

초등기하 학습에서의 구체물과 반구체물 활용에 대한 연구¹⁾

임 영 빈* · 홍 진 곤**

수학 학습이 구체물이나 친숙한 상황을 다양하게 제시해주는 것으로부터 시작되어야 한다는 입장은 CSA(Concrete-Semiconcrete-Abstract)라는 이름으로 잘 알려져 있다. 이에 비하여 최근 Kaminski 등의 연구는, 다양한 맥락을 가진 구체물로 수학적 개념을 학습하는 것보다 추상적인 개념을 먼저 학습하는 것이 지식의 전이 측면에서 효과적일 수 있음을 주장한다. 본고에서는 이러한 상반된 관점을 고려하여, 구체물, 반구체물, 추상적 개념의 지도순서를 다르게 적용한 수업을 분석하고 그 교육적 시사점을 확인하고자 하였다. 연구 결과 구체물로 시작하여 개념을 도입한 수업은 수학에 대한 긍정적인 태도를 가지게 한 것으로 보였으나 그 효과가 지속적이지는 않았으며, 성취도 면에서도 유의미한 차이를 보이지 않았고, 오히려 구체물이 가지는 과도한 구체성으로 인해 오류를 보이는 경우가 관찰되었다. 이러한 오류는 반구체물로 개념을 도입한 수업에서는 발견되지 않았는데, 이는 비본질적 요소가 사상된 반구체물이 추상적인 개념 학습에 효율적으로 사용될 수 있음을 시사한다.

1. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

많은 사람들은 수학적 개념이 추상적인 지식으로서 획득하기 어렵고 실제 상황에 적용하는 것은 더욱 어렵다고 생각한다. 이와 같은 생각이 수학학습은 구체물이나 친숙한 상황을 다양하게 제시해주는 것으로 시작해야 한다는 믿음을 가지게 한다. 정동권(2001)이 수학적 개념은 구체에서 추상으로의 역사적 발달단계를 가지고 있음을 이야기 했듯이, 다양하고 구체적인 예로부터 수학적 지식이 발생할 수 있다는 것은 부인할 수 없다. 어떤 개념에 대한 다양한 예를 경험

한 학생은 유사한 상황을 잘 인지하고 배운 내용을 더욱 잘 적용할 수 있을 것이다. 게다가 다양한 구체적 사례에서 수학적 지식을 추상화하는 과정에서 기호화, 도식화 등의 수학적 사고의 발전을 기대할 수 있으며 이것을 역사적인 발생 순서라고 생각할 수 있다. 그런데 모든 수학 학습이 반드시 구체적인 상황이나 구체물에서 시작해야 하는 것인지는 의문의 여지가 있다.

일상적으로 접할 수 있는 친숙한 사물들은 수학적 요소 이외에도 수많은 정보를 포함하고 있다. 그렇기 때문에 여러 사물이나 현상에서 수학적 본질을 추상화하기 위해서는 필요 없는 내용을 제거하는 과정이 포함되어야 한다. 그런데 이때 필요 없는 정보가 모두 제거되지 않는다면 오히려 추상적 개념이 제대로 생성되지 않

* 인천해서초등학교, loveace-bin@hanmail.net (제1 저자)

** 건국대학교, dion@konkuk.ac.kr (교신저자)

1) 본 논문은 저자의 박사학위 논문(초등수학 학습에서의 구체와 추상, 2016, 건국대학교)의 일부를 요약한 것임.

을 수도 있으며 지식의 전이를 방해할 수 있다.

Kaminski(2008)는 다양한 맥락을 가진 구체물로 수학적 개념을 학습하는 것보다 추상적인 개념을 먼저 학습하는 것이 지식의 전이가 잘 일어난다는 주장을 했다. 그는 학생들에게 다양한 구체물을 주는 것이 지식 전이를 위해 가장 유용한 수단은 아니라는 것을 실험을 통해 입증했다. 그리고 구체적이고 맥락화된 방식에서 추상적인 개념을 이끌어내는 것은 지식 형성에 장애를 주며 결과적으로 지식의 전이를 방해한다고 주장했다.

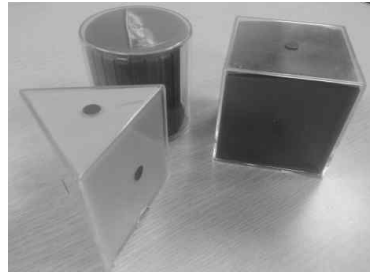
게다가 구체물에 포함되어있는 비본질적인 요소들이 본질적 수학 구조에 대한 집중을 분산시키는 작용을 할 수 있다. 따라서 자기 통제력이 약한 어린 학생들에게도 구체물을 통한 추상화가 지식의 전이를 더 취약하게 할 수도 있다.

수학을 가르치는 목적이 학생들이 다양한 상황에 적용할 수 있는 지식을 생산하는 것이라면 추상화된 개념을 통한 교수학습이 수학적 지식의 효율적 형성에 도움이 될 수 있다. 구체물을 활용한 개념의 형성에는 ‘비본질적 요소’가 지식의 전이를 방해한다는 점을 생각하면 추상적 개념을 먼저 지도하는 것이 옳을 것이다. 그러나 Freudenthal이 ‘반교수학적 전도’라고 비판한 것처럼 부정적인 영향이 분명히 존재한다(임영빈·홍진곤, 2016, p.159). 그리고 아직 어린 초등학생들에게 과도하게 기호화, 도식화 된 지식은 학습 동기를 빼앗을지도 모른다. 이러한 우려로 인해 여러 연구(Maccini & Hughes, 1997; Butler, Miller, Crehan, Babbitt & Pierce, 2003; 서지연, 2007; 김길임, 2008; 차미정, 2013 등)에서 수학학습 과정은 ‘구체물-반구체물-추상적 개념’의 순을 따르는 것이 효과적이라고 주장했다. 본고에서는 이러한 상반된 의견을 비교하기 위해 구체물, 반구체물, 추상적 개념의 지도 순서를 다르게 적용하여 그 교육적 시사점을 제시해보

고자 한다.

