대한수학교육학회지 <학교수학> 제 18 권 제 3 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 18, No. 3, 589 ~ 609. Sep 2016

# 오마르 카얌(Omar Khayyam)이 제시한 삼차방정식의 기하학적 해법의 교육적 활용[1)]

반 은 섭[*] · 신 재 홍[**] · 류 희 찬[***]

본 논문에서는 중세 시대 아랍의 수학자 오마르 카얌(Omar Khayyam)이 제시한 삼차방정식의 기하학적 해법을 현대적으로 재해석하고 두 개의 원뿔곡선을 활용한 삼차방정식의 기하학적 해법이 갖는 교수학적 의미를 고찰하였다. 이를 바탕으로 삼차방정식 $x^3+4x=32$, $x^3+ax=b$, $x^3=4x+32$, $x^3=ax+b$의 기하학적 해법을 '대수와 기하의 연결', '귀납 및 일반화', '유추를 통한 유사한 해법의 연결' 관점에서 교육적으로 활용할 수 있는 방법과 적용 가능한 교수학적 시사점을 제시하고자 하였다. 삼차방정식을 기하학적으로 해결하면서 '대수와 기하의 연결'의 관점에서 삼차방정식의 대수적 표상과 원뿔곡선이라는 기하학적 표상의 상호 전환을 다룰 수 있다. 또한 '귀납 및 일반화'의 관점에서는 계수 및 상수항이 구체적인 수로 제시된 방정식의 기하학적 해법을 변수가 포함된 삼차방정식의 해법으로 일반화하는 과정을 다룰 수 있으며, '유추를 통한 유사한 해법의 연결'의 관점에서 문제의 해법과 관련된 유사한 절차와 방법을 새로운 문제의 해결에 적용할 수 있는 기회를 제공할 수 있을 것이다.

## Ⅰ. 서 론

대수와 기하의 영역은 학교 수학에서 가장 큰 부분을 차지하고 있으며, 수학의 양대 축으로서 독립적인 성격이 강하지만, 역사적으로 볼 때 한 영역에서의 아이디어를 다른 영역에서 재해석하면서 기존의 틀을 새로운 관점에서 이해할 수 있게 되어 해결할 수 없었던 문제에 대한 통찰을 얻을 수 있었다(Atiyah, 2001; Katz, 1997; Wagner, 2013).

삼차방정식의 경우도 대수적인 해법이 알려지기 이전에 많은 수학자들이 기하학적인 접근을 시도하였는데, 본 연구에서는 중세의 아랍의 수학자 Omar Khayyam이 고대 그리스 시대 이래로 알려져 온 원뿔곡선들의 교점을 활용하여 제시한 기하학적 해법(Connor, 1956; Khayyam, 2008; Mardia, 1999)을 재조명하고, 이를 좌표평면에서 구현된 원뿔곡선의 교점을 이용한 삼차방정식의 기하학적 해법으로 재해석하여 교수학적으로 활용할 수 있는 방법을 고찰하였다.

본 연구에서는 네 가지의 형태의 삼차방정식 $x^3+4x=32$, $x^3+ax=b$, $x^3=4x+32$, $x^3=ax+b$에 대한 기하학적 해법을 다루었다. 이들 삼차방정식을 기하학적으로 해결하기 위해서는 대수와 기하의 연결과 관련된 수학적 사고

* 홍덕고등학교, hymnes@naver.com (제1 저자)
** 한국교원대학교, jhshin@knue.ac.kr (교신저자)
*** 한국교원대학교, hclew@knue.ac.kr
1) 본 논문은 제1 저자의 박사학위 논문의 일부 내용을 포함하고 있음.

와 더불어 개별적인 삼차방정식을 추상화하여 그 예들을 포함하는 큰 범위로 확장하여 일반적인 삼차방정식으로 인식하는 귀납 및 일반화의 사고 전략이 필요하며(우정호, 2007; Mitchelmore, 2002), 구체적인 대상에 대한 수학적 지식을 일반화된 지식의 망으로 구조화해야 한다(Hershkowitz, Schwarz & Dreyfus, 2001; Hoyles, Noss & Pozzi, 1999). 또한 해법이 유사한 새로운 형태의 삼차방정식을 기하학적으로 해결하기 위하여 이미 알고 있는 문제의 해법을 인식하고 연결하는 유추의 과정(이경화, 2010; English, 2004; Lee & Sriraman, 2011; Polya, 2005; Schoenfeld, 1985)이 요구된다고 할 수 있다.

