

위 평판이 작은 불균일 온도를 갖는 두 수평 평판 사이의 자연 대류에서의 다중해

유 주 식*

안동대학교 기계교육과

MULTIPLE SOLUTIONS IN NATURAL CONVECTION BETWEEN TWO HORIZONTAL PLATES WITH SMALL MAGNITUDE NON-UNIFORM TEMPERATURE IN THE UPPER PLATE

Joo-Sik Yoo*

Dept. of Mechanical Engineering Education, Andong Nat'l Univ.

Multiple solutions in natural convection of water with $Pr=7$ between two horizontal plates with small magnitude non-uniform temperature distribution in the upper plate is numerically investigated. The dimensionless temperature of upper plate is $\theta = \epsilon \sin kx$. Two upright cells are formed over one wave length in the conduction-dominated regime of small Rayleigh number. However, multicellular convection occurs above a critical Rayleigh number for small wave number. When $k=1.5$, dual solutions are found and a transition of $6 \rightarrow 4$ eddy flow occurs with decrease of Rayleigh number. When $k=0.75$, two, three, four and five multiple solutions are observed. Transitions of $14 \rightarrow 12$, $12 \rightarrow 10$, $10 \rightarrow 8$ and $6 \rightarrow 8$ eddy flow occur with decrease of Rayleigh number.

Key Words : Natural Convection(자연 대류), Non-Uniform Temperature(불균일 온도), Multicellular Convection(다수셀 유동), Multiple Solutions(다중해)

1. 서 론

본 연구에서는 일정한 온도 차이를 가지고 있는 Rayleigh-Bénard 문제[1]에 작은 크기의 불균일 온도가 위 평판에 부가되었을 때 일어나는 자연대류 현상을 조사한다. Fig. 1과 같이 아래 평판은 일정온도를 유지하며 위 평판은 작은 크기의 불균일 온도 분포 $\epsilon \Delta T \sin(kX/H)$ 를 가지고 있다. 비록 작은 크기이지만 불균일성이 주기적인 분포이므로 본 문제는 주기적인 경계조건을 가지는 하나의 문제가 된다.

주기적인 벽면 온도 분포를 갖는 문제에 대한 연구로는 Yoo and Kim[2,3]과 Yoo[4]의 연구 등이 있다. Yoo and Kim[2]은 평균 온도가 같고 주기적인 온도 분포를 갖는 평판 사이에서의 자연 대류에서 카오스로의 천이 경로를 규명하였다. 그리고 Yoo and Kim[3]은 서로 다른 평균 온도를 가

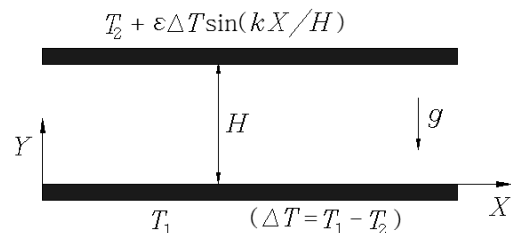


Fig. 1 Problem configuration.

지고 같은 형태의 주기적인 온도 분포를 갖는 시스템에서 일어나는 유동의 천이 현상을 조사하였다. 한편 Yoo[4]는 아래 평판이 미소 불균일 온도 분포를 가지고 있을 때 공기 ($Pr=0.7$)의 자연대류를 조사하여 3중해를 발견하였다.

일반적인 유체 외에 다공성 매질(porous media)에 대해서도 주기적인 불균일 벽면 온도를 갖는 시스템에 대해 몇 가지 연구가 수행되었다. Bradean et al.[5]은 주기적으로 가열되고 냉각되는 수평 평판을 가진 반무한 다공성 매질에서의 대류를 조사하였다. 그리고 Yoo and Schultz[6]은 이론적인 방법으

Received: June 29, 2016, Revised: July 12, 2016,

Accepted: July 12, 2016.

* E-mail: jsyoo@andong.ac.kr

DOI <http://dx.doi.org/10.6112/ksce.2016.21.3.064>

© KSCFE 2016

로써 정현적인 온도 분포를 가지고 있는 두 평판 사이에서의 다공성 매질의 유동을 조사하였다.

본 연구에서 고려하는 시스템은 Fig. 1과 같다. 유동장은 벽면 온도와 같은 공간적인 주기를 가지므로 무차원 파장 (wave length) $2\pi/k$ 는 시스템의 기하학적 형태를 나타내는 일종의 중횡비(가로/세로)에 해당된다. Fig. 1에서 불균일 온도 분포의 크기를 나타내는 값 $\epsilon = 0.01$ 이며 $Pr = 7$ 인 물에서 일어나는 자연대류 현상을 조사한다. 본 연구에서의 주된 관심사는 Rayleigh 수에 따른 유동 형태의 천이 현상과 다중해 (multiple solutions)의 존재이다. 전도 상태(conduction state)가 깨어져 다수 셀 대류(multicellular convection)가 일어날 때 $k = 1.5$ 에서는 이중해, $k = 0.75$ 에서는 2중해, 3중해, 4중해 및 5중해가 발견되었다.