2. 용어의 정의

‘구체’는 사물이 개별적으로 일정한 모습을 갖추고 있음을 뜻한다(김민수, 1992, p.285). 본고에서 수학 학습에서의 구체물은 주변에서 볼 수 있는 사물을 포함하는 개념으로 생각할 것이다. 이때 수학 학습에 직접적인 도움을 주기 위해 교사가 구안하거나 학생이 산출하는 반구체물은 구체물과 구분지어 생각할 수 있다.



[그림 I-1] 입체도형 학습에 사용되는 반구체물의 예

구체물이나 반구체물에 대한 개념은 상황에 따라 다소 유연하게 적용된다. 기하학습에서는 [그림 I-1]과 같이 비본질 요소를 사상시킨 수학교구를 반구체물로 볼 수 있다. 유태호(2008, p.11)는 입체도형의 전개도 등을 시각적으로 보여줄 수 있는 컴퓨터 프로그램도 반구체물이라고 생각한다.

이와 달리 연산학습을 하는 경우에는 수를 그림으로 표현한 것(김길임, 2008, p.5)을 반구체물로 정의하기도 한다. 이와 같은 입장에서는 기하학습에서 구체물로 생각하는 것들은 물론, 수막대나 연결큐브와 같이 기하학습에서 반구체물로 볼 수 있는 교구들도 구체물로 생각한다. 그리고 이러한 구체물을 손으로 그린 도상적(iconic) 표현들을 반구체물로 여길 수 있다. 어떤 도상이든

<표 I-1> 기하학습과 대수학습에서의 구체물과 반구체물

	기하학습에 초점을 맞추는 경우	대수학습에 초점을 맞추는 경우
구체물	실제로 주변에서 볼 수 있는 사물	실제로 조작활동을 할 수 있는 사물과 교구
반구체물	구체물에서 비본질적 요소를 최대한 사상시킨 수학교구	구체물의 도상적 표현물

기표와 기의 사이에는 어느 정도의 유사성을 지닌다(Hall, 2007, p.14). 대수학습에서 손으로 표현된 도상의 경우에도 표현의 대상이었던 구체물의 특징을 계속 지니게 된다.

이렇게 반구체물에 대한 입장의 차이가 생기는 이유는 학습 설계 과정에서 각각의 표상들이 어떤 단계에 사용하느냐에 따라 생겨난다고 볼 수 있다. 본 연구에서도 기하학습과 대수학습 중 어떤 상황에 초점을 맞추느냐에 따라 용어를 <표 I-1>과 같이 정의하고자 한다.

구체성을 사상시켰다는 점에서 ‘반구체물’을 ‘반추상물’이라고도 생각할 수 있을 것이다. 단지 역사발생적으로 볼 때, 구체가 추상보다 앞서기 때문에 ‘반구체물’이라는 용어가 자연스럽게 여겨진다.

II. 수학 학습에서의 CSA 접근법

Piaget나 Bruner 등은 감각적인 운동을 행함으로써 활동적으로 표상하는 것이 학습의 초기에 수행되어야 할 중요한 과정이라고 생각했다. Dewey 역시 어떤 대상에 대해 측정이라는 활동을 함으로써 ‘수’라는 개념을 추상화 할 수 있다고 생각했다. 즉, 추상적 개념의 형성을 위해서는 어떠한 ‘대상의 조작’이 필요하다는 것이 공통된 견해일 것이다(김응태 외, 1984, p.110-173; 우정호 · 강홍규, 2005, p.113-114).

구성적으로 수학을 지도하려는 교사들은 추상적 개념의 직접적인 지도보다는 구체적인 사물이나 조작 활동에 더 큰 비중을 두고자 할 것이다. 이러한 교육적 경향으로 인하여 수학학습의 과정은 구체에서 추상으로 향해야 한다는 믿음이 발전했다. 이처럼 구체적인 사물의 조작에서 시작하여 반구체물을 거쳐 추상적 개념을 가르치는 지도방식을 CSA 접근법²⁾이라고 한다. 이때 Representational Semiconcrete라는 용어를 사용하여 CRA 접근법이라고 부르기도 한다(고상숙, 2009, p.395).

이러한 접근법은 일반적인 수학 학습의 순서를 구체적인 것에서부터 시작하고자 하는 경향성으로 나타난다. <표 II-1>은 2009개정 교육과정의 교사용지도서에 제시된 권고사항이다. 여기에서는 수학의 학습 순서가 구체적인 것에서 출발해야 한다는 믿음이 더욱 분명하게 드러난다.

실제로 초등학교 수학 교과서를 살펴보면 이와 같은 권고사항이 잘 지켜지고 있음을 알 수 있다. 즉, 주변에서 볼 수 있는 물체를 사용해서 각 차시를 도입하려는 경향을 보이고 있는 것이다. 저학년의 경우 책상, 칠판 등을 사용하고 있으며 고학년의 경우에도 [그림 II-1]과 같이 원기둥의 개념을 알아보는 차시에서는 실제로 주변에서 볼 수 있는 풀, 상자 등에서 입체도형의 요소를 비교해보는 활동으로 시작을 한다. 이렇게 주변에서 볼 수 있는 것을 구체물(concrete)이라고 한다. 2009개정 수학교과서에서는 도형영역의

2) Concrete-Semiconcrete-Abstract

<표 II-1> 2009개정 교육과정의 [수학적 지식과 수학 학습] (교육부, 2013, p.28)

- ① 학생들의 발달 특성을 고려해야 한다.
- ② 학생들을 능동적으로 참여하게 한다.
 - 1 탐구하기와 의미 형성하기를 강조한다.
 - 2 반성적 사고와 메타 인지적 사고를 하게 한다.
- ③ 수학 학습은 구체적인 것에서부터 시작해 추상적인 것으로 진행해야 한다.
 - 1 구체적 조작물과 모델을 사용한다.
 - 2 개념적 이해가 이루어진 다음에 형식적 표현을 도입한다.
- ④ 이해를 촉진하기 위하여 의사소통을 강조한다.
 - 1 의미 형성을 촉진하기 위하여 말하기를 통한 의사소통을 강조한다.
 - 2 생각을 전달하기 위하여 쓰기를 통한 의사소통을 강조한다.

대부분 차시에서 이와 같이 구체물을 활용하여 도입하고 있다.