한편, 현행 교육과정에서 방정식의 기하학적 해는 주로 일차방정식과 이차방정식에 한하여 다루고 있으며(교육과학기술부, 2011; 교육부, 2015; Dikovic, 2009; Knuth, 2000; Yerushalmy & Gilead, 1997), 미지수가 두 개인 이차방정식의 연립방정식 및 연립방정식을 통하여 구성할 수 있는 삼차방정식이나 사차방정식에 대한 내용이 고등학교의 1학년 과정에 포함되어 있지만(교육과학기술부, 2011; 교육부, 2015; 류희찬 외, 2014), 이들 방정식을 더 낮은 차수의 연립방정식으로 전환하는 과정을 다룬 연구는 찾아보기 어렵다. 또한 고차방정식의 해와 원뿔곡선의 교점을 상호 연관시켜 해석하고 이를 교수학적으로 활용한 연구가 매우 드물다는 점에서 삼차방정식의 기하학적 해법을 유의미하게 다루고 있는 선행 연구가 다소 제한적이라는 것을 확인할 수 있다.

이와 같이 삼차방정식을 더 낮은 차수의 방정식의 연립방정식으로 해석하고 대수적으로 다룰 수 없는 실근을 구하기 위하여 기하학적으로 접근할 수 있는 교수학적 자료가 제한적이라는 상황에서 본 연구는 '대수와 기하의 연결', '귀납 및 일반화', '유추를 통한 유사한 해법의 연결'의 관점에서 Omar Khayyam이 제시했던 삼차방정식의 기하학적 해법을 현대적으로 재해석하여 교수학적으로 활용할 수 있는 방법을 제공하는 것을 목적으로 하고 있다.

수학의 역사적 발달의 논리는 역사 발생적 원리를 교수학적으로 활용하고자 한 여러 학자들의 노력에 의하여 다방면으로 논의되어 왔다. 그 가운데 Freudenthal은 기성 지식에 따른 전통적인 수학 교육에 대한 비판적인 관점을 바탕으로 교사는 점진적인 형식화가 가능한 형태로 수학을 재발명하는 방법을 지도해야 한다고 주장하였는데(우정호, 2007), 이는 역사 발생적 원리를 통한 수학의 교수-학습 과정에서 교사의 역할을 강조하고 있는 것으로 볼 수 있다. 또한 수학사와 관련한 교육적 연구를 비판적으로 분석한 우정호·민세영·정연준(2003)은 수학사를 교수학적으로 활용하는 상황에서는 수학 학습에 대한 흥미와 학습동기 유발을 넘어서 수학적 개념의 이해를 심화시킬 수 있도록 학습 내용과 개념적 관련성이 분명하게 제시되어야 한다고 주장하였으며, 학교 수학에서 역사 발생적 자료를 활용할 수 있는 구체적인 방법에 관한 보다 진지한 연구의 필요성을 제기하기도 하였다.

한편, 교육부(2015)에서 제시한 수학과 교육과정의 교수-학습 방향의 항목 4)와 5)에 따르면 과목별 내용의 배열순서가 반드시 교수·학습의 순서를 의미하는 것은 아니므로, 교수 및 학습 계획을 수립하거나 학습 자료를 개발할 때에는 내용의 특성과 난이도, 학교 여건, 학생의 수준 등을 고려하여 내용, 순서 등을 재구성할 수 있으며, 교육과정에 제시된 내용을 지도한 이후, 우수 학생에게는 심화학습의 기회를 추가로 제공할 수 있다고 한 바, 고등학교의 현장에서 교사의 실천적인 노력이 수반될 경우에 본 연구에서 다루게 되는 삼차방정식의 기하학적 해법에 대한 교수학적 의미가 반영될 수 있을 것이다.

