

# 수정 뉴토니안 방법을 이용한 평형유동 해석 프로그램 개발

최재혁<sup>\*,1)</sup>

<sup>1)</sup> 국방과학연구소 제1기술연구본부

## Development of Equilibrium Flow Calculation Program Using a Modified Newtonian Method

Jaehyeok Choi<sup>\*,1)</sup>

<sup>1)</sup> The 1st Research and Development Institute, Agency for Defense Development, Korea

(Received 23 December 2015 / Revised 20 April 2016 / Accepted 8 July 2016)

### ABSTRACT

A simple aerodynamic calculation program for high Mach number flow is developed by combining the modified Newtonian method with Tannehill's curve fits for the thermodynamic properties of air in equilibrium state. Aerodynamic characteristics for a parabolic nose are predicted and compared with CFD(Computational Fluid Dynamics) analysis results. Comparison shows good agreements, and the developed program is expected to be a practical tool for slender body aerodynamic calculation for high Mach number flow.

Key Words : Modified Newtonian Technique, Aero-thermodynamics, Equilibrium Air

### 기호 설명

$a$  : Speed of sound       $e$  : Internal energy  
 $h$  : Enthalpy             $p$  : Pressure  
 $T$  : Temperature         $V$  : Velocity  
 $\rho$  : Density               $\theta$  : Surface inclination angle  
 $M$  : Mach number        $\alpha$  : Angle of attack  
 $\phi$  : Circumferential angle    $C_p$  : Pressure coefficient  
 $C_{P_{max}}$  : Pressure coefficient at stagnation point

### 아래첨자

$c$  : Curve fitting equation       $h$  : Enthalpy  
 $s$  : Entropy                         $\infty$  : Freestream

### 1. 서론

공기의 98 %는 이원자 분자인 질소분자( $N_2$ ), 산소 분자( $O_2$ )로 구성되어 있다. 그러므로 공학적인 관점에서 해리(dissociation)가 발생하지 않는 경우, 공기는 모두 이원자 분자로 구성되었다고 가정할 수 있다. 공기를 구성하는 이원자 분자들은 600 °K 아래에서는 병

\* Corresponding author, E-mail: choijh@add.re.kr  
Copyright © The Korea Institute of Military Science and Technology

진 운동 및 회전 운동을 한다. 이 경우, 원자들간의 인력과 반력을 무시할 수 있고, 열량적 완전기체로 가정할 수 있다. 그러나 보다 온도가 높아질 경우, 분자들의 진동이 활성화 되고, 2500 °K 이상에서는 내부 에너지의 약 90 %를 분자들의 진동에너지로부터 얻게 된다. 그리고 공기가 2000 °K 이상 가열되면 화학 반응이 발생하고 분자들이 해리(dissociation)되기 시작하며, 8000 °K 이상이 되면 원자의 이온화가 발생한다. 이런 기체 분자들의 진동, 화학반응, 해리, 전자의 활성화 및 이온화 등의 실제 기체 효과가 존재하는 초고속 유동에서 기체는 완전기체 상태식을 따르지 않게 된다<sup>[1-3]</sup>. 이와 같은 실제기체 유동장 해석은 CFD 기법을 이용한 방법이 많이 연구되어 왔으나, 화학반응을 동반한 유동장 해석에 장시간이 소요된다는 단점이 있다.

본 연구에서는 초음속 이상의 공력해석 기법으로 local surface inclination pressure methods 중의 하나인 수정뉴토니안 방법과 Tannehill 등<sup>[4]</sup>의 평형기체 근사식을 이용하여 실제기체 효과를 고려한 공력해석 프로그램을 개발하였다. 이러한 방법은 고마하수에서 비교적 정확도가 높고, 계산시간이 매우 짧아 초기단계 공력설계 및 신속한 공력해석에 유용한 것으로 알려져 있다<sup>[5-13]</sup>.

## 2. 해석 방법

평형유동 조건에서 기체는 완전기체 상태식을 따르지 않고 비열비(Specific heat ratio)가 일정하지 않으므로, 충격과 이후 유동 특성들은 마하수만으로 결정되지 않는다. 따라서 본 연구에서는 충격과 이후의 유동 과정들에서 물리적 조건을 만족시키는 평형 기체 상태점을 찾는 방법의 해석 프로그램을 개발하였다.

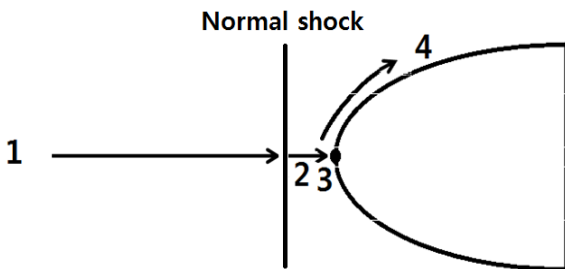


Fig. 1. Schematic of flowfield

Fig. 1은 공력해석 과정을 나타낸 도식도이다. 1 지점은 자유류, 2 지점은 수직 충격과 이후 유동, 3 지점은 정체점, 4 지점은 물체 표면을 따르는 유동이다.