[그림 II-1] 교과서의 구체물을 활용한 차시도입(2009개정 6학년 2학기)

III. 구체물의 활용이 유발할 수 있는 학습의 방해요소

앞서 언급 했듯이 많은 선행 연구에서는 [구체물-반구체물-추상적 개념]의 순서로 학습할 것을 권장하고 있다. 그리고 현행 교과서도 이와 마찬가지로 가급적 구체물을 활용하여 차시의 도입을 하고 있다. 예를 들어 원주와 원의 넓이 등을 지도할 때는 원모양의 발, 원모양의 호수와 그 호수의 중심을 가로지르는 다리(지름의 역할)를 제시하고 있다. 수와 연산 영역에서도 연결큐브

나 수막대 등을 먼저 제시³⁾하고 그 후에 붙임딱지나 그림자료 등을 통해 지도하고 있다.

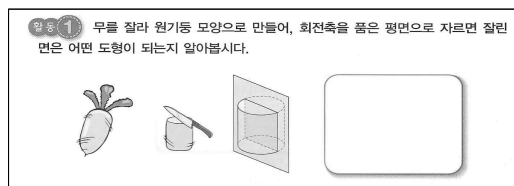
그런데 이와 같은 구체물의 사용에는 필연적으로 학습을 방해하는 요소가 존재한다. 교수-학습 활동 중에 재구성하여 사용하게 되는 구체물은 수업을 계획한 교사에 의한 맥락화된 산물이다. 이때 맥락화 과정을 과도하게 중시함으로써 극단적인 교수 현상이 발생할 수 있다. Brousseau (1997)는 이와 같은 극단적인 교수 현상을 메타 인지적 이동 현상이라고 칭하며 경계했다. 이경화(1996)는 메타인지적 이동이란 수학적 지식의 배경화 및 개인화(맥락화)에 주목한 나머지 교수 학적인 노력의 초점이 수학적 지식 자체로부터 교수학적 고안물로 옮겨가는 것을 의미한다고 했다. 컴퓨터를 활용한 수업에서 수학적 지식보다 컴퓨터의 구조와 특성에 더 많은 관심을 두는 것도 그 예가 될 수 있다.

구체적인 상황은 추상적인 것에 비해 많은 정보를 전달한다. 이런 추가적 정보가 학습 대상이 되는 개념을 전달하는데 도움을 줄 수 있는 ‘적절한 구체성(relevant concreteness)’이 될 수도 있지만 관련성이 부족할 경우 학습의 전이를 방해하는 ‘부적절한 구체성(irrelevant concreteness)’이 될 수도 있다. Kaminski 외(2005)는 적절한 구체성

3) 이런 연결큐브나 수막대 등은 도형 영역에서는 반구체물이지만 연산영역에서는 구체물로 사용될 수 있다.

및 부적절한 구체성이 학습과 전이에 미치는 영향을 연구하였다. 이 연구의 목표는 추상적인 개념을 구체적인 방식으로 예시화하는 것이 학습 및 전이에 이점을 가지는지에 관한 여부를 알아보는 것이었다. 이 연구의 실험 참가자들은 추상적으로 ‘일반화된 예시’들을 학습했고, ‘적절한 구체성’이나 ‘부적절한 구체성’ 또는 ‘적절하면서도 부적절한 구체성’을 의사소통하면서 학습하였다. 적절한 구체성의 경우 스토리라인과 상징이 적절한 수학 구조를 보다 원활하게 소통하는데 도움을 주었다. 다채롭고 패턴화된 상징들은 인지적으로 부적절한 구체성을 추가하는데 사용되었다. 적절한 구체성은 빠른 학습에 이점을 가지고 있는 것으로 나타났지만 부적절한 구체성은 오히려 학습의 전이를 방해하는 요소가 될 수 있다.

초등학교에서의 기하 수업은 앞서 언급한 바와 같이 구체물을 조작하는 활동으로 각 차시를 도입하려는 경향을 가지고 있다. 특히 빨이나 기둥과 같은 입체도형의 경우 실제 주변에서 볼 수 있는 사물을 직접 관찰하거나 만져보는 경우가 많이 있다. 심지어 회전체의 단면을 알아보는 수업⁴⁾의 경우 [그림 III-1]과 같이 실제로 잘라보게 하고 있다. 원기둥의 경우에는 무의 몸통을, 원뿔의 경우에는 당근을, 구의 경우에는 오렌지를 잘라서 살펴보도록 교과서가 구성되어 있다.



[그림 III-1] 구체물로 시작되는 회전체의 단면 지도(2007개정교과서 6-2)

실제로 교사들이 교과서에서 제시하는 바와 같

이 구체물을 직접 조작하도록 지도하는지 파악하기 위해 <표 III-1>과 같은 구성의 인천지역 6학년 교사 82명을 대상으로 실태조사를 실시했다. 실태조사 결과 구체물을 직접 조작하도록 지도하는 교사는 그리 많지 않았다. <표 III-2>와 같이 직접 채소나 과일을 잘라서 수업한 교사는 6명 뿐이었고, <표 III-3>과 같이 6명 중 4명은 각종 공개수업을 위해 구체물을 직접 잘랐다고 응답했다. ‘회전체의 단면’의 경우 구체물을 직접 준비하기 번거롭다는 특수성을 감안하더라도 매우 적은 교사가 교과서와는 달리 구체물보다는 단면 교구나 판서와 같은 ‘반구체물’을 사용하거나 구두 설명이나 영상자료 등을 이용하는 것으로 나타났다.

<표 III-1> 구체물로 도입하는 수업에 대한 실태조사에 참여한 교사의 구성

경력	5년 미만	5~10년	10~20년	20~30년	30년 이상	계
교사 수	17	26	23	13	3	82

<표 III-2> ‘회전체의 단면’ 차시를 지도한 방식

N=82

응답내용	응답자 수	비율
구두 및 판서를 활용	44 명	54 %
영상자료 및 단면 교구를 활용	32 명	39 %
직접 잘라봄	6 명	7 %

<표 III-3> ‘회전체의 단면’ 지도시 구체물을

직접 잘라본 이유

N=6

응답내용	응답자 수	비율
공개수업을 위해	4 명	66 %
조작을 중요하게 생각	1 명	17 %
교과서를 존중	1 명	17 %

4) ‘회전체의 단면’은 2007개정 교육과정(~2014년)까지는 초등학교 6학년 2학기에서 지도했으나 2009개정 교육과정(2015년~)부터는 중학교 과정으로 이동되었다. 다만 ‘회전체의 개념’은 여전히 지도하고 있다.

