던 것으로 보인다.

나. 명제의 구성

분할론에는 모두 36개의 명제가 있다. 이 중 기본명제 6개를 제외하면, 모두 '도형'을 대상으로 한다. 제시된 도형은 삼각형, 평행사변형, 사다리꼴, 사각형, 다각형과 호, 원 모두 여섯 종류이다.

분할론은 어떤 행위의 '수행'을 요구한다. 앞에서 제시하였지만, '분할하기', '잘라내기', '그리기'가 그것인데, 어떻게 분할하고, 잘라내고, 그리는가에 대한 부분이다. 두 개로 똑같이 나누는 것, 세 개로 똑같이 나누는 것, 임의의 개수로 똑같이 나누는 것, 주어진 임의의 두 개의 비로 나누는 것, 주어진 여러 개의 비로 나누는 것으로 구분된다. 또한 분할론은 최종적으로 작도되는 분할선의 '속성'이 다양한 형태로 나타난다. 고정된 한 점을 지나는 분할선, 한 변에 평행한 분할선, 문제해결과정에서 결정된 직선에 평행한 분할선으로 구분된다.

따라서 분할론에 제시된 작도 명제는 나누는 대상인 '도형'과 요구하는 행위인 '수행', 작도되는 분할선의 특성인 '속성'이라는 세 요소로 분류할 수 있다. <표 Ⅲ-1>은 분할론에 제시된 명제를 '도형'과 '수행'의 두 요소로 분류한 이원분류표이고, <표 Ⅲ-2>는 '도형'과 '속성'의 두 요소로 분류한 이원분류표이다.

<표 Ⅲ-1> 분할론의 작도 명제에 대한 '도형', '수행'에 따른 이원분류표(명제 번호)

도형 / 수행	삼각형	평행사변형	사다리꼴	사각형	다각형과 호	원
두 개로 등분할	1, 3, 4, 19, 26	6, 10	8, 12	14, 16	28	
세 개로 등분할	2		5			
임의의 개수로 등분할		7, 11	9, 13	15, 17		29
주어진 두 비로 분할	20, 27, 30		32	34, 36		
주어진 여러 비로 분할	31		33, 35	(36)		

<표 Ⅲ-2> 분할론의 작도 명제에 대한 ‘도형’, ‘속성’에 따른 이원분류표(명제 번호)

속성 \ 도형		삼각형	평행사변형	사다리꼴	사각형	다각형과 호	원
고정된 임의의 한 점	도형의 꼭짓점			14, 15, 34, 35			
	도형의 임의의 변	3	6, 7		16, 17, 36		
	평행인 변 중 하나			8, 9			
	원의 호의 중점					28	
	도형의 내부	19, 20					
	도형의 외부	26, 27	10, 11				
도형의 임의의 점				12, 13			
한 변에 평행한 직선		1, 2, 30, 31		4, 5, 32, 33			

2. 분할론에 제시된 작도 명제의 체제 분석

가. 명제의 체제

분할론에 제시된 작도 명제는 대체로 일관성 있는 내적 구성 체제를 갖추고 있다. 분할론의 명제에 나타난 내용의 제시는 다음 네 요소로 나눌 수 있다.

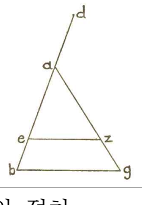
첫 번째는 작도 명제의 제시이다. [그림 Ⅲ-1]은 분할론 명제1의 제시를 나타낸 것이다.

> 22. "*To divide*[86] *a given triangle into equal parts by a line parallel to its base.*" [Leonardo 5, p. 119, ll. 7–9.]

[그림 Ⅲ-1] 작도 명제의 제시

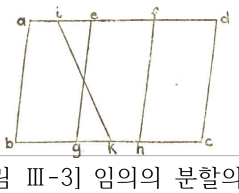
두 번째는 실제적인 작도 절차를 제시하는 것이다. [그림 Ⅲ-2]는 분할론 명제1에 대한 작도의 절차를 나타낸 것이다. 그런데, 이러한 절차는 단순한 순서만을 나타낸 것이 아니라, 그 절차에 대한 이유를 수학 학습내용과 연결하여 발견적으로 제시하고 있다. 작도의 절차만 보여주는 것이 아니라, 수학적 개념을 통해 작도의 절차에 대한 발견이 가능하도록 내용이 진술되어 있다.