### 2.1 수직 충격과 전·후 과정(1→2)

수직 충격과 전·후 과정에서 연속 방정식을 수직 충격과 이후 유동의 속도( $V_2$ )에 대해 정리하여 운동량 방정식 및 에너지 방정식에 대입하면 식 (1) 및 식 (2)가 된다.

$$p_2 = p_1 + \rho_1 V_1^2 (1 - \rho_1 / \rho_2) \quad (1)$$

$$h_2 = h_1 + \frac{V_1^2}{2} (1 - (\rho_1 / \rho_2)^2) \quad (2)$$

수직 충격과 이후 유동의 밀도( $\rho_2$ )를 임의로 가정하여 운동량 방정식(식 (1))으로부터 압력( $p_2$ )을, 에너지 방정식(식 (2))으로부터 엔탈피( $h_2$ )를 계산한다. 그리고 Tannehill 등<sup>[4]</sup>의 평형기체 근사식으로부터 엔탈피( $h_c(p_2, \rho_2)$ )를 산출하고, 이 엔탈피와 에너지 방정식으로부터 계산된 엔탈피의 차이를 식 (3)과 같이 정의한다. 이 차이가 수렴 기준값 이하가 되지 않으면 secant method(식 (4))를 이용하여 다시 밀도( $\rho_2$ )를 추정한다. 수렴 조건이 만족될 때까지 secant method(식 (4))를 이용한 밀도 추정을 반복한다. 이 과정은 Fig. 2의 flow chart와 같다.

$$\eta = \frac{(h_c(p_2, \rho_2) - h_2)}{h_2} \quad (3)$$

$$\rho_2^{i+1} = \left| \frac{\eta^{i-1} \rho_2^i - \eta^i \rho_2^{i-1}}{\eta^i - \eta^{i-1}} \right| \quad (4)$$

수직 충격과 이후 유동의 밀도( $\rho_2$ ), 압력( $p_2$ ), 엔탈피( $h_2$ )가 산출되면 엔탈피 정의(식 (5))로부터 내부에너지를 계산한 후, 평형기체 근사식으로부터 엔트로피( $s_2 = s_c(e_2, \rho_2)$ ), 온도( $T_2 = T_c(p_2, \rho_2)$ ), 음속( $a_2 = a_c(e_2, \rho_2)$ )을 산출하고, 연속방정식으로부터 수직 충격과 후 지점의 평형기체 유속을 산출한다.

$$e_2 = h_2 - p_2 / \rho_2 \quad (5)$$

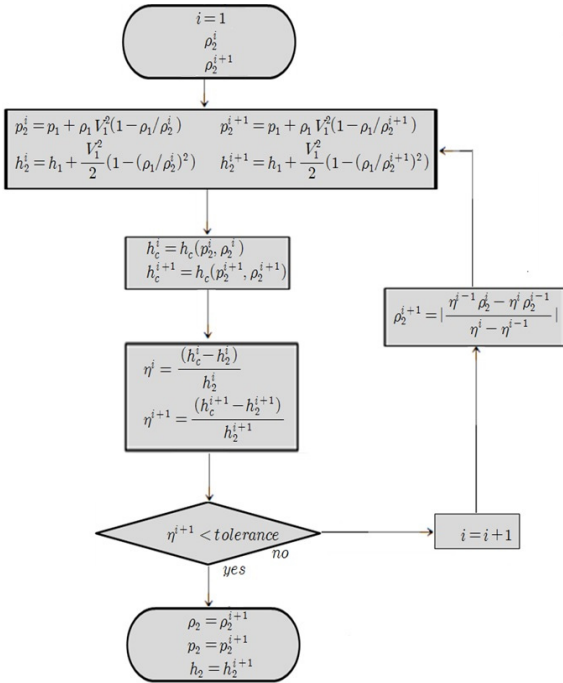


Fig. 2. Calculation of post-shock condition

2.2 정체점 특성(2→3)

전 엔탈피는 보존되므로 정체점(stagnation point)에서 엔탈피는 에너지 방정식(식 (6))으로부터 계산될 수 있다. 그리고 수직 충격파 이후에서 정체점으로의 유동 과정은 등엔트로피 과정( $s_3 = s_2$ )으로 가정할 수 있으므로 정체점에서 유동의 엔트로피를 알 수 있다.