## Ⅱ. Omar Khayyam이 제시한 삼차방정식의 기하학적 해법

16세기 초 페로(Ferro), 카르다노(Cardano), 타르탈리아(Tartaglia) 등의 이탈리아의 수학자들에 의하여 삼차방정식의 대수적 해법이 알려지게 되었는데(Boyer & Merzbach, 1991; Connor, 1956; Eves, 1995), 이미 오래전부터 기하학적인 방법으로 접근하여 삼차방정식의 실근을 구하려는 시도가 있었다. 고대 그리스 시대의 수학자 메나이크모스는 3대 작도 불가능 문제 중 하나로 알려진, '주어진 정육면체의 두 배의 부피를 갖는 정육면체를 만드는 배적 문제'를 해결하기 위하여 눈금이 없는 자와 컴퍼스를 이용한 전통적인 작도 방법을 탈피하여 원뿔곡선의 교점을 활용하였으며, 아르키메데스는 구의 부피를 주어진 비율이 되도록 분할하는 방법을 연구하는 과정에서 두 원뿔곡선의 교점을 활용하였다(Boyer & Merzbach, 1991; Eves, 1995; Wagner, 2013).

현대적인 대수 표기법으로 본다면 이들은 기본적인 형태의 삼차방정식인 '$x^3 = a\,(a>0)$'를 기하학적으로 해석한 것이며, 고대 그리스 시대의 수학자들은 원뿔곡선을 활용하여 기본적인 형태의 삼차방정식을 기하학적으로 다룰 수 있었다고 볼 수 있다.

이후 중세 시대 아랍 수학자들이 고대 그리스 수학자들에 의하여 발전되어 온 유클리드 기하학적 방법론과 원뿔곡선의 개념을 이용하여 삼차방정식을 기하학적인 방법으로 해결할 수 있는 방법을 진지하게 연구하였는데, 특히 아랍의 대표적인 시인이자 수학자였던 오마르 카얌(Omar Khayyam, 1048-1131)이 삼차방정식을 분류하고 이에 대한 체계적인 기하학적 해법을 제시하였다(Berggren, 1986; Khayyam, 2008; Law, 2003; Mardia, 1999).

삼차방정식을 $x^3+px^2+qx+r=0\,(p,q,r\in\mathrm{R})$과 같이 현대적인 대수 표기법으로 나타낼 수 있으며, 방정식의 실근과 허근을 모두 생각할 수 있지만, Omar Khayyam은 음수의 개념을 사용하지 않았기 때문에 계수 및 상수항을 양수만을 사용하여 다루었으며, 양의 실근만을 구할 수밖에 없었다. 또한 측정을 할 수 있는 미지의 양(길이)을 'root' 혹은 'side'로 나타내었으며, 미지의 양을 제곱한 넓이를 'square', 미지의 양을 세제곱한 부피를 'cube'라는 용어로 나타내어 방정식을 표현하였다.

예를 들어,

$$(cube)+a(square)=b(side)+number$$

라는 Omar Khayyam의 표현은 현대적인 의미로 삼차방정식

$$x^3+ax^2=bx+c$$

를 의미한다.

Omar Khayyam은 $x^3$의 계수가 1인 삼차방정식만을 다루었으며, 이를 현대적인 표기법을 사용하여 다음과 같이 19가지 형태로 나타낼 수 있다.

[1] $x^3=c$
[2] $x^3=cx$ $(\Leftrightarrow\ x^2=c)$
[3] $x^3=cx^2$ $(\Leftrightarrow\ x^2=cx)$
[4] $x^3+ax^2=bx$ $(\Leftrightarrow\ x^2+ax=b)$
[5] $x^3+bx=ax^2$ $(\Leftrightarrow\ x^2+b=ax)$
[6] $x^3=ax^2+bx$ $(\Leftrightarrow\ x^2=ax+b)$
**[7]** $\underline{x^3+bx=c}$
**[8]** $\underline{x^3+c=bx}$
**[9]** $\underline{x^3=bx+c}$
**[10]** $\underline{x^3+ax^2=c}$
**[11]** $\underline{x^3+c=ax^2}$
**[12]** $\underline{x^3=ax^2+c}$
**[13]** $\underline{x^3+ax^2+bx=c}$
**[14]** $\underline{x^3+ax^2+c=bx}$
**[15]** $\underline{x^3+bx+c=ax^2}$

**[16]** $\underline{x^3 = ax^2 + bx + c}$
**[17]** $\underline{x^3 + ax^2 = bx + c}$
**[18]** $\underline{x^3 + bx = ax^2 + c}$
**[19]** $\underline{x^3 + c = ax^2 + bx}$