위와 같이 ‘회전체의 단면’을 지도함에 있어 교과서가 제시한대로 수업을 하지 않는 교사가 대부분이다. 그렇다면 교과서가 제시한대로 진행된 수업을 본 교사들의 반응은 어떨까? [그림 III-2]는 교과서에서 제시한 바를 충실히 이행하여 ‘회전체의 단면’을 직접 잘라본 공개수업의 한 장면이다. 그리고 이 수업을 참관한 교사 8명의 수업소감⁵⁾은 <표 III-4>와 같다.

<표 III-4>와 같이 직접 수업을 본 교사들은 학생들의 동기유발 측면에서는 긍정적인 반응을 보였다. 그러나 안전, 정확하지 못한 개념의 지도, 준비의 어려움에서는 매우 부정적인 응답을

했다.

안전에 대한 불안, 울퉁불퉁하거나 삐딱한 구체물의 상태, 구체물에서 스며나오는 액체와 냄새는 수학 개념을 형성하는데 장애가 될 수 있는 비본질적 요소이다. 추상화된 개념을 형성하기 위해서는 이런 비본질적 요소를 사상(捨象)해야 하는데 위 수업의 경우에는 오히려 비본질적 요소를 더욱 많이 제공하고 있다.

실생활에서 볼 수 있는 입체도형을 손으로 느껴보고, 단면을 잘라보는 것은 구체물의 특성에 대한 ‘적절한 구체성’을 구현하기 위함이라고 생각할 수도 있다. 하지만 단면이 교사가 원하는



[그림 III-2] 구체물을 직접 잘라 회전체의 단면을 지도하는 모습

<표 III-4> 구체물을 직접 자른 수업에 대한 동료교사들의 소감

N=8

응답자	응답내용
교감	선생님이 수업을 매우 열심히 준비했으며 아이들도 수학을 아주 재미있게 활동을 통해 공부해서 즐거워 보였다.
교사1	학습이 부진하거나 삐딱한 태도를 가진 아이들은 당근을 잘랐을 때 단면을 정확하게 그리지 않는다.
교사2	아이들은 흥미 있어 하는데 시간이 너무 오래 걸린다.
교사3	1차시 수업을 위해 교사가 준비해야 할 것들이 너무 많다.
교사4	진지하고 재미있는 수업이었다. 그런데 나는 절대 못할 것 같다.
교사5	오렌지를 자를 때 즙이 너무 많이 생겨서 수업 분위기가 난잡해지고 종이에 대고 그렸을 때 학습지가 젖어 훼손되는 경우가 많았다.
교사6	구의 단면을 그리기 위해 오렌지를 잘랐는데 잘못 자르다 보니 구의 단면을 타원으로 그리는 아이들이 보였다.
교사7	학생들의 동기유발 차원에서는 훌륭하지만 칼을 사용하다보니 안전하지 않아 보인다.

5) 연구를 위해 우려스러운 점을 솔직하게 답변해줄 것을 부탁했다.

모양으로 정확하게 잘리지 않게 되거나 좁이나 넓새 등 학습자의 추상화를 방해하는 비본질적 요소가 ‘부적절한 구체성’으로 나타날 수도 있다. 구체적인 상황은 추상적인 상황에 비해 많은 정보를 전달하는 것이 사실이다. 문제해결력을 높이기 위해서는 적절히 비구조화된 문제 상황 속에서 구체성을 제거하면서 필요한 요소를 추출하는 경험이 필요하다. 그러나 위와 같이 부적절한 구체성이 가득한 수업에서는 학생들이 필요한 추상적 개념의 본질을 추출하기 어렵다.

직접 물체의 단면을 잘라서 확인하는 경험은 평상시에는 해보지 못하는 소중한 경험일 수 있다. 그러나 목표로 하는 수학적 개념 형성을 방해하는 부적절한 요인을 굳이 끌어들이야 하는가에 대해서는 고려해봐야 할 것이다.

IV. 연구 방법

교과서 및 교사용 지도서에서는 수업할 때 구체물로의 도입을 권장하고 있다. 이에 본고에서는 이렇게 일반적으로 제시되고 있는 구체물로의 도입 과정을 반구체물로의 도입과정과 비교하기 위해 다음과 같은 연구를 실시하고자 한다.

1. 연구 참여자

본 연구의 참여자는 인천광역시 H초등학교 6학년의 두 학급 CSA, SAC이다. 이 두 학급은 학업성취도에 의해 균등하게 반편성이 되어있다. CSA학급은 20명, SAC학급은 21명이다. SAC학급의 독해능력이 거의 없는 학습도움반 학생 1명을 제외하면 관찰대상은 20명으로 동일하다. 회전체의 단면과 관련된 내용은 2014년까지는 6학년 교과서에 제시되었기 때문에 학생들이 선행 학습에 노출되기도 했으나, 2015년부터는 2009개

정교육과정의 적용으로 회전체의 단면과 관련된 내용이 교과서에 제시되지 않기 때문에 미리 학습한 학생이 없었다.

CSA학급의 경우 2007개정 교육과정 교과서에 제시된 대로 구체물을 직접 잘라서 회전체의 단면을 살펴보았다. SAC학급의 경우 반구체물인 ‘입체도형 단면 교구’ 및 ‘스티로폼 공’을 사용하였다. 두 학급 모두 본 연구자가 수업을 진행하였다. 학습자의 학습상태를 개별적으로 평가하는데 외부요인을 최대한 배제하기 위해 일제수업 형태로 학습을 진행하였다. 수업 3일전과 수업이 끝난 직후, 수업종료 후 파지 효과를 고려하여 7일 뒤에 정의적 영역의 평가를 총 3회 실시했으며, 3일 뒤에 회전체의 단면에 관한 수행평가를 실시하였다.