2. 해 석

Fig. 1과 같이 두 개의 수평 평판 사이에 채워져 있는 유체를 고려한다. 아래 평판은 T_1 의 일정 온도를 유지하며, 위 평판에는 일정 온도 T_2 에 $\epsilon \Delta T \sin(kX/H)$ 의 불균일 온도가 추가되었다. H 는 평판 사이의 간격이며 온도 차이 $\Delta T = T_1 - T_2 > 0$ 이다. k 는 온도 분포의 무차원 파동수 (wave number)를 나타낸다.

기준 상태에서 유체의 밀도를 ρ_0 , 열확산계수를 κ 라 할 때, Boussinesq 근사 하에서 질량, 운동량과 에너지에 대한 보존 방정식[7]을 길이, 시간, 속도, 압력 및 온도차 $T - T_2$ 의 특성 값을 각각 $H, H^2/\kappa, \kappa/H, \rho_0 \kappa^2/H^2, \Delta T$ 로 택하여 무차원화 시키면 무차원 지배 방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\nabla p + Pr \nabla^2 \vec{u} + Pr Ra \theta \vec{j} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \theta = \nabla^2 \theta \tag{3}$$

이상에서 $Pr = \nu/\kappa$ 와 $Ra = \alpha g \Delta T H^3/\kappa \nu$ 는 각각 Prandtl 수와 Rayleigh 수를 나타낸다.

유동을 xy 평면 내 2차원 유동으로 제한하면 유동 함수 Ψ 와 와도 ω 로써 표현되는 무차원 지배 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \mathcal{J}(\Psi, \omega) + Pr \nabla^2 \omega + Pr Ra \frac{\partial \theta}{\partial x} \tag{4}$$

$$\nabla^2 \Psi = -\omega \tag{5}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \mathcal{J}(\Psi, \theta) + \nabla^2 \theta \tag{6}$$

여기에서 와도(ω)와 유동 함수(Ψ), Jacobian $\mathcal{J}(f, g)$ 은 다음과 같이 정의된다.

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{7}$$

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{8}$$

$$\mathcal{J}(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \tag{9}$$

그리고 벽면에서의 경계 조건은 다음과 같다.

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 0, 1 \tag{10}$$

$$\theta = 1 \quad \text{at } y = 0 \tag{11}$$

$$\theta = \epsilon \sin kx \quad \text{at } y = 1 \tag{12}$$

수평방향(x 방향)으로는 다음과 같은 주기적인 조건이 유동 함수(Ψ), 와도(ω), 및 온도(θ)에 대해 적용된다.

$$F(x, y, t) = F\left(x + \frac{2\pi}{k}, y, t\right), \quad F = \Psi, \omega, \theta \tag{13}$$

수평 방향 변화 주기가 $2\pi/k$ 이므로 다음과 같이 평균 Nusselt 수를 정의한다.

$$\overline{Nu} = -\frac{k}{2\pi} \int_0^{2\pi/k} \frac{\partial \theta}{\partial y} dx \quad \text{at } y = 0, 1 \tag{14}$$

x 방향으로 $2\pi/k$ 의 주기를 가지는 식 (4)-(14)의 해는 Napolitano and Quartapelle[8]가 제안한 Block ADI 방법을 써서 구한다. 계산 영역은 $(0 \leq x \leq 2\pi/k, 0 \leq y \leq 1)$ 이 되며, x 방향으로는 균일 격자계를 사용하고, y 방향으로는 벽면 부근의 얇은 경계층을 분해하기 위하여 다음과 같은 좌표 확장을 이용한다.

$$y = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\tanh\{B(2\eta - 1)\}}{\tanh(B)} \right], \quad B = 1.4 \tag{15}$$

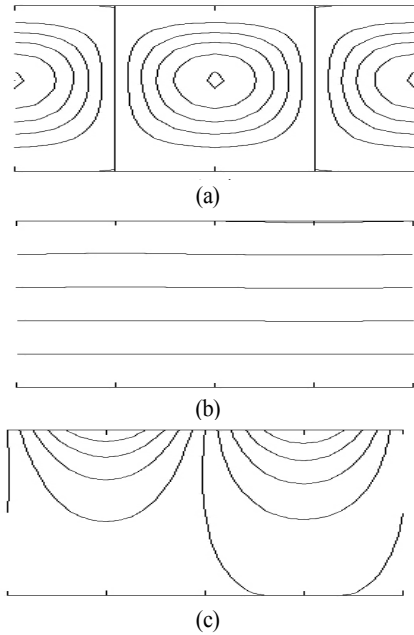


Fig. 2 Streamline and isotherm patterns in the conduction-dominated regime with $k=3$ and $Ra=100$: (a) streamlines, (b) isotherms, (c) iso-line of $\phi(x,y) = \theta(x,y) + y - 1$. The domain of x is $0 \leq x \leq 2\pi/k$