위에 제시된 모든 삼차방정식은 양의 실근을 갖는 삼차방정식이며, 양의 실근을 생각할 수 없는 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$과 같은 형태의 삼차방정식은 다루지 않았다. [1]의 방정식은 고대 그리스 수학자들에 의하여 기하학적 해법이 제시되었으며, [2], [3], [4], [5], [6]의 경우는 이차방정식이 되므로 Omar Khayyam은 위에서 밑줄로 표시된 [7]의 삼차방정식부터 [19]의 삼차방정식에 대하여, 고대 그리스의 수학자들이 연구해 놓은 비례식 및 원뿔곡선의 성질을 활용하여 양의 실근을 서로 다른 원뿔곡선의 교점으로 나타낼 수 있는 일반적인 기하학적 해법을 제시하였다(Berggren, 1986; Connor, 1956; Khayyam, 2008; Law, 2003; Mardia, 1999).

양의 실근을 갖는 모든 형태의 삼차방정식을 기하학적으로 해결하기 위한 원뿔곡선의 조합을 다음의 <표 II-1>에서 확인할 수 있다(Connor, 1956; Khayyam, 2008; Law, 2003; Mardia, 1999).

이제, <표 II-1>에서 음영으로 표시된 삼차방정식 $x^3 + bx = c$와 $x^3 = bx + c$에 대한 Omar Khayyam의 기하학적 해법을 살펴보고자 한다. 고대 그리스 시대에는 방정식의 계수를 선분으로 국한하여 다루었지만, Omar Khayyam은 넓이나 부피와 같은 물리량으로 확장하여 기하학적 해법에 대한 아이디어를 얻을 수 있었다(Berggren, 1986; Boyer & Merzbach, 1991; Khayyam, 2008).

Omar Khayyam의 삼차방정식 표기법에서 계수와 상수항, 그리고 미지의 수의 거듭제곱은 길이, 넓이, 부피와 같은 물리량을 나타내고 있으며, 표현된 물리량들이 방정식을 만족시키는 조건을 찾아가면서 삼차방정식의 실근을 구할 수 있었다.

예를 들어, 삼차방정식

$$x^3 + bx = c$$

<표 II-1> 삼차방정식의 기하학적 해결을 위한 원뿔곡선의 조합

| 순 | 삼차방정식 | 원뿔곡선의 조합 |
|---|---|---|
| 1 | $x^3 + bx = c$ | 포물선과 반원의 교점 |
| 2 | $x^3 + c = bx$ | 포물선과 쌍곡선의 교점 |
| 3 | $x^3 = bx + c$ | 포물선과 쌍곡선의 교점 |
| 4 | $x^3 + ax^2 = c$ | 포물선과 쌍곡선의 교점 |
| 5 | $x^3 + c = ax^2$ | 포물선과 쌍곡선의 교점 |
| 6 | $x^3 = ax^2 + c$ | 포물선과 쌍곡선의 교점 |
| 7 | $x^3 + ax^2 + bx = c$ | 쌍곡선과 반원의 교점 |
| 8 | $x^3 + ax^2 + c = bx$ | 쌍곡선과 쌍곡선의 교점 |
| 9 | $x^3 + bx + c = ax^2$ | 원과 쌍곡선의 교점 |
| 10 | $x^3 = ax^2 + bx + c$ | 쌍곡선과 쌍곡선의 교점 |
| 11 | $x^3 + ax^2 = bx + c$ | 쌍곡선과 쌍곡선의 교점 |
| 12 | $x^3 + bx = ax^2 + c$ | 원과 쌍곡선의 교점 |
| 13 | $x^3 + c = ax^2 + bx$ | 쌍곡선과 쌍곡선의 교점 |

에 대한 Omar Khayyam의 표현은

$$(cube)+b(side)=number$$

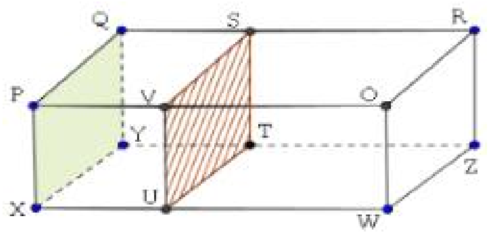
이며, 미지의 양을 어떤 선분 $\overline{\mathrm{QS}}$의 길이라고 한다면,

$$(\overline{\mathrm{QS}})^3+b(\overline{\mathrm{QS}})=c$$

로 표현이 가능하다. Omar Khayyam은 미지의 양인 선분 $\overline{\mathrm{QS}}$의 길이를 찾는 과정에서 각 항을 모두 부피로 해석하기 위하여 $b$의 값을 [그림 II-1]의 음영 부분의 넓이로, $c$의 값을 [그림 II-1]의 세 번째 부분의 부피로 생각하였다.