> Let *abg* be the given triangle which it is required to bisect by a line parallel to *bg*. Produce *ba* to *d* till *ba* = 2*ad*. Then in *ba* find a point *e* such that
>
> *ba* : *ae* = *ae* : *ad*.
>
> Through *e* draw *ez* parallel to *bg*; then the triangle *abg* is divided by the line *ez* into two equal parts, of which one is the triangle *aez*, and the other the quadrilateral *ebgz*.
>
> Leonardo then gives three proofs, but as the first and second are practically equivalent, I shall only indicate the second and third.



[그림 Ⅲ-2] 작도의 절차

> Let *abcd* be the given parallelogram. Suppose it be required to cut off a third of this parallelogram, by a straight line drawn from *i*, in the side *ad*.



[그림 Ⅲ-3] 임의의 분할의 예

세 번째는 임의의 분할에 대한 작도문제에 나타난 공통된 현상으로, 임의의 분할에 대한 구체적 한 사례가 제시되어 있다. 즉, 임의의 n개로 분할하는 문제는 예외 없이 3등분을 예로 제시하고 있다. 3등분이 가능하다는 예를 통해 n개로 분할도 가능하다는 논리를 펼치고 있다. [그림 Ⅲ-3]은 분할론 명제7에 나타난 평행사변형의 3등분 작도이다.

네 번째는 작도에 대한 정당화 즉, 증명을 제시하고 있다. [그림 Ⅲ-4]는 분할론 명제27의 작도과정에 대한 증명이다.

Proof: For since

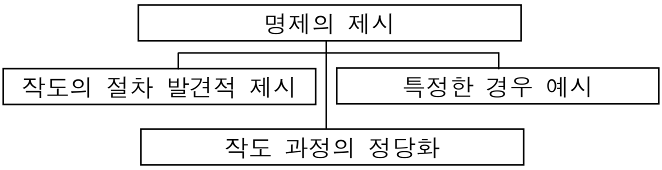
$$\text{area } eg \,.\, gi = \text{area } gk \,.\, ki,$$

$$eg : gk = ki : ig.$$

Hence $$ek : gk = gk : gi.$$ [v. 17]

[그림 Ⅲ-4] 증명의 예

결국 분할론에 제시된 작도 명제는 명제의 제시, 작도의 절차 제시, 특정한 경우의 예시, 작도 과정의 정당화하는 내용을 포함하여 진술하고 있다. 이러한 내용을 도식화하면 [그림 Ⅲ-5]와 같다.



[그림 Ⅲ-5] 명제의 체제

나. 작도 명제의 체제 분석

앞에서 살펴본 것 같이 분할론의 작도 명제는 첫째, 구체적인 작도에 대한 명제 제시하기, 둘째, 실제적인 작도에 대한 절차 제시하기, 셋째, 만약 임의의 등분할에 대한 명제일 경우에는 특별한 경우를 예시로 제시하기, 넷째, 작도 과정에 대한 구체적인 타당성을 확보하기 위해 증명과정에 대한 상세한 제시하기가 핵심내용이다.

Polya(1973)는 Bruner에 의해 사라져 가던 발생적 원리를 되살린 수학자이자 수학교육자이다(우정호, 2006). 19세기 이후 수학교육에서 중요한 위치에 있던 발생적 원리는 수학교육의 현대화 운동으로 등장한 구조의 강조, 연역적 전개로 인해 잊혀가고 있었고, Polya는 이를 교육적 입장에서 부흥시키는 역할을 담당하였다. 이때 Polya가 강조한 것이 귀납, 유추에 의한 수학적 발견이다.

Polya(1973)는 '귀납은 관찰로부터 시작하여 특정한 추측에 이르는 방법'이라고 설명하면서, 귀납의 절차를 세 단계로 나누어 설명한다. 첫 번째 단계는 여러

사례에 대한 관찰을 통해 유사점을 찾는 것이고, 두 번째 단계는 관찰한 유사점으로부터 일반적인 하나의 관계를 추측하는 것이고, 세 번째 단계는 일반적인 추측이 옳은지 몇 몇 특별한 사례에 적용하여 옳은지 확인하는 단계이다. 즉, 구체적인 상황에서의 유사 실험을 통해 신뢰성을 증가시키는 단계이다. Polya에게 추론은 귀납에 머무르지 않는다. 귀납을 통해 주어진 명제에 대한 참이라는 확신이 생긴 다음에는 그러한 확신에 대한 정당성 즉, 연역적 증명을 요구한다. 따라서 Polya의 추론의 마지막은 증명을 통해 정당성을 확보하는 것이다. 추론의 과정에 대한 Polya의 이러한 절차와 분할론에 제시된 작도 명제의 내용 제시를 <표 Ⅲ-3>과 같이 결부시켜 나타낼 수 있다.