$$h_3 = h_2 + \frac{V_2^2}{2} \quad (6)$$

정체점에서 유동의 압력과 밀도를 가정하고 secant method(식 (7)~(8))로 엔탈피( $h_3$ ) 및 엔트로피( $s_3$ ) 조건을 만족시키는 평형기체 압력과 밀도를 추정해 나간다. Fig. 3과 같은 엔탈피 matching 방법으로 압력을 산출하는데, 이 과정에서 Fig. 4와 같은 엔트로피 matching 방법으로 밀도를 산출한다.

$$\rho_3^{j+1} = \left| \frac{\eta_s^{j-1} \rho_3^j - \eta_s^j \rho_3^{j-1}}{\eta_s^j - \eta_s^{j-1}} \right| \quad (7)$$

$$\left( \text{여기서, } \eta_s = \frac{(s_c(e_2, \rho_2) - s_2)}{s_2} \right)$$

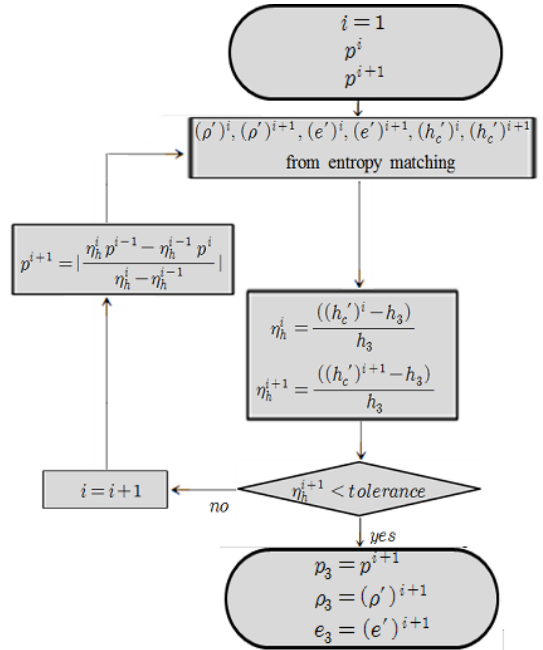


Fig. 3. Enthalpy matching method

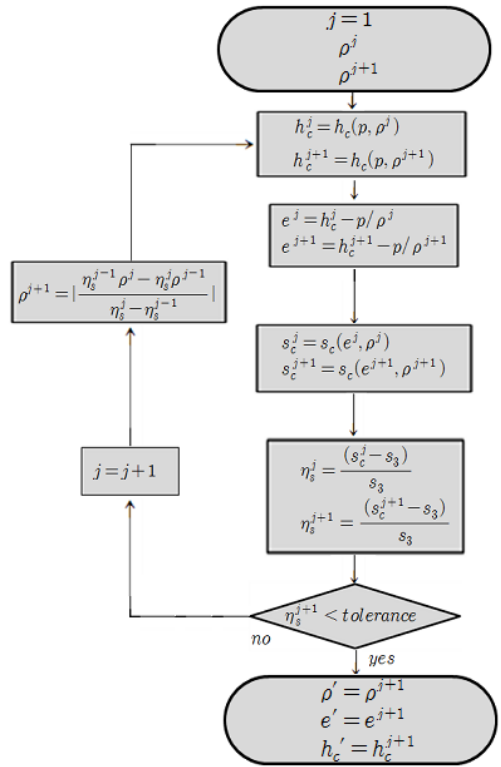


Fig. 4. Entropy matching method

$$p_3^{i+1} = \left| \frac{\eta_h^{i-1} p_3^i - \eta_h^i p_3^{i-1}}{\eta_h^i - \eta_h^{i-1}} \right| \quad (8)$$

(여기서,  $\eta_h = \frac{(h_c(p_2, \rho_2) - h_2)}{h_2}$ )

산출된 압력, 밀도, 엔탈피, 내부에너지를 평형기체 근사식에 대입하여 온도( $T_3 = T_c(p_3, \rho_3)$ ), 음속( $a_3 = a_c(e_3, \rho_3)$ )을 산출한다.

2.3 물체 표면 공력 해석(3→4)

정체 압력이 계산되면 최대 압력계수( $C_{P_{max}}$ )가 산출되고, 수정 뉴토니안 방법<sup>[1-3]</sup>을 이용하여 물체 표면에 작용하는 압력을 산출할 수 있다.