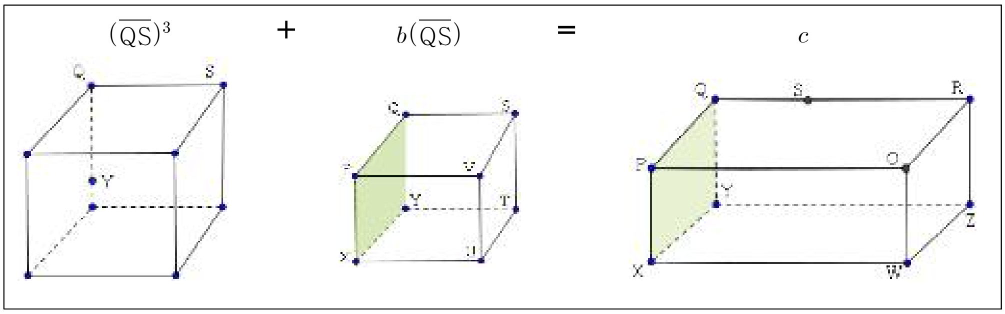
즉, 선분 $\overline{\mathrm{QS}}$를 한 변으로 하는 정육면체([그림 II-1]의 첫 번째 부분)의 부피와 $\overline{\mathrm{QS}}$를 높이로 하고 $\overline{\mathrm{QY}}\perp\overline{\mathrm{QS}}$를 만족시키는 선분 $\overline{\mathrm{QY}}$를 한 변으로 하는, 넓이가 $b$가 되는 정사각형으로 이루어진 면을 밑면으로 하는 직육면체([그림 II-1]의 두 번 부분)의 부피를 더하면 $\overline{\mathrm{QY}}$를 한 변으로 하는 정사각형으로 이루어진 면을 밑면으로 하고 $\overline{\mathrm{QR}}=\frac{c}{b}$인 선분 $\overline{\mathrm{QR}}$을 높이로 하는 직육면체([그림 II-1]의 세 번째 부분)의 부피와 같아지는 $\overline{\mathrm{QR}}$ 위의 점 S를 원뿔곡선을 이용하여 찾아 미지의 양인 선분 $\overline{\mathrm{QS}}$의 길이를 구할 수 있었다.

등식 $(\overline{\mathrm{QS}})^3+b(\overline{\mathrm{QS}})=c$가 성립한다는 것은 [그림 II-1]의 첫 번째 부분의 부피와 두 번째 부분의 부피를 더하면, 세 번째의 부분의 부피가 된다는 것을 의미한다. 그런데 두 번째 부분의 직육면체 PQSV－XYTU는 세 번째 부분에 그대로 포함되어 있기 때문에 첫 번째 부분에 제시된 $\overline{\mathrm{QS}}$를 한 변으로 하는 정육면체의 부피와 [그림 II-2]에서의 직육면체 VSRO－UTZW의 부피가 같아질 수 있는 점 S를 찾기만 하면 되었다.



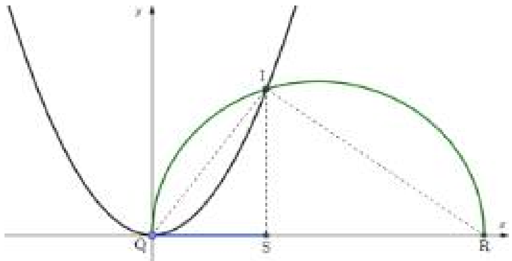

[그림 II-2] $x^3+bx=c$의 해결을 위한 Omar Khayyam의 해석 2

즉, [그림 II-1]의 세 번째 부분의 직육면체 PQRO－XTZW에서 넓이가 $b$가 되는 정사각형으로 이루어진 면 PQYX에 평행한 정사각형 VSTU로 이루어진 면의 위치를 정확하게 찾기만 하면 미지의 길이인 $\overline{\mathrm{QS}}$의 길이를 알 수 있는 것이다. 점 S를 찾았다고 가정하고 정사각형 VSTU를 빗금으로 나타내어 [그림 II-2]를 그리면, $\overline{\mathrm{QS}}$를 한 모서리로 하는 정육면체의 부피는 직육면체 VSRO－UTZW의 부피와 같아진다.