수평 방향으로 주기적인 본 문제에서 $2\pi/k$ 는 일종의 시스템의 종횡비(가로/세로)가 된다. 여기에서 주로 조사한 것은 $k=1.5$ 와 $k=0.75$ 이다. $k=1.5$ 일 때는 (45×25) , $k=0.75$ 일 때는 (81×21) 격자계를 사용하였다. 이 격자계들은 여러 가지의 격자계를 시험한 다음 충분하다고 생각한 것을 택한 것이다. 예를 들어 $k=1.5$, $Ra=10^4$ 일 때 격자계에 따른 \overline{Nu} 와 Ψ_{\max} 의 차이가 (45×25) 와 (45×15) 에서는 각각 0.3%, 1.7%이고, (45×25) 와 (85×45) 에서는 각각 0.3%, 0.0%이다. 본 연구에서 조사한 Rayleigh 수의 범위는 $Ra \leq 10^4$ 이다.

3. 결과 및 논의

아래 평판과 위 평판이 각각 일정온도 T_1 , T_2 ($\Delta T = T_1 - T_2 > 0$)를 가질 때는 부력에 의한 열불안정성이 존재하지만 Rayleigh-Bénard 문제[1]의 임계 Rayleigh 수 $Ra=1708$ 이하에서는 유체의 점성에 의해 정지 상태 ($\vec{u}=0$)를 유지한다. 이때는 유동이 없는 순수한 전도 상태에 있으며 그 해는 다음과 같다. $\vec{u}_B=0$, $\theta_B=1-y$. 그러나 본 문제에서는 위 벽면에 불균일 온도($\epsilon \sin kx$)가 부가되었

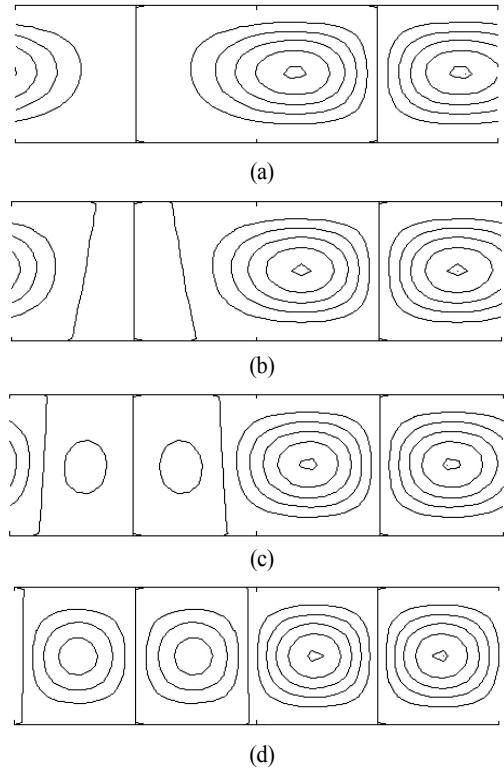


Fig. 3 Variation of flow patterns with respect to Ra when $k=1.5$: (a) $Ra=1720$; (b) $Ra=1725$; (c) $Ra=1730$; (d) $Ra=1740$. The domain of x is $0 \leq x \leq 2\pi/k$

으므로 정지 상태가 존재하지 않고 아주 작은 Rayleigh 수에서도 유동이 일어난다.

작은 Rayleigh 수의 전도 영역에서의 표준적인 해로써 Fig 2에 $k=3$ 에 대하여 $Ra=100$ 에서의 유선과 등온선을 도시하였다. $k=3$ 일 때 종횡비 $2\pi/k \approx 2.1$ 이 된다. Ra 가 작을 때는 불균일 온도에 의해 유동이 일어나지만 그 세기가 약하므로 전도 영역의 등온선은 거의 수평이다(Fig. 2(b)). 그러나 일정 벽면온도를 갖는 Rayleigh-Bénard 문제에서의 전도 상태의 온도분포($\theta_B=1-y$)를 제거한 온도 분포 $\phi(x,y) = \theta(x,y) - \theta_B = \theta(x,y) + y - 1$ 를 도시한 Fig 2(c)는 위 평판에 존재하는 불균일 온도 분포의 영향을 잘 보여준다.