<표 Ⅲ-3> Polya의 추론과정과 분할론의 작도 명제의 체제

대상 단계	Polya의 추론	분할론의 작도 명제
1단계	관찰	명제 제시
2단계	추측	절차의 발견
3단계	특수한 사례 적용: 확신	특수한 사례 제시
4단계	정당화	증명

다시 분할론에 제시된 작도를 위한 명제의 구성을 살펴보자. 1단계는 구체적인 작도에 대한 명제를 제시하는 단계이다. 이 단계에서는 주어진 명제가 의미하는 것이 무엇인지 음미하고, 과정의 경험에 비추어 관찰하게 된다. 즉, Polya의 추론 1단계의 관찰과 매우 유사한 활동이다. 2단계는 실제적인 작도에 대한 구체적인 절차를 제시하는 단계이다. 이 단계는 작도의 과정을 발견적 접근으로 찾아야 하는 단계이다. 이 과정에서의 작도 절차는 정당성을 확보한 작도라기보다는 과정의 경험에 비춘 추측, 일반화된 절차에 대한 발견으로, Polya의 추론 2단계의 추측과 유사하다. 3단계는 만약 임의의 등분할에 대한 명제일 경우에는 특별한 경우를 예시로 제시하는 단계이다. 구체적인 예를 제시하여 그 신뢰성을 높인다는 측면에서 Polya의 3단계와 유사한 과정이다. 4단계는 작도 과정에 대한 구체적인 타당성을 확보하기 위해 증명 단계이다. Polya도 귀납적 과정을 거친 다음, 최종적으로 연역적으로 타당성을 확보하는 증명을 강조하고 있다.

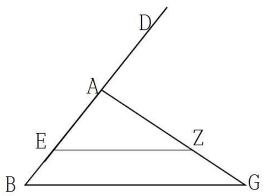
결론적으로 분할론에 제시된 작도 명제의 구성 체제는 현대적 의미에서 관찰을 통한 귀납적 확신, 연역을 통한 정당화 과정을 구체적으로 드러낸 것으로 볼 수 있다. 즉, 분할론을 통해 볼 때, 작도교육은 귀납적인 확신 및 절차에 대한 발견을 선행한 다음, 연역적으로 정당성을 확보하는 과정을 필연적으로 거쳐야 하는 일련의 과정을 거쳐야 함을 명확히 보여주고 있다.

3. 분할론에 제시된 작도 및 증명과정의 특성

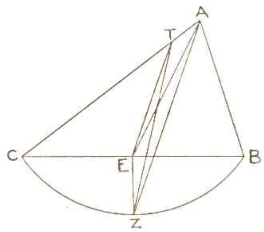
분할론이 작도에 대한 명제만을 다루고 있다는 측면에서 작도 명제에서 반복적으로 나타나거나 특이한 작도내용이 무엇인지 고찰하는 것은 작도교육의 방향 제시에 의미가 있다. 여기에서는 작도의 과정, 정당화의 과정으로 나누어 특이한 부분을 분석하였다.

가. 작도 과정에서의 특성

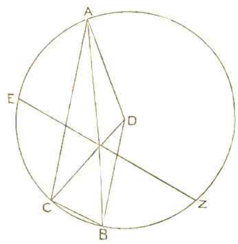
첫째, 분할론에 제시된 작도 문제해결을 위해 수학적 개념을 매우 효율적으로 활용하고 있다는 점이다. 구체적으로, 등비중앙의 개념을 활용하여 작도를 진행할 수 있도록 제시하고 있다. 예를 들어, 분할론 명제2에서 '밑변에 평행이고 삼등분할하는 직선'을 작도하는 문제에서 선분 BA의 연장선 위에 $\overline{BA}=2\overline{AD}$가 되는 점 D를 잡고, 선분 BA위에 $\overline{BA}:\overline{AE}=\overline{AE}:\overline{AD}$를 만족하는 점 E를 작도하는 과정에서 등비중앙을 활용하고 있다.



[그림 Ⅲ-6] 명제2



[그림 Ⅲ-7] 명제28



[그림 Ⅲ-8] 명제29

둘째, 작도과정은 연역적 과정이 아닌 발견적 과정임을 배경으로 하고 있다. 분할론에서의 작도는 절차에 대한 단순한 암기가 아니라, 발견과정을 순차적으로 전개하고 있다.

셋째, 작도문제임에는 분명하지만 현재의 방정식의 해(기하학적인 거리)를 찾는 작도문제를 다루고 있다. 예를 들어, 명제19에서 '내부의 한 점 D를 지난 주어진 삼각형의 넓이를 이등분하는 직선의 작도'가 있는데, 이 문제해결을 위해서는 이차방정식의 해에 대한 명확한 이해가 선행되어야 한다.