2. 수업의 진행

가. CSA학급의 수업 진행

CSA학급의 경우 2007 개정 교과서에 제시된 대로 [구체물-반구체물-추상적 개념]의 순으로 한 차시의 수업을 진행하였다. 이때 사용한 구체물은 무, 당근, 오렌지였다. 단면의 모양을 비교한 반구체물은 플라스틱으로 만든 ‘입체도형 단면 교구’였으며 검증과정에서 개인별로 1개씩 지급하여 확인하였다. 수업의 흐름은 <표 IV-1>과 같다.

무턱대고 구체물을 잘라보게 하지 않고 회전축을 기준으로 자를 수 있는 3가지 방법을 찾아볼 수 있도록 계획을 수립하였다. 이때 교사가 처음부터 회전축을 기준으로 삼도록 지시하지 않고, 학생들이 스스로 찾아낼 수 있도록 수업을 진행하였다. 회전체를 자른 뒤에는 잘라본 단면을 종이에 대고 그려보았다. 이 단면의 모양을 반구체물로 확인한 뒤 여러 학생들이 서로 비교

<표 IV-1> 구체물을 직접 잘라본 CSA학급의 수업 흐름

수업 단계	학습 과정	학습활동	비고
전개	문제 이해	※회전체에 대한 전시학습 상기 및 절단상황의 이해	동기유발
	계획 수립	※회전체를 자를 수 있는 방법 3가지 찾기	
	계획 실행	※구체물을 세 가지 방법으로 잘라보기 잘라본 단면을 종이에 대고 그려보기	C
	검증	※직접 그렸던 단면의 모양을 반구체물로 확인하기	S
↓			
반성		※ 학습지를 통해 각각의 회전체를 3가지 방법으로 잘랐을 때의 단면의 모습을 kola보기	A

<표 IV-2> 반구체물 교구를 먼저 사용한 SAC학급의 수업 흐름

수업 단계	학습 과정	학습활동	비고
전개	문제 이해	※회전체에 대한 전시학습 상기 및 절단상황의 이해	동기유발
	계획 수립	※회전체를 자를 수 있는 방법 3가지 찾기	
	계획 실행	※각각의 방법에 맞는 단면을 찾아 학습지에 대고 그려보기	S
	검증	※학습지를 통해 각각의 회전체를 3가지 방법으로 잘랐을 때의 단면의 모습을 kola보기	A
↓			
반성		※ 제공된 실생활 사진을 통해 단면의 모양 찾아보기(가래떡, 호박전, 소세지, 아이스크림콘 등)	C

해봄으로써 공통속성을 가진 도형으로 추상화하였다.

나. SAC학급의 수업 진행

SAC학급의 경우 반구체물을 가장 먼저 제시하는 [반구체물-추상적 개념-구체물]의 순서로 지도하였다. 이때 사용한 반구체물은 CSA학급과 마찬가지로 ‘입체도형 단면 교구’를 사용하였다. 국소적으로 같은 교구가 사용되었지만 CSA학급과 달리 구체물을 직접 자르지 않고 정교하게

잘라져 있는 교구를 활용하여 단면을 종이에 대고 그리도록 하였다. 수업의 흐름은 <표 IV-2>와 같다.

CSA 학급과 마찬가지로 회전축을 기준으로 자를 수 있는 3가지 방법을 찾아보았다. 3가지 방법을 찾기 전에는 미리 절단되지 않은 교구를 제시하였고, 3가지 방법을 모두 찾은 뒤에 절단된 교구를 사용하였다. 절단된 교구를 사용하여 단면을 학습지에 그려보았으며 단면의 모양을 여러 학생들이 서로 비교해봄으로써 공통속성을 가진 도형으로 추상화하였다. 그 후 실생활에서

볼 수 있는 회전체의 사진을 보고, 그 물체의 단면 모양을 찾아보는 활동으로 수업을 마무리하였다.

3. 분석방법

가. 정의적 영역의 분석

Butler, Miler, Crehan,, Babbit,, & Pierce(2003)는 구체물을 먼저 제시하는 방식이 학생들의 수학 학습을 하는 태도에 긍정적인 효과가 있다고 밝혔다. 구체물이 가지고 있는 비본질적 요소의 긍정적인 측면 중 하나가 바로 이와 같은 정의적 영역에 대한 효과라고 생각할 수 있을 것이다. 이와 같은 정의적 영역의 효과를 확인하기 위해 [그림 IV-1]과 같은 검사문항지를 구안하였다. 이 문항지는 한국교육개발원(1992)의 수학 학습태도에 관한 40개의 물음을 토대로 본고의 취지에 맞게 8문항을 선정한 뒤 수정한 것이다. 한국교육개발원(1992)의 검사문항은 수학을 공부하는 기본자세, 방식 및 수학에 대한 긍정적 태도와 신념을 모두 포함하고 있다. 본고에서는 학생들이 수학 수업에 임하는 태도를 중점적으로 살펴보기 위한 문항을 선정하였다.

사전 검사는 수업을 실행하기 3일 전에 실시했으며 1차 사후 검사는 수업 종료 후 2시간 뒤에, 2차 사후 검사는 수업 종료 후 7일 뒤에 실시하였다.

본 검사에 사용한 문항들은 본고의 취지에 맞게 선별한 문항이므로 검사 결과의 신뢰도를 추정하기 위해 Cronbach ' α 값을 측정하였다. 신뢰도를 조사한 결과 세 검사 결과에 대한 Cronbach ' α 값이 .957로 신뢰도가 매우 높은 것으로 나타났다.6)

나. 성취도 분석

회전체의 단면과 관련한 수행평가 항목은 회전축을 품은 단면, 회전축에 수직인 단면, 회전축과 비스듬한 단면으로 구분된다. 이에 따른 기본적인 성취도 평가 문항과 응용 문항을 [그림 IV-2]와 같이 구성해보았다.




응용문제의 경우 회전축에 비스듬한 단면을 그릴 때에는 다양한 답을 모두 인정하였다. 응답의 정확성을 위해 자신이 그린 단면이 '원'인 경우에만 '원'이라고 쓰도록 하였다. 아울러 학생들에게 실제로 나누어준 검사지에는 그릴 수 있는 칸을 더 넓게 제공하였다.