Rayleigh 수가 작을 때는 Fig. 2와 같이 한 주기 ($0 \leq x \leq 2\pi/k$)에 걸쳐 2개의 소용돌이를 갖는 유동이 일어난다. $k \geq 3$ 에서는 Rayleigh 수를 증가시켜도 $Ra \leq 10^4$ 에서는 전도 영역의 유동보다 많은 수의 소용돌이를 갖는 다수셀 유동(multicellular flow)이 발견되지 않았다. 그러나 k 가 작을 때는 Rayleigh 수를 증가시키면 열적인 불안정성의 증대와

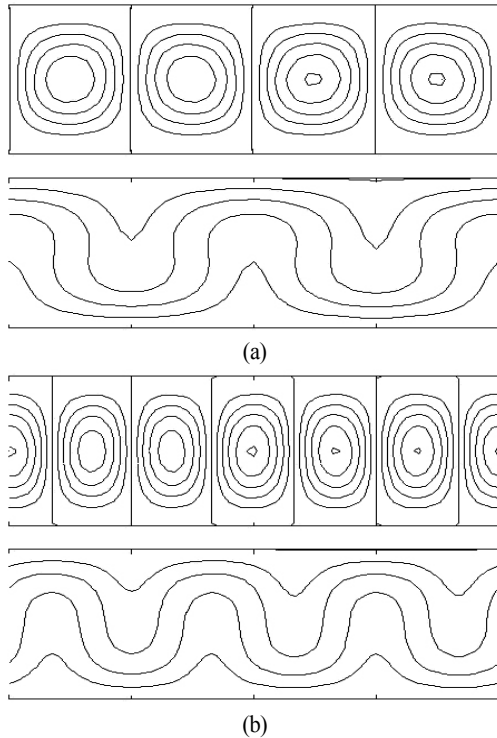


Fig. 4 Streamlines and isotherms of dual solutions at $k = 1.5$ and $Ra = 4000$. The flows of (a), (b) have 4 and 6 cells over one wave length, respectively. The domain of x is $0 \leq x \leq 2\pi/k$

함께 강한 대류가 일어나게 된다.

먼저 작은 파동수 $k = 1.5$ 에 대하여 Rayleigh 수에 따른 유동 형태의 변화 양상을 Fig. 3에 도시하였다. $k = 1.5$ 일 때 종횡비 $2\pi/k \approx 4.2$ 가 된다. Rayleigh 수가 증가하여도 $Ra = 1720$ 까지는 2개의 큰 셀을 갖는 전도 상태 유동형태가 유지된다(Fig. 3(a)). 그러나 $Ra = 1725$ 에서는 $x = \pi/2k$ 부근에서 2개의 셀이 새로 형성된다(Fig. 3(b)). 그리고 이 셀들이 점점 자라서(Fig. 3(c)) 마침내 Fig. 3(d)와 같이 거의 같은 크기의 4개의 셀을 갖는 다수 셀 대류(multicellular convection)가 일어난다. Fig. 3의 유동은 모두 $x = \pi/2k$ 와 $x = 3\pi/2k$ 에 대하여 좌우대칭이다.

Fig. 3는 2개의 셀을 갖는 전도 상태의 유동으로부터 4개의 셀을 갖는 유동으로의 천이 현상을 보여주고 있다. 본 연구에서 흥미로운 것은 이와 같이 다수 셀 대류가 일어나는 곳에서는 초기조건에 따라 여러 가지의 다중해가 발견되었다는 것이다.

Fig. 4에 $k = 1.5$, $Ra = 4000$ 에서 발견된 2개의 해를 나타내었다. $k = 1.5$ 에서는 4개와 6개의 셀을 갖는 이중해가 존

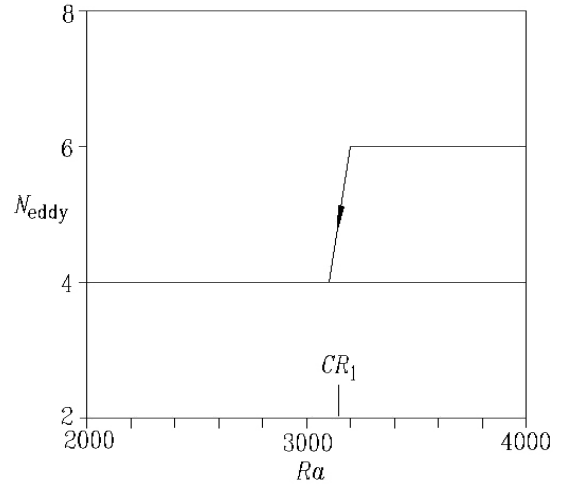


Fig. 5 Bifurcation diagram for $k = 1.5$. The flows are classified by the number of eddies (N_{eddy}) over one wave length. $Ra = CR_1$ represent a critical Rayleigh number at which $6 \rightarrow 4$ eddy flow occurs

재한다. Fig. 4와 같이 4, 6 개의 셀을 갖는 유동을 각각 4, 6 eddy(소용돌이) 유동으로 부르기로 하겠다. 이와 같이 소용돌이 수로써 유동 형태를 구분하여 $Ra \geq 2000$ 에서의 유동 분기 현상을 Fig. 5에 나타내었다.