기울어진 평판에 유동이 흐를 때, 평판에 작용하는 힘은 유동의 운동량 변화와 같고(식 (9)), 압력 계수로 표현하면 식 (10)과 같다. 이를 뉴토니안 방법이라 하고, 충격과 강도가 강한 고속유동에서 정확도가 높은 방법으로 알려져 있다.

$$F = \rho_\infty V_\infty^2 \sin^2 \theta \quad (9)$$

$$C_P = 2 \sin^2 \theta \quad (10)$$

Lester Lees는 뉴토니안 방법에서 수직 충격과 뒤의 정체압력에 대한 압력 계수를 사용하는 수정안(식 (11))을 제시하였다<sup>[1-3]</sup>. 이를 수정 뉴토니안 방법이라 한다.

$$C_P = C_{P_{max}} \sin^2 \theta \quad (11)$$

3차원 상에서 국부 기울기는 Fig. 5의 유동 벡터(식 (12))와 표면의 수직 벡터(식 (13))로부터 식 (14)와 같이 계산될 수 있다<sup>[14]</sup>.

$$\vec{f} = (-\cos \alpha, 0, \sin \alpha) \quad (12)$$

$$\vec{n} = (\sin \theta, \cos \theta \sin \phi, \cos \theta \cos \phi) \quad (13)$$

$$\vec{f} \cdot (-\vec{n}) = \sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha \cos \phi \quad (14)$$

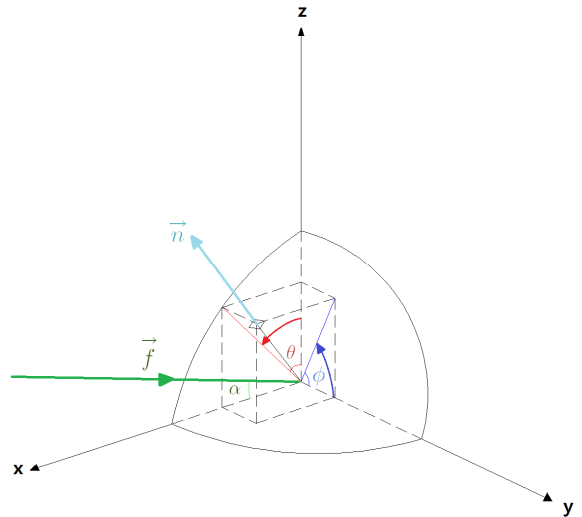


Fig. 5. Flow and normal vectors around the surface

국부 표면 압력 계수는 식 (15)과 같이 계산된다.

$$C_P = C_{P_{max}} [\vec{f} \cdot (-\vec{n})]^2 \quad (15)$$

$$= C_{P_{max}} (\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha \cos \phi)^2$$

국부 압력 계수로부터 국부 압력  $p_4(x, y, z)$ 는 식 (16)과 같이 계산한다.

$$p_4(x, y, z) = (p_3 - p_1) (\sin \theta \cos \alpha - \cos \theta \sin \alpha \cos \phi)^2 + p_1 \quad (16)$$

그리고 물체 표면상의 유동은 화학적 평형 및 단일 상태(등엔트로피 과정( $s_4 = s_3$ ))로 가정하여, 정체점에서 유동 밀도 산출을 위해 이용하였던 엔트로피 matching 방법으로 밀도를 산출한다.

산출된 정체점에서 유동 압력, 밀도, 내부 에너지를 평형기체 근사식에 대입하여 온도( $T_4 = T_c(p_4, \rho_4)$ ), 음속( $a_4 = a_c(e_4, \rho_4)$ )을 산출하고, 식 (17)-(18)으로 부터 유속 및 마하수를 산출한다.

$$V_4 = \sqrt{2(h_3 - h_4)} \quad (17)$$

$$M_4 = V_4/a_4 \quad (18)$$

### 3. 해석 성능 검증

뉴토니안 방법은 무딘 물체에 대한 공력해석에 높은 정확도를 가진다. 따라서 해석성능 검증을 위해  $x=0.6y^2$  ( $0 \leq x \leq 2.4$ ) 함수 관계를 갖는 무딘 형상의 parabolic nose(Fig. 6)에 대한 공력해석을 수행하고 CFD(Computational Fluid Dynamics) 해석 결과와 비교하였다. 그리고 열량적 완전기체 경우의 수정 뉴토니안 방법과 비교하여 실제기체 효과를 확인하였다. 해석에서 자유류 조건은 실제 기체 효과가 존재하는 극초음속 유동 조건으로 참조문헌 [15]를 참고하여 Table 1과 같이 정하였다.

CFD 해석은 비점성 정상상태 해석이며, 상용 프로그램 STAR-CCM+을 이용하였다. STAR-CCM+를 이용한 평형 유동 해석에서도 본 연구에서 사용되는 평형기체 근사식이 이용된다.

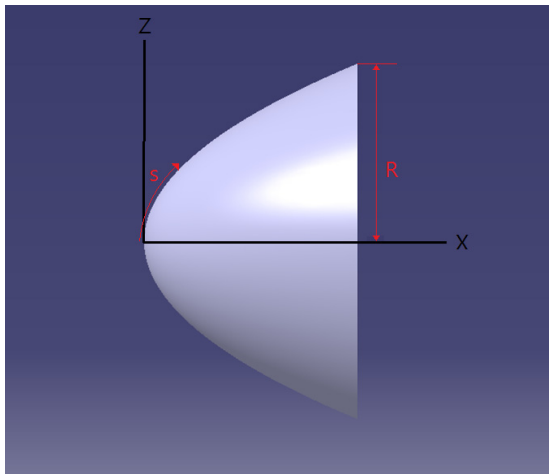


Fig. 6. Geometry of the blunt nose

Table 1. Freestream properties

Conditoin	Altitude (km)	Mach	Pressure (pa)	Density (kg/m <sup>3</sup> )	Temperature (K)
A	15	10	12109.94	0.1947	216.65
B	30	15	1196.70	0.0184	226.51

해석 결과는 Table 2~3, Fig. 7~14와 같고, 본 연구의 공력해석 기법이 높은 정확도를 갖는 것을 확인할 수 있다.