물 음	항상 그렇다 (5)	대체로 그렇다 (4)	보통 이다 (3)	대체로 아니다 (2)	전혀 아니다 (1)
1. 나는 수학 공부 시간이 즐겁다.					
2. 나는 수학 시간에 배운 것을 응용해 보고 싶다.					
3. 나는 수학 시간에 선생님이 말씀을 열심히 듣는다.					
4. 나는 수학이 데 꼭 필요한 과목이라 생각한다.					
5. 나는 수학 공부를 잘 할 수 있다.					
6. 나는 수학 공부를 지금보다 더 하려고 한다.					
7. 나는 수학시간에 발표를 더 열심히 할 것이다.					
8. 나는 수학시간에 배운 것을 꼭 복습하겠다.					

[그림 IV-1] 정의적 영역 검사 문항지

6) 사전검사의 Cronbach ' α 값은 .924, 1차 사후검사는 .919, 2차 사후검사는 .941 이다.

회전체 단면	원기둥	원뿔	구
회전축을 품은 단면			
회전축에 수직인 단면			
회전축과 비스듬한 단면			

회전체 단면			
회전축을 품은 단면			
회전축에 수직인 단면			
회전축과 비스듬한 단면			

[그림 IV-2] 성취도 분석을 위한 평가지

V. 연구 결과

1. 정의적 영역의 비교

두 학급 사이의 정의적 영역에 대한 차이를 살펴보기 위하여 t검증을 실시한 결과는 아래와 같다. 정의적 영역의 개인별 점수는 40점 만점이 었다.

<표 V-1> 정의적 영역에 대한 독립표본 t검증 사전결과(수업 3일전)

구분	N	평균	표준 편차	t	유의 확률
CSA	20	30.5	6.501	0.466	.643
SAC	20	29.5	7.052		

*p<.05, **p<.01, ***p<.001 Cronbach' α = .924

<표 V-2> 정의적 영역에 대한 독립표본 t검증 1차 사후결과(수업 2시간 후)

구분	N	평균	표준 편차	t	유의 확률
CSA	20	33.15	4.332	1.935*	.030
SAC	20	29.55	7.237		

*p<.05, **p<.01, ***p<.001 Cronbach' α = .919

<표 V-3> 정의적 영역에 대한 독립표본 t검증 1차 사후결과(수업 2시간 후)

구분	N	평균	표준 편차	t	유의 확률
CSA	20	29.9	7.283	0.225	.851
SAC	20	29.4	6.451		

*p<.05, **p<.01, ***p<.001 Cronbach' α = .941

<표 V-1>과 같이 수업 3일전에 검사한 수학에 대한 태도는 유의미한 차이를 보이지 않았다. 그러나 <표 V-2>와 같이 수업 후 2시간이 지난 뒤의 검사에서는 구체물을 직접 잘라본 학급이 유의미하게 높은 차이를 보였다. 즉, 구체물을 활용하여 직접 조작해보는 수업이 학생들의 수학에 대한 긍정적인 태도를 불러 일으킨다고 생각할 수 있었다. 그러나 수업 후 7일 뒤에 실시한 수학에 대한 태도 검사에서는 <표 V-3>과 같이 유의미한 차이를 보이지 않았다.

여러 연구에서 입증된 바와 같이 구체적 조작용의 투입은 학생들의 호기심을 고양시키고, 수학에 대한 긍정적인 태도를 함양할 수 있음을 본 실험에서도 확인할 수 있었다. 그러나 그 효과가 지속적이지 못하다는 문제점이 발견되었다.

2. 성취도의 비교

두 학급은 전학년도에 실시된 국어, 수학, 사회, 과학, 영어의 성취도 평가 점수로 편성되었다. 두 학급의 수학과목에 대한 성취도 측면에서 동질집단인지 여부를 판단하기 위해 학년 초 실

시된 진단평가 수학적성적에 대한 t검증을 실시한 결과는 <표 V-4>와 같다.

<표 V-4> 사전 성취 수준에 대한 독립표본 t검증 결과(학기초 진단평가)

구분	N	성취도 평균	표준 편차	t	유의 확률
CSA	20	79.95	15.746	0.285	.778
SAC	20	78.40	18.588		

*p<.05, **p<.01, ***p<.001

사전 성취 수준에 대한 독립표본 t검증 결과 유의확률은 .778 이다. 그러므로 유의수준 .05에서 두 학급간은 유의미한 차이가 없는 동질 집단이라고 볼 수 있다.

두 학급의 수업 후 3일 뒤에 [그림 IV-2]와 같은 성취도 평가를 실시하였고, 그 결과는 <표 V-5>와 같다. 성취도 점수의 개인별 만점은 18점이었다.

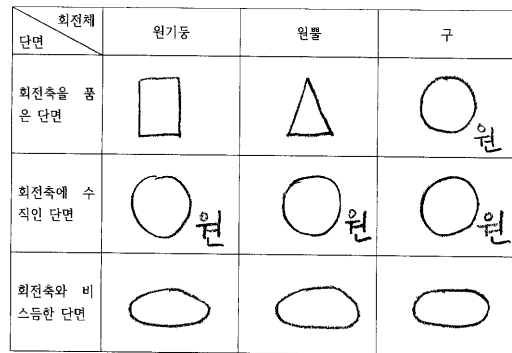
<표 V-5> 사전 성취 수준에 대한 독립표본 t검증 결과(학기초 진단평가)

구분	N	성취도 평균	표준 편차	t	유의 확률
CSA	20	15.60	2.437	0.301	0.764
SAC	20	15.35	2.796		

*p<.05, **p<.01, ***p<.001

두 학급의 유의확률은 0.764로 $p > 0.05$ 이다. 따라서 회전체의 단면에 관한 두 집단 간의 성취도는 유의미한 차이가 없음을 알 수 있다. 그러나 CSA학급의 경우 특이할 만한 오류를 보인 세 명의 학생이 있었다. 그 중 두 명의 학생은 수학적 성취도가 평균정도인 학생들이었다. 더욱이 [그림 V-1]과 같은 오류를 보인 학생 K는 단위학교 영재학급 소속 학생으로 영재학급 내에서는 중하위권 수준이지만, 일반학급에서는 연산 및 기하 영역에 대한 성취도가 상위권인 학생이다.