Fig. 5는 다음과 같은 현상을 보여주고 있다. 4 eddy 유동을 초기조건으로 사용하면 언제나 4 eddy 유동이 얻어진다. 그러나 6 eddy 유동을 초기조건으로 하면 $Ra = CR_1$ 에서 4 eddy 유동으로 변화한다. 즉 Rayleigh 수의 감소에 따라 $6 \rightarrow 4$ eddy 유동으로의 천이가 일어나지만 Rayleigh 수가 증가하여도 $4 \rightarrow 6$ eddy 유동으로의 천이는 일어나지 않는다. 이에 따라 $Ra > CR_1$ 에서는 4 eddy 유동과 6 eddy 유동이 공존하고 $2000 \leq Ra < CR_1$ 에서는 4 eddy 유동만 존재한다. 임계 Rayleigh수 CR_1 의 범위는 $3100 < CR_1 < 3200$ 이다(Table 1).

$k = 1.5$ 에서의 Rayleigh 수에 따른 평균 Nusselt 수(\overline{Nu})를 구하여 Fig. 6에 도시하였다. 이중해가 존재하는 영역에서 언

Table 1 The number of solutions and the corresponding flow patterns as a function of Ra when $k = 1.5$. The flow patterns are discriminated by the number of cells(eddies) over one wave length

Rayleigh number	No. of solutions	Number of cells(eddies) in the solutions
$3200 \leq Ra \leq 5000$	2	4, 6
$1750 \leq Ra \leq 3100$	1	4
$Ra \leq 1700$	1	2

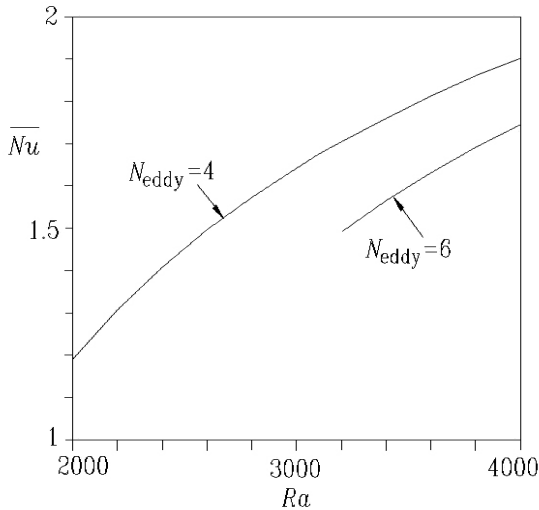


Fig. 6 Mean Nusselt number (\overline{Nu}) as a function of Rayleigh number at $k = 1.5$

제나 4 eddy 유동이 6 eddy 유동보다 큰 \overline{Nu} 의 값을 가진다. $k = 1.5$ 일 때 종횡비 $2\pi/k \approx 4.2$ 이므로 정방향에 가까운 4 eddy 유동의 Nusselt 수가 더 크다는 것을 알 수 있다.

$k = 1.5$ 에서는 이중해가 발견되었는데 더욱 더 작은 파동 수 $k = 0.75$ 에서는 여러 종류의 해가 발견되었다. 먼저 Fig. 7에 $k = 0.75$, $Ra = 8000$ 에서 발견한 5개의 해를 도시하였다. Fig. 7은 한 주기에 걸쳐 6, 8, 10, 12, 14 개의 소용돌이를 가지는 유동을 보여주고 있다. 이와 같이 한 시스템에서 일어나는 여러 가지 현상은 매우 흥미 있는 것으로서 여러 종류의 유체역학 문제에서 많이 연구되어 왔다[9-12]. 유체 유동을 지배하는 방정식은 비선형이므로 다중해가 존재할 수 있다. 한편 Yoo[4]는 아래 평판이 불균일 온도를 가지고 있을 때 $Pr = 0.7$ (공기)의 자연대류를 조사하여 3중해를 관찰하였다. 본 연구에서는 $Pr = 7$ 에서의 다중해를 조사하였다. Prandtl