#### 3.1 수직 충격파 전·후 과정 공력해석 결과(1→2)

실제기체 효과로 인해 평형 유동과 열량적 완전기체 유동의 수직 충격파 이후 열적 특성(Table 2)은 큰 차이를 보이고, 실제기체 효과에 가장 민감한 유동 특성은 온도이다. 열량적 완전기체 유동의 경우, 자유류 운동에너지는 충격파를 지나면서 대부분 기체 분자의 병진·회전 에너지로 전환되는데, 실제기체 효과가 존재하는 평형 유동에서는 진동에너지 여기 및 화학반응(충격파 과정에서 화학반응은 흡열 반응)으로 인해 충격파 이후 유동 기체 분자의 병진·회전 운동에너지는 열량적 완전기체 유동에 비해 감소한다. 기체 분자들의 평균 병진 운동에너지가 기체 온도의 척도이므로 평형 유동의 온도는 열량적 완전기체 유동의 온도보다 낮아지게 된다. 온도와는 대조적으로 압력에서는 실제기체 효과에 의한 차이가 크지 않다. 압력은 주로 유동의 유체역학적 특성에 지배를 받기 때문이다. 밀도의 경우, 분자들의 해리가 발생되면 분자 mole 수가 증가하게 되므로 평형 유동의 밀도는 열량적 완전기체 유동의 밀도보다 높아지게 된다. 그리고 자유류 속도 및 비행 고도가 증가할수록 평형유동에서 기체 분

Table 2. Comparison of post-shock results

	A			B		
	Equilibrium air		Calorically perfect air	Equilibrium air		Calorically perfect air
	CFD	Present method		CFD	Present method	
$p_2/p_1$	122.734	123.063	116.500	287.093	285.270	262.333
$\rho_2/\rho_1$	7.766	7.806	5.714	10.328	10.254	5.870
$T_2/T_1$	15.404	15.296	20.387	22.969	22.930	44.694
$M_2$	0.35284	0.34965	0.38757	0.31065	0.30592	0.38226

Table 3. Comparison of stagnation point results

	A			B		
	Equilibrium air		Frozen flow	Equilibrium air		Frozen flow
	CFD	Present method		CFD	Present method	
$p_3/p_1$	132.825	132.493	132.980	298.688	301.074	301.823
$\rho_3/\rho_1$	8.355	8.304	8.294	10.677	10.729	10.743
$T_3/T_1$	15.486	15.462	15.817	23.071	23.098	23.384