넷째, 우리가 다루지 않는 특별한 작도 문제도 다루고 있다. 명제28과 같이 궁형과 삼각형이 결합한 도형, 명제29와 같은 원에 대한 분할 작도문제를 온전한 형태로 다루고 있다(Archibald, 1915a). 특히, 주어진 원의 넓이를 $\frac{1}{n}$이 되는 영역으로 분할 작도가 가능함을 구체적으로 제시하고 있다. 이를 통해 작도는 도형의 거의 모든 분야에서 다루어질 수 있는 주제임을 인식할 수 있다.

나. 증명 과정에서의 특성

첫째, 분할론에서 증명은 작도의 과정을 정당화하기 위한 연역적인 논증 도구로 사용되고 있다. 분할론의 명제에는 작도에 대한 절차의 제시와 더불어 작도 과정의 정당화를 위한 증명이 명확히 제시되어 있다.

둘째, 증명 방법은 한 가지만 제시한 것이 아니라, 두 가지 이상 다양한 방법을 제시한 명제도 존재한다. 대표적으로 명제1, 명제6은 두 가지 방법으로 작도의 정당성을 확보하고 있다. 증명에 대한 다양한 접근이 가능하다는 인식을 가지도록 한다는 측면에서 수학교육적 가치가 높다.

셋째, 증명과정에서 시각에 의한 모순을 극복하기 위해, 찾을 수 있는 다양한 경우로 세분화하여 각각의 경우에 대해 논리적인 타당성을 제시하려는 노력을 엿볼 수 있다. 역으로, 증명의 과정에서 시각적인 도구인 그림에 의존하여 증명 과정을 서술해 가고 있다. 이는 원론과 동일한 형식을 취하고 있는 것으로 당시 그리스 기하학의 실제적 모습을 잘 보여주고 있다. 예를 들어, 명제20에서 ‘사다리꼴의 한 변 위 임의의 한 점을 지나면서 넓이를 이등분하는 직선의 작도’ 문제를 다루는데, 전적으로 시각에 의존하고 있다.

Ⅳ. Euclid의 ‘분할론’에서의 작도와 ‘원론’에서의 작도

분할론은 모두 36개의 명제로 구성되어져 있다. 이 중 6개의 명제(명제18, 21, 22, 23, 24, 25)는 규칙을 설명하는 내용이고, 나머지 30개는 작도에 대한 내용이다. 반면 원론(Euclid, 2003)은 원론보다 거의 13배나 많은 모두 465개의 명제로 구성되어져 있다. 명제의 수 때문에 기인하는지는 모르겠지만, 원론은 총 13권으로 구성되어져 있다. 원론은 명제 뿐 아니라, 공리 5개, 공통개념 5개, 정의 131개를 포함한다. 양적으로 볼 때 원론과 분할론은 비교할 수 없을 만큼 큰 차이를 보이고 있다. 하지만 본 연구의 관심은 작도이므로, 작도의 관점에서 원론과 분할론을 서로 비교하여 살펴본다.

1. 원론에 나타난 작도 명제

원론은 1권과 4권까지는 평면도형을 다루고 있고, 5권은 비례에 대한 이론, 6권은 비례이론의 도형에의 적용, 7권에서 10권까지는 정수와 무리수에 대한 이론, 11권은 입체도형, 12권은 도형의 구적론, 13권은 정다면체를 주요내용으로 한다. 주요내용을 통해 볼 때, 작도는 도형과 관련된 내용이므로, 이와 관련된 부분에서 작도내용이 존재할 것이라고 예상할 수 있다. 실제로 <표 Ⅳ-1>과 같이, 도형과 관련된 모든 부분에서 작도와 관련된 명제가 다양하게 존재한다.

<표 Ⅳ-1> 원론에 나타난 명제와 작도관련 명제의 수

구분	명제	주요내용	작도관련 명제
제 1권	48	평면도형	14
제 2권	14	평면도형(기하학적대수)	2
제 3권	37	평면도형(원)	6
제 4권	16	평면도형(내접,외접다각형)	16
제 5권	25	비례에 관한 이론	0
제 6권	33	비례이론의 도형에의 적용	9
제 7권	39	수론	0
제 8권	27	수론(등비급수)	0
제 9권	36	수론(소수에 대한 이론)	0
제10권	115	무리수론	0
제11권	39	입체도형	4
제12권	18	구적론	2
제13권	18	정다면체	0
계	465		53

기하와 관련된 내용을 다루는 권의 총 명제의 수가 205개인데 그 중에 작도에 대한 명제가 총 53개로 전체의 25.9%를 차지하고 있었다. 이는 기하내용 중 작도가 차지하는 비중이 매우 높았음을 알 수 있다. 각 권별로 다루어지는 작도와 관련된 명제의 내용을 정리하면 <표 Ⅳ-2>와 같다.