[그림 II-1] $x^3+bx=c$의 해결을 위한 Omar Khayyam의 해석 1

이와 같이 삼차방정식 $(\overline{\mathrm{QS}})^3+b(\overline{\mathrm{QS}})=c$에서 $b$의 값을 넓이, $c$의 값을 부피로 생각하여 미지의 양 $\overline{\mathrm{QS}}$를 기하학적으로 해결하기 위한 아이디어를 얻은 Omar Khayyam은 고대 그리스 시대부터 알려져 온 도형의 닮음비와 원뿔곡선의 성질을 이용하여, 두 원뿔곡선의 교점을 이용하여 미지의 값을 구할 수 있었다. 그는 넓이가 $b$가 되는 정사각형의 한 변의 길이인 $\sqrt{b}$를 표축(latus rectum)2)의 길이로 하는 포물선과 지름의 길이가 $\frac{c}{b}$인 원의 교점을 이용하여 삼차방정식의 기하학적 해를 제시하였다. <표 II-2>에서 Omar Khayyam의 해법과 현대적 표기법을 비교한 내용을 확인할 수 있다.




[그림 II-3] $x^3+bx=c$에 대한 Omar Khayyam 해법의 재해석 1

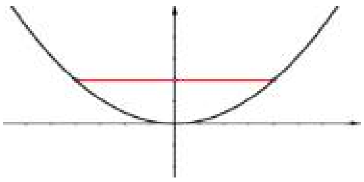
현대적인 표기법을 사용하여 Omar Khayyam의 해법을 다음과 같이 간단하게 증명할 수 있다(Amir-Moez, 1962; Krantz, 2010, p. 63).

위의 [그림 II-3]에서 비례식을 이용하기 위하여 포물선과 반원의 교점 I에서 꼭짓점 Q와 R

<표 II-2> Omar Khayyam의 해법과 현대적 표기법의 비교 1(Khayyam, 2008; Mena, 2009에서 변형)

| 단계 | Omar Khayyam의 해법 | 현대적 표기법 |
|---|---|---|
| | Cube and sides equal a number | $x^3+bx=c\ (b,c>0)$ |
| 1 | 넓이가 $b$가 되는 정사각형의 한 변의 길이 $a$를 생각하자. | $a=\sqrt{b}$ |
| 2 | 밑면의 넓이가 $b$, 부피가 $c$가 되는 직육면체의 한 모서리의 길이 $h$를 생각하자. | $h=\frac{c}{b}$ |
| 3 | Q를 꼭짓점으로 하고 QN을 축으로 하며, $a$를 표축(latus rectum)의 길이로 하는 포물선을 그린다. | $ay=x^2$ |
| 4 | 포물선의 꼭짓점을 지나며 축에 수직인 직선위에 꼭짓점으로부터 길이가 $h$인 점 R을 잡고 QR을 지름으로 하는 반원을 그린다. | $\left(x-\frac{h}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2$ |
| 5 | 포물선과 반원의 교점 I를 찾는다. 점 I에서 QR에 내린 수선의 발 S에 대하여 QS의 길이가 미지의 길이이다. | 포물선의 방정식 $\sqrt{b}y=x^2$과 원의 방정식 $\left(x-\frac{h}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{h}{2}\right)^2$을 연립하여 $x$의 값을 구하면 된다. |

2) 표축(latus rectum)은 포물선의 초점을 지나며, 준선과 평행한 직선이 포물선과 만나면서 생기는 두 교점을 연결한 선분(아래의 그림 참고)이며, 표축의 길이는 포물선의 모양을 결정하게 된다(Krantz, 2010, pp. 62-63). 표축의 길이는 항상 포물선의 꼭짓점에서 초점 사이의 거리의 네 배이다.