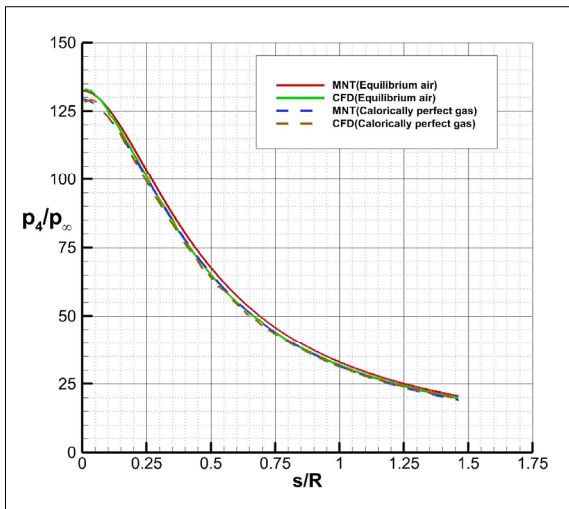


Fig. 7. Surface pressure distribution for condition A

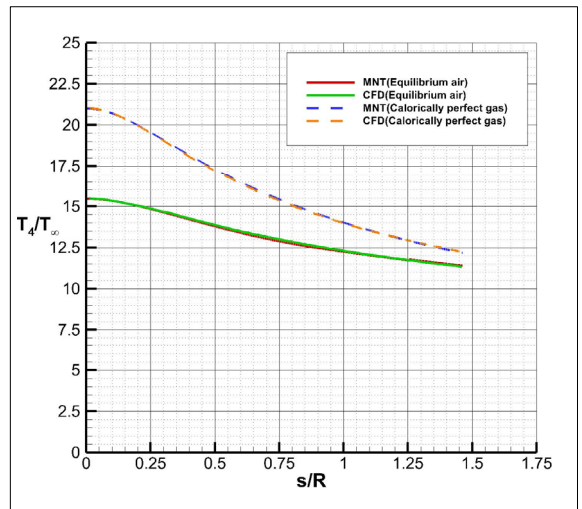


Fig. 9. Surface temperature distribution for condition A

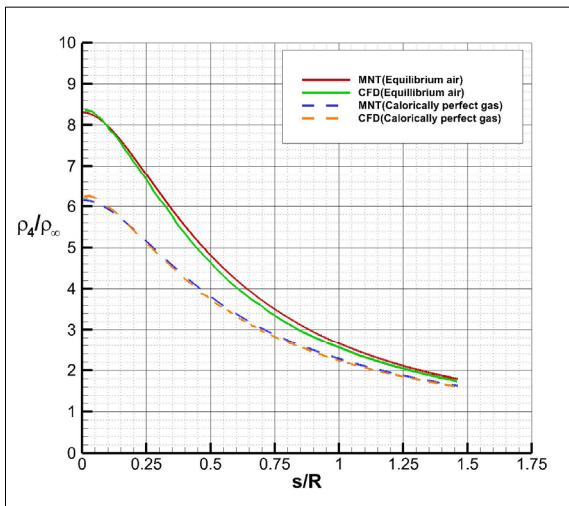


Fig. 8. Surface density distribution for condition A

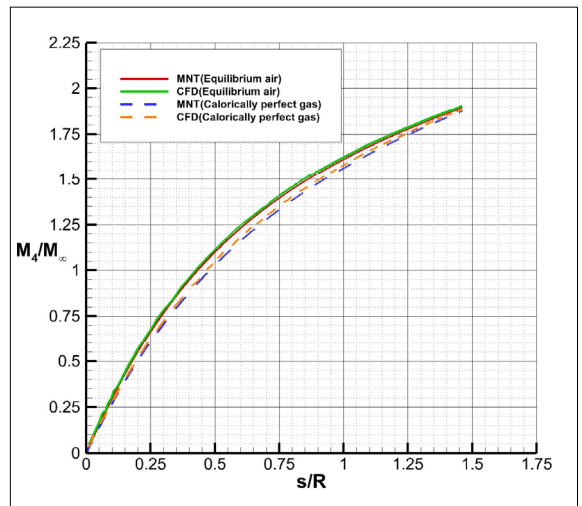


Fig. 10. Surface Mach number distribution for condition A

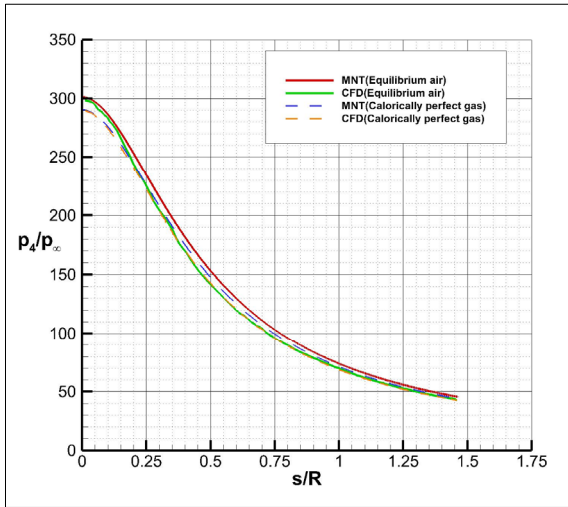


Fig. 11. Surface pressure distribution for condition B

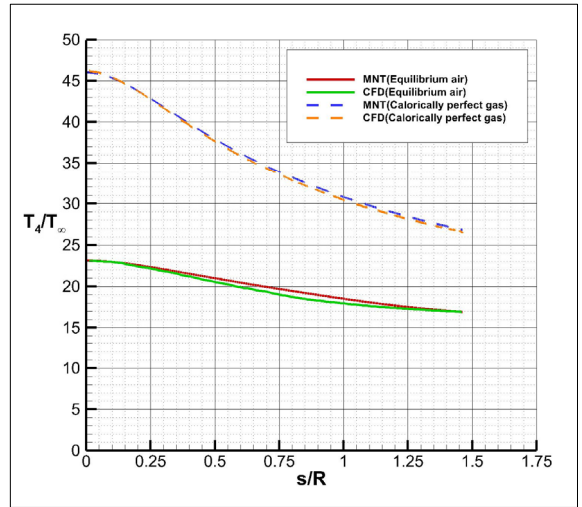


Fig. 13. Surface temperature distribution for condition B

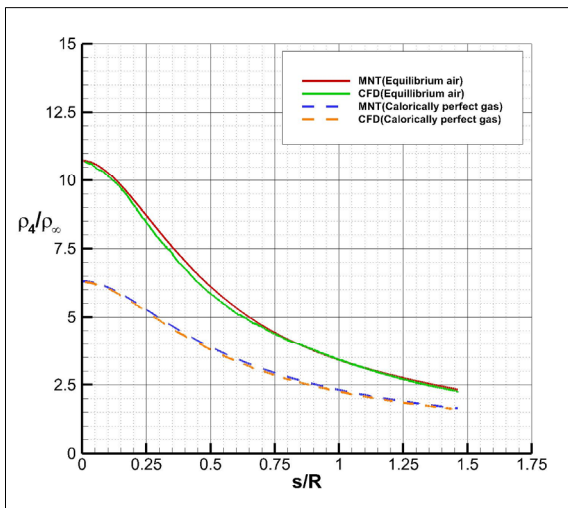


Fig. 12. Surface density distribution for condition B

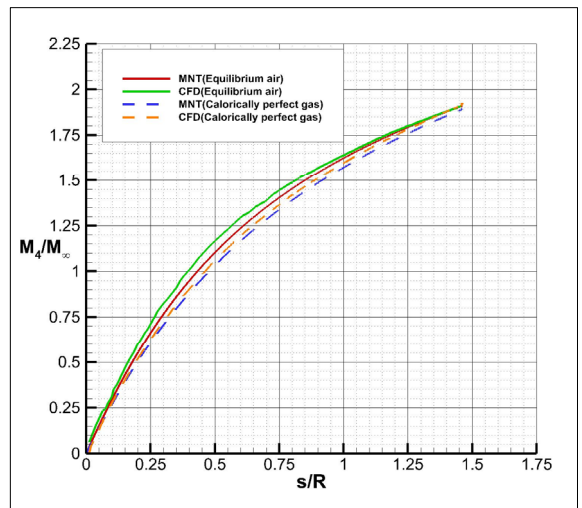


Fig. 14. Surface Mach number distribution for condition B

자의 해리와 이온화가 증가하기 때문에 평형 유동과 열량적 완전 기체 유동의 수직 충격과 이후 열적 물성 차이는 더 커지게 된다(Table 2).

### 3.2 정체점 공력 특성 해석 결과(2→3)

정체점 공력 특성 해석 결과는 Table 3과 같다. Table 3 결과에서 frozen flow 계산 결과는 평형 유동 가정으로 계산된 수직 충격과 이후 유동(Table 2에서 Equilibrium air)에서부터 정체점까지의 유동 과정에서