<표 Ⅳ-2> 원론에 제시된 작도 관련 명제

구분	명제	작도 관련 명제의 내용
1권	14개	1) 정삼각형의 작도 2) 주어진 길이 선분 작도 3) 큰 선분에 작은 선분 작도 9) 각의 이등분 작도 10) 선분의 이등분 작도 11) 선분 위의 수선 작도 12) 수선의 발 작도 22) 삼각형 작도 23) 주어진 각의 작도 31) 평행선 작도 42) 한 각에 주어진 삼각형과 넓이가 같은 평행사변형 작도 44) 주어진 변에 주어진 삼각형과 넓이가 같은 평행사변형 작도 45) 한 각에 주어진 다각형과 넓이가 같은 평행사변형 작도 46) 정사각형 작도
2권	2개	11) 황금 분할 작도 14) 주어진 다각형과 넓이가 같은 정사각형 작도
3권	6개	1) 원의 중심 작도 17) 한 점에서 원에 접선 작도 25) 주어진 활꼴에서 완전한 원 작도 30) 주어진 호 이등분 작도 33) 활꼴의 내부 원주각이 주어진 각과 같은 모양 작도 34) 어떤 각이 주어질 때, 주어진 각이 원주각이 되는 활꼴 작도
4권	16개	1) 원이 주어질 때, 원 위에 주어진 길이의 현 작도 2) 원에 주어진 삼각형과 닮음인 내접 삼각형 작도 3) 원에 주어진 삼각형과 닮음인 외접 삼각형 작도 4) 주어진 삼각형의 내접원 작도 5) 주어진 삼각형의 외접원 작도 6) 원에 내접 정사각형 작도 7) 원에 외접 정사각형 작도 8) 주어진 정사각형에 내접원 작도 9) 주어진 정사각형에 외접원 작도 10) 한 밑각이 다른 한 각의 두 배인 이등변삼각형 작도 11) 원에 내접 정오각형 작도 12) 원에 외접 정오각형 작도 13) 주어진 정오각형에 내접원 작도 14) 주어진 정오각형에 외접원 작도 15) 원에 내접 정육각형 작도 16) 원에 내접 정15각형 작도
6권	9개	9) 선분을 특정한 비로 분할 작도 10) 어떤 비로 분할된 선분이 있고, 다른 선분이 이 비로 분할 작도 11) 두 선분이 주어질 때, 이것과 비례 관계가 있는 세 번째 선분 작도 12) 세 선분이 주어질 때, 이것과 비례 관계가 있는 네 번째 선분 작도 13) 두 선분의 비례중앙 작도 18) 주어진 선분 위에 주어진 다각형과 닮음인 도형 작도 25) 주어진 도형과 닮음이고 또 다른 다각형과 넓이가 같은 도형 작도 29) 어떤 직선, 다각형, 평행사변형이 주어질 때, 직선 위에 주어진 다각형과 같은 넓이를 가지는 평행사변형 작도 30) 주어진 선분을 외중비(extreme and mean ratio[1])로 분할 작도
11권	4개	11) 공간상의 한 점에서 평면에 수선 작도 12) 평면 위의 한 점에서 수선 작도 26) 주어진 각을 가지는 입체각 작도 27) 주어진 직선에 평행육면체 작도
12권	2개	16) 두 개의 동심원에서, 큰 원에 내접하고 작은 원과 두 점에서 만나지 않는 정다각형 작도 17) 두 개의 동심구에서, 큰 구에 내접하고, 작은 구와 두 점 이상에서 만나지 않는 정다면체 작도

1) Golden Section, Golden Cut, Golden Proportion, Golden Ratio 등으로도 불림.

2. 분할론과 원론에 나타난 작도 명제의 진술 체제의 비교

원론에 제시된 465개의 명제 중에 53개의 명제가 작도와 직접 관련이 있다. Euclid(2003)를 보면, 작도 명제는 '구성하는 것(to construct)', '그리는 것(to draw), '잘라 내는 것(to cut off)' 등의 수행용어를 사용하고 있는데 이것은 분할론과 차이가 없다.