이 학생이 단순한 실수로 오류를 보였는지 여부를 알아보기 위해 재평가를 실시했지만 계속된 오류를 보였다. 그 원인을 분석하기 위해 인터뷰한 결과, 오렌지를 직접 자르는 것에 신경 쓸 것이 많아서 구의 회전축이 여러 개라는 사실을 인지하지 못하였음을 확인할 수 있었다. SAC학급에서도 기본문제 9개를 모두 맞히지 못한 경우는 있었지만, 학생 K처럼 상위수준의 수학 실력을 가진 학생이 오류를 보인 경우는 없었다.



[그림 V-1] 구의 단면에 대한 학생K의 오류

구체적 조작물을 직접 다루는 수업 전반에 걸쳐 ‘부적절한 구체성’이 학생의 추상적 수학개념 형성을 방해할 가능성이 존재한다. 구체적 조작물이 수학에 대한 긍정적 태도를 잠시나마 고양시키기도 하지만 그 효과가 지속적이지 못하다는 문제점이 있다.

이러한 문제점을 해소하기 위해 반구체물의 사용을 적극적으로 검토해야 할 것이다. 반구체물은 비본질적 요소를 최대한 사상시켜 지각적 혼란의 여지를 최소화했기 때문에 추상적 수학개념의 형성에 더욱 적합할 것으로 생각된다. 아울러 구체적 조작물이나 반구체물을 수업 외적인 시간에 자주 접하게 하는 것도 필요할 것이다. 구체적 조작물을 다룸으로써 높아진 긍정적 태도는 한시적이기 때문에 지속적으로 구체물을 다룰 수 있는 기회가 주어져야 할 것이다.

VI. 결 론

두 학급의 초등학교 6학년 학생들에게 구체물, 반구체물, 추상적 개념을 서로 다른 순서로 지도하는 과정에서 정의적 변화와 성취도의 차이를 비교·분석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

첫째, 구체물을 직접 도입하여 먼저 사용한 학급이 수업 직후의 정의적 영역에서는 유의미하게 높은 점수가 나왔으나 7일 뒤에 실시한 결과는 다른 학급과 유의미한 차이가 나타나지 않게 되었다. 즉, 구체물의 조작이 짧은 이벤트로 끝난다면 정의적 영역의 긍정적 변화는 지속적이지는 못할 것이다. 따라서 학생들의 수학에 대한 태도 등, 정의적 영역의 지속적 변화를 이끌어내기 위해서는 이벤트성 조작 수업이 아닌 구체물의 꾸준한 조작 활동이 필요할 것이다.

둘째, 구체물을 직접적으로 제시하여 수업을 실행한 경우와 반구체물을 제시한 경우는 성취도면에서 통계상의 유의미한 차이를 보이지는 않았다. 그러나 개별적으로 학생들의 답안을 분석한 결과 구체물을 직접 조작한 학급에서 오류가 발생하는 경우가 있었다. 특히, 오류를 보인 학생들의 경우 학업 성취도가 우수한 학생들도 포함 되어 있었다. 이는 구체물이 가지고 있는 비본질적 요소가 학생들의 추상적 개념 형성에 영향을 미쳤기 때문이라고 생각할 수 있다. 이에 비해 반구체물을 먼저 학습하고 구체화한 학생들의 경우 수학적 개념이 상대적으로 명확하게 형성되었기 때문에 평균이상의 학업 성취도를 보인 학생들에게서는 오류가 나타나지 않았다. 따라서 구체물을 직접 제시하여 수업을 도입하는 경우에는 학생들이 추상적으로 개념을 잘 형성하는지 면밀히 관찰할 필요가 있으며, 수시로 피드백을 해주어야 한다.

셋째, 반구체물을 통해 추상적 개념을 형성한

학생들의 경우에 자신이 실제 구체물을 잘라보지 않고도 직관적으로 단면의 모양을 유추할 수 있었다. 아울러 실제 모양이 아닌 사진으로도 충분히 구체화가 가능하였다. 기하학습에서 비본질적 요소가 사상된 반구체물은 추상적인 개념 학습에 효율적으로 사용할 수 있는 강력한 도구가 될 수 있을 것이다.

수학적 개념이 구체적인 사물이나 현상으로부터 시작되어 추상화되었음은 부인하기 어렵다. 이러한 생각을 바탕으로 수학 학습은 실생활, 구체물, 조작적 활동에서 출발해야 한다는 주장이 힘을 얻어왔다. 이러한 주장과 함께 ‘쉽고 재미있는 수학’을 추구하는 시대적 요구가 결부되어 수학을 ‘체험’하는 것은 현 시대 수학 교수·학습의 큰 흐름이 되었다. 실생활에서 구체물을 직접 다루어보고 체험한다는 것은 수학에 대한 태도적인 측면에서 매우 긍정적인 효과를 줄 수 있을 것이다. 그리고 CSA의 순서에 의해 구체물을 먼저 도입하는 것 역시 수학의 유용성, 호기심을 일깨울 수 있을 것이다.

위와 같이 거시적인 관점에서 구체적인 조작을 어릴 때 충분히 경험해본 뒤, 그 경험을 토대로 교수학습 과정에서 반구체물과 추상적 개념을 다루는 것은 매우 바람직할 것이다. 그러나 한 차시 또는 한 단원 내에서의 교수학습 과정이 반드시 이러한 역사발생적 순서를 따를 필요는 없으며, 교사는 교수학적 변환을 통해 제한된 시간에 학생들이 효율적으로 정확하게 추상적 개념을 형성할 수 있도록 도와야 할 것이다. 그런데 수많은 비본질적 요소가 포함된 구체물은 정해진 시간동안 추상적 개념을 형성하는데 방해가 될 수 있으며 오류를 일으킬 수도 있다. 이때 비본질적 요소가 제거된 반구체물은 학습을 이끌어 줄 수 있는 강력한 도구가 될 수 있을 것이다. 왜냐하면, 반구체물은 구체물에 비해 비본질적 요소가 사상되어진 교구이기 때문에 지

식의 전이를 방해하는 부적절한 요인이 최대한 제거되었다고 볼 수 있으며 추상적 개념을 구체화 하는 과정에서도 유의미한 수학적 사고를 경험할 수 있기 때문이다. 아울러 이러한 반구체물을 수업에 도입하는 순서가 반드시 구체물의 후순서일 필요는 없을 것이다.