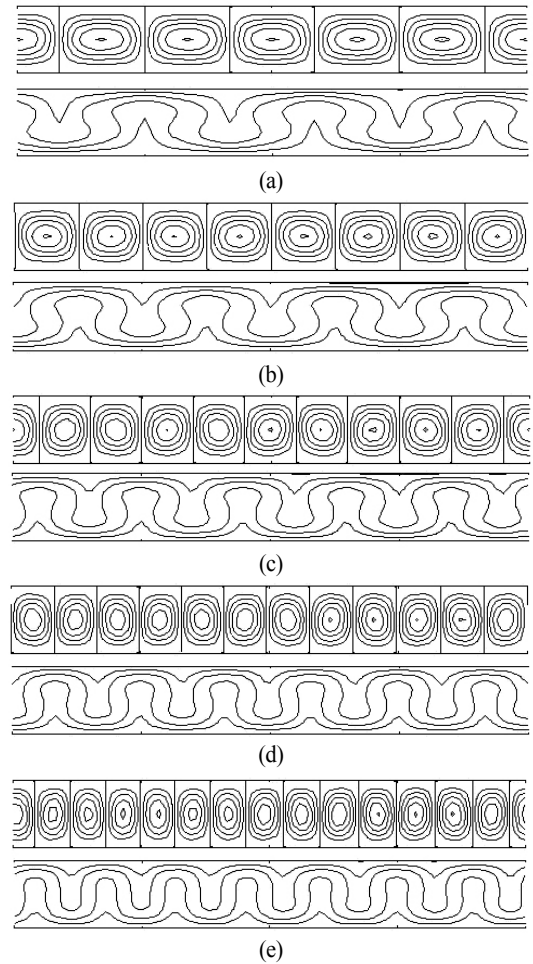


Fig. 7 Streamlines and isotherm patterns showing five multiple solutions at $k = 0.75$ and $Ra = 8000$. The domain of x is $0 \leq x \leq 2\pi/k$. The flows of (a), (b), (c), (d), (e) have 6, 8, 10, 12 and 14 cells over one wave length, respectively

Table 2 The number of solutions and the corresponding flow patterns as a function of Rayleigh number at $k = 0.75$. The flow patterns are discriminated by the number of cells(eddies) over one wave length

Rayleigh number	No. of solutions	Number of cells(eddies) in the solutions
$7500 \leq Ra \leq 10^4$	5	6, 8, 10, 12, 14
$3800 \leq Ra \leq 7400$	4	6, 8, 10, 12
$2500 \leq Ra \leq 3700$	3	6, 8, 10
$2200 \leq Ra \leq 2400$	2	8, 10
$1750 \leq Ra \leq 2100$	1	8
$Ra \leq 1700$	1	2

수가 증가하면 유체의 점성력이 증가하므로 Prandtl 수는 자연 대류 유동 형태에 영향을 미칠 수 있다[10]. Prandtl 수의 변화에 따른 다중해의 특성을 살펴보는 것이 하나의 주제가 된다.

여러가지 조건에서 $k = 0.75$ 일 때 다중해(multiple solutions)의 존재를 조사하여 그 결과를 Table 2에 나타내었다. Table 2는 Rayleigh 수에 따라 발견된 2중해, 3중해, 4중해 및 5중해와 같은 다양한 종류의 다중해를 보여준다.

이와 같이 여러 가지의 다중해가 발견됨에 따라 $k = 0.75$ 에서는 다소 복잡한 유동의 분기 현상이 관찰되었다. Fig. 7과 같이 6, 8, 10, 12, 14개의 셀을 갖는 유동을 각각 6, 8, 10, 12, 14 eddy 유동으로 부르기로 하겠다. 소용돌이 수(N_{eddy})로써

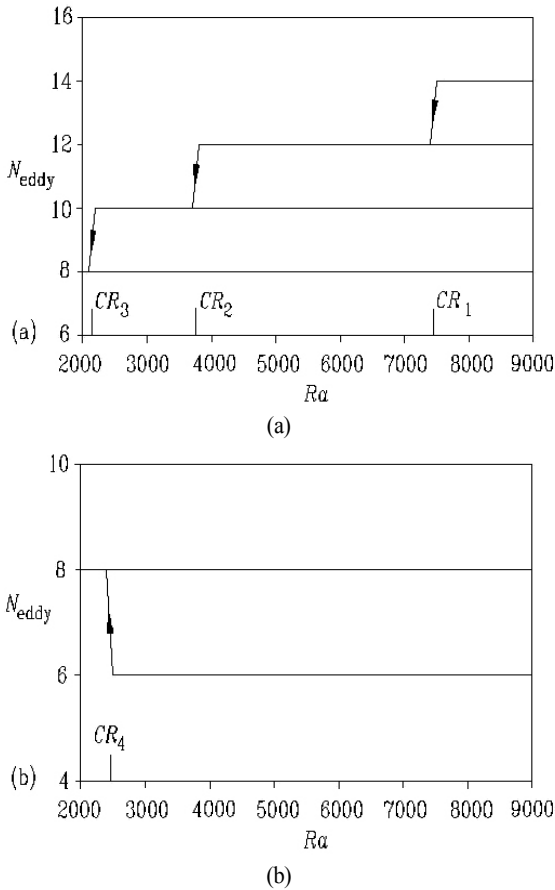


Fig. 8 Bifurcation diagram for $k = 0.75$. The flows are classified by the number of eddies (N_{eddy}) over one wave length. $Ra = CR_1, CR_2, CR_3, CR_4$ represent critical Rayleigh numbers at which a transition of flow pattern occurs

유동 형태를 구분하여 $Ra \geq 2000$ 에서의 유동 분기 현상을 Fig. 8에 나타내었다.