기체 성분이 변화가 없는 동결된 상태로 가정하여 계산한 결과이다. 그리고 평형 유동 계산(Table 3에서 Equilibrium air)은 수직 충격과 이후부터 정체점까지 유동 과정에서 고온 실제 기체 효과를 고려하여 계산한 결과이다.

실제기체 효과에 의한 공력특성 변화에서 수직 충격과 특성 변화에 비해, 정체 유동 특성 변화(Table 3)는 매우 근소하다. 이것은 충격과 이후에서 유동의 마하수는 1 이하로 크게 감소하고, 충격과 이탈 거리도 매

우 근소하여 유동의 열적 상태 변화가 크지 않기 때문이다. Wittliff 등<sup>[6]</sup>의 연구에서 평형유동과 동결유동의 정체 유동 특성 차이는 최대 2.3 %였다. 이 차이가 비록 작지만 본 연구에서의 enthalpy matching 및 entropy matching 방법을 이용하면 단시간의 계산으로 화학 반응이 고려된 정체 유동 특성을 계산할 수 있다.

### 3.3 물체 표면 공력 해석 결과(3→4)

유동 압력은 화학 반응의 영향을 크게 받지 않는 변수이기 때문에<sup>[3]</sup> 평형 유동에서도 수정 뉴토니안 방법은 높은 정확도를 보이며(Fig. 7~14), 물체 표면에서 평형 유동과 열량적 완전 기체 유동의 압력분포는 전체적으로 큰 차이가 없다. 정체점 근처에서 평형 유동이 동결유동보다 조금 높은 압력분포를 보인다. 강한 충격파가 형성되는 곳에서 평형유동의 압력상승은 동결유동보다 조금 높고, 팽창파가 형성되는 곳에서는 조금 낮다는 것이 실험적 연구에 의해 확인된 바 있다<sup>[3]</sup>. 이러한 압력 상승 차이는 작지만 비행체 전방부와 후방부에서 표면 압력 분포 차이로 이어지고, 표면 압력 분포 차이는 양(+)의 모멘트(pitching-moment) 차이를 발생시킨다. 모멘트는 압력 분포를 적분하여 산출되기 때문에 압력분포에서 작은 차이들이 모멘트 산출에서는 영향력 있는 수준의 차이로 작용할 수 있고, 반음각이 클수록 모멘트 차이는 더 커진다.