마지막으로 본 연구와 관련하여 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 학습 순서에 따른 탐구 양상에 대한 질적 연구가 필요하다. CSA와 SAC의 학습 순서에 따른 정의적 영역과 성취도의 차이는 정량적인 연구 결과에서 큰 차이가 도출되지는 않았지만 학생 개개인의 탐구 전개 양상은 각기 다를 것이다. 예를 들어 반구체물과 추상적 개념을 모두 학습 한 뒤에 다루게 되는 구체물에 대한 탐구 양상은 기반기지 없이 다루게 되는 구체물에 대한 탐구 양상과 상당히 다를 것이다.

둘째, 본 연구는 구체물(C)이나 반구체물(S)에서 시작하는 두 가지 학습 양상을 비교했는데 추상적 개념(A)의 탐구에서 출발하는 수업도 분석해 볼 필요가 있을 것이다. 일반적인 원기둥, 구 등과 같은 회전체의 성질과 단면의 모양에 대해 추측을 해보고 이를 구체물이나 반구체물에 대한 실험으로 검증하는 방식도 가능할 것이다.

셋째, 본 연구는 기하학습에 관한 내용을 초등학교 6학년 학생에게 시행했기 때문에 모든 영역과 연령의 학생에게 일반화 하는 것에는 무리가 있다. 아울러 반구체물의 개념에 대한 설정에 따라 연구의 방식이나 결과가 크게 달라질 수 있음을 유의해야 한다.

참고문헌

고상숙(2009). 다양성 배경을 지닌 학생들의 학습현장에서 수학교육연구에 관한 문헌고찰.

한국학교수학회논문집 제12권, 제4호, 389-409
교육부(2013). **초등학교 교사용지도서 수학③**.

(주)천재교육

_____(2015). **초등학교 수학 6-2**. (주)천재교육

김길임(2008). **구체물-반구체물-추상물 단계에 따른 직접교수가 정신지체 학생의 덧셈능력에 미치는 영향**. 전남대학교 석사학위논문

김민수(1992). **국어사전**. 서울: 금성출판사.

김응태, 박한식, 우정호(1984). **수학교육학개론**. 서울: 서울대학교출판부

서지연(2007). **구체물-반구체물-추상물 단계에 따른 직접 교수가 수학교육부진아의 나눗셈 능력에 미치는 효과**. 단국대학교 석사학위논문

우정호, 강홍규(2005). Dewey의 경험주의 수학교육론 연구. **대한수학교육학회지 <수학교육학 연구>** 제15권 제2호, 107-130

유태호(2008). **초등학교 수학과 입체도형 영역의 학습 RIA 개발**. 서울교육대학교 석사학위논문

이경화(1996). **확률 개념의 교수학적 변환에 관한 연구**. 서울대학교 박사학위논문

임영빈, 홍진곤(2016). 구체물의 추상화와 추상적 개념의 구체화에 나타나는 초등학생의 수학적 사고 분석. **대한수학교육학회지 <학교수학>** 제18권 제1호, 159-173

정동권(2001). 수학교실에서 기하판의 활용 의의와 활용 사례 분석. **대한수학교육학회지 <학교수학>** 제3권 제2호, 447-473

차미정(2013). **구체물-반구체물-추상물단계에 따른 직접교수가 정신지체 중학생 연산수행에 미치는 효과**. 인제대학교 석사학위논문

한국교육개발원(1992). **교육의 본질 추구를 위한 수학 교육 평가 체제 연구(III)**. 한국교육개발원 연구자료 RM92-5-2

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situation in Mathematics*. Kluwer Academic Publisher

- Butler, F., Miler, S., Crehan, K., Babbit, B., & Pierce, T. (2003), Fraction instruction For students with mathematics disabilities: Comparing two teaching sequences, *Learning Disabilities Research & Practice, 18*, 99-111.
- Hall, S. (2007). This Means This, This Means That. London: Laurence King Publishing Ltd.
김진실 역. 기호학 입문. 서울: 비즈앤비즈
- Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M., & Heckler, A. F. (2005). Relevant concreteness and its effects on learning and transfer. In Proceedings of the XXVII annual conference of the Cognitive Science Society.
- Kaminski(2008). the Advantage of Abstract Example in Learning Math. [SCIENCE] Vol 320
- Maccini, P., & Hughes, C.A. (1997). Mathematics interventions for adolescents with learning disabilities. *Learning Disabilities Research & Practice, 12*, 168-176.

A Study on Application of Concrete Object and Semi-Concrete Object in Elementary Geometry Learning

Yim, Youngbin (Haeseo Elementary School)

Hong, Jin-Kon (Konkuk University)

The position as saying that the math learning needs to begin from what diversely presents concrete object or familiar situation is well known as a name dubbed CSA(Concrete-Semiconcrete-Abstract). Compared to this, a recent research by Kaminski, et al. asserts that learning an abstract concept first may be more effective in the aspect of knowledge transfer than learning a mathematical concept with concrete object of having various contexts. The purpose of this study was to analyze a class, which differently applied a guidance sequence of concrete object, semi-concrete object, and abstract concept in consideration of this conflicting perspective, and to confirm its

educational implication. As a result of research, a class with the application of a concept starting from the concrete object showed what made it have positive attitude toward mathematics, but wasn't continued its effect, and didn't indicate significant difference even in achievement. Even a case of showing error was observed rather owing to the excessive concreteness that the concrete object has. This error wasn't found in a class that adopted a concept as semi-concrete object. This suggests that the semi-concrete object, which was thought a non-essential element, can be efficiently used in learning an abstract concept.

* Key Words : concreteness(구체), abstraction(추상), concrete object(구체물), semiconcrete object(반구체물)

논문접수 : 2016. 6. 7

논문수정 : 2016. 9. 5

심사완료 : 2016. 9. 14