하지만 명제의 진술 방식에는 큰 차이가 있다. 분할론은 명제의 제시, 작도의 절차에 대한 발견적 제시, 구체적인 예에 대한 제시, 작도 절차에 대한 정당화 내용 제시를 하고 있지만, 원론은 전혀 그렇지 않다. 원론에서는 명제를 먼저 제시한 다음, 곧 바로 그 명제에 대한 정당성을 확보하기 위한 증명 과정을 제시한다. 명제의 제시, 명제에 대한 연역적 증명이라는 구조로 되어 있다.

이를 통해 볼 때, 분할론은 작도를 중심으로 명제를 구성하였기 때문에 특별한 의도에 의해 진술된 책으로 볼 수 있다. 분할론에서 명제에 대한 관찰, 작도 과정의 발견을 위한 상세한 설명, 구체적인 예시, 작도 절차에 대한 증명을 순차적으로 제시한 것은 작도라는 특수한 상황에 기인한 것이다. Euclid는 분할론에서 작도 명제만을 선별하여 다룸으로서, 작도를 가르치기 위한 전형적인 방법을 구체적으로 제시하였다고 볼 수 있다. Euclid의 원론은 정의, 공리, 명제, 증명이라는 일련의 과정을 통해 공리적 체제를 완성하는 것에 초점을 맞춘 수학책이다. 이러한 공리적 체제의 강조로 인해, 명제를 해결하기 위한 절차에 대한 발견적 과정을 의도적이든 의도적이지 않던 표면적으로 드러낼 수 없는 태생적 한계를 지닌 것이다. 이러한 한계를 극복하고, 작도 명제에 대한 본질적 의미를 강조하기 위해 작도 명제만 별도로 구성하여 분할론을 저작하였다고 해석할 수 있다.

V. 결론 및 제언

1. 결과 및 결론

본 연구에서는 고대 그리스 시대 Euclid가 쓴 작도 책인 분할론을 기반으로 작도교육의 의미를 분석하였고, 교육과정 및 교과서, Euclid의 원론에 대한 분석을 통해 작도교육에 대한 다양한 정보를 수집하였다. 이러한 분석은 작도교육에 대한 질적 방향 및 양적인 방향 설정을 위한 기초 자료가 된다.

먼저 Euclid 분할론에 대한 분석을 통해 작도교육의 질적인 방향을 설정할 수 있다. 분할론에 제시된 작도 명제는 일련의 절차를 취하고 있다. 이러한 절차는 '명제 제시', '작도 방법에 대한 발견적 제시' 및 '구체적 예시를 통한 확신', 작도 과정에 대한 정당성 확보를 위한 '증명과정 제시'이다. 반면 미국의 Prentice Hall Mathematics(2007)에서는 '주어진 것' 및 '작도할 것'의 제시 즉 명제 제시,

작도 수행을 위한 ‘절차’ 제시, 문제형식으로 된 ‘이유에 대한 설명을 요구하는 질문’으로 이루어지고, 우리나라 교과서(김원경 외, 2013)는 작도 명제의 제시, 문제 해결에 대한 직관적 인식, 구체적인 ‘작도 절차’ 제시로 이루어진다.

<표 V-1> 작도 내용에 대한 체제 비교

<table>
<tr><th>대상
단계</th><th>분할론</th><th>우리나라 교과서</th><th>미국의 교과서</th></tr>
<tr><td>1단계</td><td>명제 제시</td><td>명제 제시</td><td>명제 제시</td></tr>
<tr><td>2단계</td><td>절차의 발견적 제시</td><td>작도를 위한 직관적 인식</td><td rowspan="2">작도 절차 제시</td></tr>
<tr><td>3단계</td><td>특수한 사례 적용</td><td rowspan="2">작도 절차 제시</td></tr>
<tr><td>4단계</td><td>정당화/증명</td><td>설명을 요구하는 질문</td></tr>
</table>

분할론에 비추어 볼 때, 우리나라의 교과서 및 미국의 교과서는 서로 다른 방식의 진술을 채택하고 있다. 우리나라에서는 작도를 위한 직관적 인식에 대한 활동을 다루고 있는 반면, 미국은 작도 절차의 이유를 설명하라는 요구를 질문 형식으로 제시하고 있다. 이렇게 볼 때, 우리나라는 작도가 가능하다는 직관적인 관념에 초점을 두고 있는 반면, 미국은 작도의 정당화에 초점을 두고 있다. 이 두 가지 방법 모두, 분할론에 비추어 보면 부족한 부분이 있다. 우리나라 교과서는 작도의 절차를 익힌 다음, 구체적인 정당화에 대한 학습이 이루어지지 않고 있고, 미국의 교과서는 작도가 가능할 것이라는 직관적인 확신 부분에서 부족하다. 두 나라 모두 공통적으로 부족한 부분은 절차에 대한 발견적 접근이다. 비록 우리나라에서는 작도가능성에 대한 직관적 인식을 시도하지만, 구체적인 수학내용과 작도 사이의 연결성을 찾기에는 부족한 부분이 있고, 미국은 이러한 접근조차 시도하지 않고 있다.