밀도(Fig. 8, Fig. 12), 온도(Fig. 9, Fig. 13)의 경우, 유동이 표면을 따라 팽창되면서 평형 유동과 열량적 완전 기체 간의 차이는 점점 감소한다. 이것은 평형 유동의 유동 팽창 과정에서 기체 분자들의 재결합 반응으로 분자 mole 수가 감소하고, 재결합 반응은 발열 반응이기 때문이다. 마하수(Fig. 10, Fig. 14)는 유동이 팽창하면서 증가한다. 열량적 완전 기체 유동에서는 표면 유동의 열적 특성이 마하수의 함수이지만, 평형 유동에서는 그렇지 않으므로 평형유동 해석 과정에서는 마하수가 중요한 변수가 아니다.

## 4. 결론

본 연구에서는 수정 뉴토니안 방법과 Tannehill 등의 평형기체 근사식을 이용하여 실제기체 효과를 고려한 평형유동 공력해석 프로그램을 개발하였다. CFD 해석결과와 비교하여 성능을 검증하였으며, 열량적 완전기체 경우와 비교하여 실제기체 효과를 확인하였다.

수정 뉴토니안 방법과 평형기체 근사식을 결합시키는 방법으로는 secant method를 이용하였다.

본 연구에서 개발한 공력 해석 프로그램을 축대칭 회전체 형상의 무딘 물체에 대한 고마하수 공력해석에 이용하면 계산 시간이 CFD 해석에 비해 매우 빠르고, 높은 정확도의 결과를 산출할 수 있을 것으로 기대된다.

## References

- [1] Frank G. Moore, et al., "Second-Order Shock-Xpansion Theory Extended to Include Real Gas Effects," Naval Surface Warfare Center, Navswc TR90-683, 1992.
- [2] John D. Anderson, "Modern Compressible Flow with Historical Perspective 3rd Edition," McGrawHill, 1221 Avenue of the Americas, New York, 2003.
- [3] John D. Anderson, "Hypersonic and High-Temperature Gas Dynamics Second Edition," AIAA, 1801 Alexander Bell Drive, Reston, Virginia 20191-4344, 2006.
- [4] J. C. Tannehill, et al., "Simplified Curve Fits for the Thermodynamic Properties of Equilibrium Air," NASA, NASA Reference Publication 1181, 1987.
- [5] Hayes, J. R. and Neumann, R. D., "Introduction to the Aerodynamic Heating Analysis of Supersonic Missile," Tactical Missile Aerodynamics: Prediction Methodology, Progress in Astronautics and Aeronautics, AIAA, Vol. 142, pp. 63-114, 1991.
- [6] Truitt, R. W., Fundamentals of Aerodynamic Heating, The Ronald Press Company, New York, 1960, Shock Wave Parameters in Equilibrium Air, Cornell AeroLab.Report CAL-III, 1961.
- [7] S. Y. Jung, S. J. Yoom, W. S., Byon, C. S., Ann, "Aerodynamic Heating Analysis of Spike-Nosed Missile," Journal of the Korea Institute of Military Science and Technology, Vol. 7, No. 3, 2004.
- [8] Wilbur L. Hankey, "Re-Entry Aerodynamics," AIAA Education Series, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., 1988.
- [9] William A. Wood., "Hypersonic Pitching-Moment Shift for Stardust Reentry Capsule Forebody," NASA NASA/TM-97-206266, 1997.



- [10] PRICOP, Mihai Victor, ANDREI, Irina Carmen, BOSCOIANU, Mircea, "Application of Modified Newton Flow Model to Earth Reentry Capsules," INCAS Bulletin, 2014 Special Issue, Vol. 6, Issue 1, pp. 129-134, 2014.
- [11] George S. Dulikravich, RN Buss, EJ Strang, S Lee, "Aerodynamic Shape Optimization of Hypersonic Missile," AIAA Paper, 1990.
- [12] George S. Dulikravich, SG Sheffer, "Aerodynamic Shape Optimization of Arbitrary Hypersonic Vehicles," Proc. of 3rd International Conference on Inverse Design Concepts and Optimization in Engineering Sciences, 1991.
- [13] Michael J. Grant and Robert D. Braun, "Analytic Hypersonic Aerodynamics for Conceptual Design of Entry Vehicles," 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, 2010.
- [14] M. K. Kim, "Aerodynamic Analysis Software based on Newtonian Method," ADDS-2014-0214, Agency for Defense Development, 2014.
- [15] S. Y., Jung, O. H. Noh, and W. S., Byon, "Numerical Analysis of Thermal/Chemical Non-Equilibrium Flow Over a Blunt Body," The Korean Society for Aeronautical and Space Sciences, 1995.
- [16] Wittliff, Charles E., and Curtis, James T., "Normal Shock Wave Parameters in Equilibrium Air," Cornell AeroLab.Report CAL-III, 1961.