$k = 0.75$ 일 때 $7500 \leq Ra \leq 10^4$ 에서는 6, 8, 10, 12, 14 eddy 유동이 모두 존재한다. 그러나 Ra 를 감소시키면 CR_1 에서 14 eddy 유동이 12 eddy 유동으로 변화한다. 그리고 더욱 더 Ra 를 감소시키면 CR_2 에서 12 eddy 유동이 10 eddy 유동으로 변화하고, CR_3 에서 10 eddy 유동이 8 eddy 유동으로 변화한다(Fig. 8(a)). 이와 같은 유동 형태의 천이가 일어나는 임계 Rayleigh 수의 범위는 각각 $7400 < CR_1 < 7500$, $3700 < CR_2 < 3800$, $2100 < CR_3 < 2200$ 이다. Ra 를 감소시키면 이상과 같은 유동 형태의 천이가 일어나지만 Ra 를 증가시키면 8, 10, 12, 14 eddy 유동은 모두 같은 형태의 유동을 유지한다. 즉, Ra 의 증가에 따라 $8 \rightarrow 10$, $10 \rightarrow 12$,

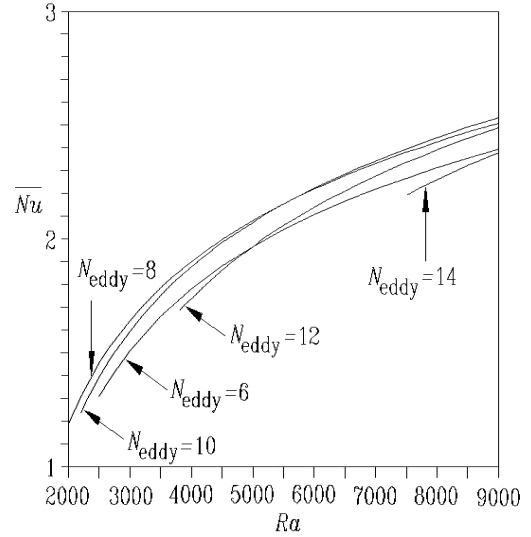


Fig. 9 Mean Nusselt number (\overline{Nu}) as a function of Rayleigh number at $k = 0.75$.

12 \rightarrow 14 유동으로의 천이는 일어나지 않는다.

한편 Fig. 8(b)는 Ra 가 감소함에 따라 6 \rightarrow 8 eddy 유동으로의 천이가 일어난다는 것을 보여준다. 유동의 천이가 일어나는 임계 Rayleigh 수 CR_4 는 $2400 < CR_4 < 2500$ 의 범위에 있다. 자연대류 문제에서는 일반적으로 Ra 가 증가함에 따라 더 많은 소용돌이가 발생한다. 그런데 Fig. 8(b)의 분기 현상은 Ra 가 감소함에 더 많은 소용돌이가 형성되는(6 \rightarrow 8 eddy) 유동으로 천이가 일어날 수 있다는 것을 말하고 있다. Fig. 8은 자연대류 문제에서 흔히 볼 수 없는 다양한 분기 현상을 보여주고 있다.

끝으로 Fig. 9에 $k=0.75$ 에서의 Rayleigh 수에 따른 평균 Nusselt 수(\overline{Nu})의 거동을 도시하였다. $k=0.75$ 일 때 종횡비 $2\pi/k \approx 8.4$ 이므로 정방형 셀에 가장 가까운 유동은 8 eddy 유동이다. 그리고 다중해가 존재하는 영역에서 전체적으로 8 eddy 유동의 \overline{Nu} 가 가장 큰 값을 가진다. 8 eddy 유동과 10 eddy 유동은 거의 같은 \overline{Nu} 의 값을 가지며, $Ra > 6000$ 에서는 10 eddy 유동이 8 eddy 유동보다 더 큰 값을 가진다. $Ra = 9000$ 에서 8 eddy 유동과 10 eddy 유동의 \overline{Nu} 는 각각 2.51과 2.53이다. 6 eddy 유동과 12 eddy 유동이 공존할 때 $Ra < 4500$ 에서에서는 6 eddy 유동의 \overline{Nu} 가 12 eddy 유동의 값보다 크며, $Ra > 5000$ 에서는 12 eddy 유동이 더 큰 값을 가진다. 5중해가 존재할 때 14 eddy 유동의 \overline{Nu} 가 가장 작다. 그리고 8, 10, 12 eddy 유동은 거의 같은 값을 가지며 6, 14 eddy 유동은 상대적으로 작은 값을 가진다.