따라서 분할론을 통해 볼 때, 작도교육은 질적으로 개선될 필요가 있다. 분할론에서 제시된 것 같이, 명제를 제시한 다음, 이 명제가 실제로 실행되는 절차에 대한 발견적 접근에 대한 시도가 필요하다. 발견적 접근은 수학내용과 작도 절차에 대한 결합을 통해 분석적 방법으로 체계화될 필요가 있다. 또한 작도 절차에 대한 정당화에 대한 내용 제시도 재고되어야 한다.

다음은 Euclid 분할론에 대한 분석을 통해 작도교육의 양적인 방향을 설정할 수 있다. 분할론에 제시된 36개의 명제 중에 30개가 작도 명제이다. 사실 분할론 그 자체가 작도에 대한 책이라고 볼 수 있다. 따라서 양적인 시사점을 얻기에는 부적합할 수 있다. 하지만 Euclid의 또 다른 저작이자, 분할론의 이론적 근거가 되고 있는 원론은 그 자체가 수학교과서와 같기 때문에 양적인 시사점을 얻기에 적절한 도구가 될 수 있다. 원론에서 작도와 관련이 있는 부분은 1권, 2권, 3권, 4권, 6권, 11권, 12권이다. 이 7권의 책에 제시된 명제는 총 205개로, 이 중에서

작도 명제는 53개이다. 즉 전체 명제의 약 $\frac{1}{4}$인 25.9%가 직접적으로 작도와 관련이 있다. 우리나라의 2015개정 수학과 교육과정에서 작도와 관련된 내용에 할애된 시간은 3시간으로 중학교 기하영역에 할당된 시간 105시간의 약 2.9%를 차지하고 있다. 참고로 2015개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구 보고서(박경미 외, 2015)에 따르면, 중학교에서 연습문제 해결 등을 제외한 순수 수학학습 시수를 277시간으로 설정하였는데, 기하영역은 37.9%로 5개의 내용 영역 중 가장 높은 비율을 차지했다. 현재 우리나라 뿐 아니라 대부분의 국가에서 논증기하 내용의 대부분은 Euclid의 원론을 기반으로 하고 있다. 우리나라 중학교 내용이 Euclid 기하 부분을 다루고 있다는 측면에서 원론에 기반한 내용 구성이다. 그런데, 원론에서는 높은 비중을 차지하는 작도내용이 우리나라 중학교 기하에서는 매우 낮은 비중을 차지하고 있다는 점이다. 게다가 이러한 경향은 점차 심화되고 있다. 따라서 분할론을 통해 볼 때, 작도교육은 양적으로 개선될 필요가 있다. 분할론의 모태인 원론에서의 작도내용이 차지하는 비중으로 볼 때, 기하교육에서 작도교육은 매우 중요한 학습요소임에 틀림없다. 수학과 교육과정 개정할 때마다, 학습부담 감소라는 시대적 요구에 작도는 그동안 대표적인 축소대상 중의 하나였다. 어떻게 보면, 학습 부담 감소를 위한 희생양이었다. 왜냐하면 작도내용이 향후 다른 내용요소의 학습에 큰 영향을 끼치지 않는다는 인식이 작용한 것이다.

2. 제언

본 연구에서는 Euclid의 저작 중의 하나인 분할론을 깊이 있게 분석하고 작도교육의 질적, 양적 개선을 위한 방향을 제시하였다. 이러한 방향 제시가 구체화되기 위해서는 다양한 후속 연구가 필요하다.

첫째, 중학교 기하 영역에서 작도의 내용이 많이 축소된 원인을 구체적으로 밝힐 필요가 있다. 수학 내적 요인인지, 또 다른 요인인지 교육과정 개선 과정에 대한 분석이 필요하다. 러시아의 수학자 Kolmogorov는 기하교육의 반은 작도교육이라고 밝힌 적이 있다. 우리나라는 기하교육에서 중요한 한 축을 잃어버리고 있지 않은지 체계적으로 그 원인을 진단할 필요가 있다.

둘째, 작도는 기하교육의 한 부분이다. 작도에 대한 학습내용이 점차 축소되는 것은 기하 교육에 대한 방향성이 불확실하다는 측면이 있다. 직관기하, 논증기하, 증명 등 현시점에서 기하교육에 대한 방향 설정에 대한 연구가 필요하다. 이러한 연구를 기반으로 작도교육의 방향이 재설정되어야 할 것이다.