4. 결 론

위 평판이 작은 크기의 불균일 온도 분포($\epsilon \sin kx$)를 가지고 있는 두 수평 평판 사이에서 일어나는 물($Pr = 7$)의 자연 대류 현상을 수치적으로 조사하였다. 파동수 $k = 1.5$ 일 때 Rayleigh 수를 증가시키면 어떤 임계값 이상에서 다수 셀 대류(multicellular convection)가 일어나며 한 주기에 걸쳐 4, 6 개의 셀을 가지는 이중해가 존재한다. $k = 1.5$ 에서 Rayleigh 수를 감소시키면 $6 \rightarrow 4$ eddy 유동으로의 천이가 일어난다. 그러나 Rayleigh 수를 증가시켜도 $4 \rightarrow 6$ eddy 유동으로의 천이는 일어나지 않는다. $k = 0.75$ 에서는 2중해, 3중해, 4중해 및 5중해가 발견되었다. $k = 0.75$ 에서 Rayleigh 수를 감소시키면 $14 \rightarrow 12$, $12 \rightarrow 10$, $10 \rightarrow 8$ eddy 유동으로의 천이가 일어난다. 특히 $k = 0.75$ 에서 Rayleigh 수의 감소와 함께 $6 \rightarrow 8$ eddy 유동으로의 천이 현상이 발견되었다. Rayleigh 수를 증가시켜도 $8 \rightarrow 6$ eddy 유동으로의 천이는 일어나지 않는다.

후 기

이 논문은 2014학년도 안동대학교 학술연구조성비(연구교수)에 의하여 연구되었음.

References

- [1] 1981, Busse, F.H., "Transition to Turbulence in Rayleigh-Bénard Convection," *In Topics in Applied Physics*, Vol.45, Edited by Swinney, H.L. and Gollub, J.P.. Springer-Verlag, pp.97-137.
- [2] 1991, Yoo, J.-S. and Kim, M.-U., "Two-Dimensional Convection in a Horizontal Fluid Layer with Spatially Periodic Boundary Temperatures," *Fluid Dynamics Research*, Vol.7, pp.181-200.
- [3] 2004, Yoo, J.-S. and Kim, Y.-J., "An anomalous bifurcation in natural convection between two horizontal plates with periodic temperatures," (in Korean) *Journal of Computational Fluids Engineering*, Vol.9, No.4, pp.181-200.
- [4] 2013, Yoo, J.-S., "Natural convection between two horizontal plates with small magnitude non-uniform temperature in the lower plate : $Pr=0.7$," (in Korean) *Journal of Computational Fluids Engineering*, Vol.18, No.2, pp.35-40.
- [5] 1996, Bradean, R., Ingham, D.B., Heggs, P.J. and Pop, I., "Buoyancy-induced flow adjacent to a periodically heated and cooled horizontal surface in porous media," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.39, No.3, pp.615-630.
- [6] 2003, Yoo, J.-S. and Schultz, W.W., "Thermal convection in a horizontal porous layer with spatially periodic boundary temperatures: small Ra flow," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.46, No.24, pp.4747-4750.
- [7] 1982, Drazin, P. and Reid, W., *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press.
- [8] 1985, Napolitano, M. and Quartapelle, L., "Block ADI Methods for steady natural convection in two dimensions," *in Numerical Methods in Heat and Mass Transfer*, Vol.3, John Wiley and Sons.
- [9] 1982, Benjamin, T.B. and Mullin, T., "Notes on the Multiplicity of Flows in the Taylor Experiment," *J. Fluid Mech.*, Vol.121, pp.219-230.
- [10] 1999, Yoo, J.-S., "Prandtl number effect on bifurcation and dual solutions in natural convection in a horizontal annulus," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.42, pp.3275-3286.
- [11] 2003, Erenburg, V., Gelfgat, A.Yu., Kit, E., Bar-Yaseph, P.Z. and Solan, A., "Multiple States, Stability and Bifurcations of Natural Convection in a Rectangular Cavity with Partially Heated Vertical Walls," *J. Fluid Mech.*, Vol.492, pp.63-89.
- [12] 2015, Hu, Y., Li, D., Shu, S. and Niu, X.D., "Study of Multiple Steady Solutions for the 2D Natural Convection in a Concentric Horizontal Annulus with a Constant Heat Flux Walls using Immersed Boundary-Lattice Boltzmann Method," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol.81, pp.591-601.