셋째, 분할론에서 작도의 핵심은 작도절차에 대한 발견적 접근과 그 절차의 정당화이다. 그런데 왜 많은 사람들은 여전히 작도는 절차에 대한 기억이라고 생각하고 있는지, 수학교육적 진단이 필요하다.

넷째, 작도 교육의 본질에서 볼 때, 작도의 많은 부분이 고등학교로 이전 가능한지 탐색할 필요가 있다. 정당화는 중학교에서 다루지만, 증명은 고등학교에서 다룬다. 이 둘의 차이만큼이나 작도교육에 대한 내용 재배치에 대한 논의가 이루어져야 한다.

참 고 문 헌

[1] 교육과학기술부 (2011). 2009개정 수학과 교육과정, 교육과학기술부.

[2] 교육부 (1992). 6차 수학과 교육과정, 교육부.

[3] 교육부 (1997). 7차 수학과 교육과정, 교육부.

[4] 교육부 (2015). 2015개정 수학과 교육과정, 교육부.

[5] 교육인적자원부 (2007). 2007개정 수학과 교육과정, 교육인적자원부.

[6] 김원경, 조민식, 김영주, 김윤희, 방환선, 윤기원, 이춘신(2010). 중학교 수학1, 비유와 상징.

[7] 김원경, 조민식, 방금성, 김수미, 배수경, 오혜정, 지은정, 최형권, 황정하(2013). 중학교 수학1, 비상교육.

[8] 문교부 (1955). 1차 수학과 교육과정, 문교부.

[9] 문교부 (1963). 2차 수학과 교육과정, 문교부.

[10] 문교부 (1973). 3차 수학과 교육과정, 문교부.

[11] 문교부 (1981). 4차 수학과 교육과정, 문교부.

[12] 문교부 (1981). 4차 수학과 교육과정, 문교부.

[13] 문교부 (1987). 5차 수학과 교육과정, 문교부.

[14] 박경미 외 41명 (2015). 2015개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구, 한국과학창의재단 연구보고서.

[15] 서보억 (2010). 도형의 분할에 대한 Euclid의 책-On Divisions, *한국수학사학회 2010년 가을연구발표대회 프로시딩*.

[16] 서보억 (2010). 유클리드의 자료론에 기초한 중학교 기하영역의 ‘자료(datum)’ 분석 연구, *수학교육논문집 24(3)*, 691-708.

[17] 서보억 (2013). 교육과정과 중학교 교직수학의 탐구, 교우사.

[18] 이종우 (2002). 기하학의 역사적 배경과 발달, 경문사.

[19] 우정호 (2006). 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교출판부.

[20] Archibard, R. C.(1915a). *Euclid's Book on Divisions of Figures*, Cambridge University Press.

[21] Archibard, R. C.(1915b). *Euclid's Book on Divisions of Figures*, Cambridge University Press. 도종훈 역(2014). 유클리드 분할론, 한국문화사.

[22] Bass, L. E., Charles, R. Il, Hall, B., Johnson, A. & Kennedy, D.(2007). *Geometry*, Prentice Hall Mathematics.

[23] Boyer, C. B. & Merzbach, U. C.(1991). *A History of Mathematics,* John Wiley & Sons, Inc.

[24] Eves, H.(1990). *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunders College Publications.

[25] Euclid (2003). *Euclid's Elements: All thirteen books complete in one volume*, Green Lion Press.

[26] Frederickson. G. N.(1997). *Dissections : Plane & Fancy*, Cambridge University Press.

[27] Heath, T. (1981). *A History of Greek Mathematics I*, Dover Publications.

[28] Mcdowell, G. L., Sokolik, M. A.(1993). *The Data of Euclid* : Translated from the text of Menge, Union Square Press.

[29] Polya, G.(1973). *Mathematics and Plausible Reasoning, Vol I*, Princeton University Press.

[30] Taisbak, C. M.(2003a). *Euclid's Data(ΔΕΔΟΜΕΝΑ) or The Importance of Being Given*, Museum Tusculanum Press.

[31] Taisbak, C. M.(2003b). *Euclid's Data(ΔΕΔΟΜΕΝΑ) or The Importance of Being Given*, Museum Tusculanum Press. 서보억, 김동근(2013). 유클리드 데이터, 경문사.

Suh, Bo Euk
Chungnam National University
Daejeon, 305−764, Republic of Korea
E−mail: eukeuk@cnu.ac.kr