을 각각 연결하는 보조선을 그었다. Omar Khayyam의 해법을 현대적인 대수 표기법을 사용하여 나타내면, $\overline{QS}=\alpha$라 할 때, 표축의 길이가 $\sqrt{b}$인 포물선의 방정식이 $\sqrt{b}y=x^2$ 이므로,

$$\sqrt{b}\cdot\overline{IS}=\alpha^2 \cdots (1)$$

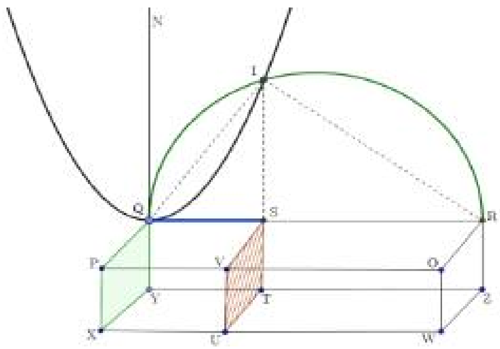
이고, $\triangle IQR$은 직각삼각형이므로, 닮음비의 성질을 이용하면,

$$\overline{IS}^2=\alpha\cdot\left(\frac{c}{b}-\alpha\right)\cdots (2)$$

이다. (1)과 (2)를 연립하여, $\alpha$를 실근으로 갖는 삼차방정식

$$x^3+bx=c$$

를 얻을 수 있다.




[그림 II-4] $x^3+bx=c$에 대한 Omar Khayyam 해법의 재해석 2

Omar Khayyam이 삼차방정식을 해결하기 위하여 부피라는 물리량과 원뿔곡선을 연결시킨 과정을 살펴보기 위하여 [그림 II-3]을 [그림 II-2]와 연결하여 [그림 II-4]와 같이 나타내었다.

이 그림에서 정사각형 $PQYX$와 정사각형 $VSTU$는 <표 II-2>의 Omar Khayyam 해법의 3단계에서 나온 표축의 길이 $a=\sqrt{b}$를 한 변으로 하고 있으므로, $\overline{QY}=\sqrt{b}$이며, $\overline{QR}=\frac{c}{b}$이다. 또한 비례식을 확인하기 위하여 앞의 경우에서와 같이 포물선과 반원의 교점 I에서 꼭짓점 Q와 R을 연결하는 보조선을 그었다. 포물선의 표축의 길이인 $\sqrt{b}$는 $\frac{\overline{QS}^2}{\overline{IS}}$의 값과 같으므로,

$$\overline{QS}^2=\sqrt{b}\cdot\overline{IS}\ \cdots (*)$$

이고, $\triangle IQR$은 직각삼각형이므로, 닮음비의 성질을 이용하면,

$$\overline{IS}^2=\overline{QS}\cdot\overline{SR}\ \cdots (**)$$

이므로 식 (*), (**)로부터, $\overline{QS}^3=b\cdot\overline{SR}$이 성립한다는 것을 확인할 수 있다. 그러므로 $\overline{QS}$를 한 모서리로 하는 정육면체의 부피는 직육면체 $VSRO-UTZW$의 부피와 같다는 것이 증명되었다(Berggren, 1986; Khayyam, 2008).

한편, 다음과 같이 표현된 방정식

$$(cube)=b(side)+number$$

는 앞에서 분류한 방정식인

$$x^3=bx+c$$

이며, 미지의 양을 선분 $\overline{QS}$의 길이라고 한다면,

$$(\overline{QS})^3=b(\overline{QS})+c$$

로 표현이 가능하다.

삼차방정식 $(\overline{QS})^3=b(\overline{QS})+c$를 기하학적으로 해결하기 위하여 Omar Khayyam은 앞의 경우와 마찬가지로 각 항을 모두 부피로 해석하였으며, 직육면체 세 개의 부피가 주어진 식을 만족시키는 조건을 찾아가면서 삼차방정식을 다음과 같이 기하학적으로 해결할 수 있었다.

그는 $b$의 값을 넓이, $c$의 값을 부피로 생각하였으며, 넓이가 $b$가 되는 정사각형의 한 변의 길이인 $\sqrt{b}$를 표축(latus rectum)의 길이로 하는 포물선과 주축의 길이가 $\frac{c}{b}$인 직각쌍곡선[3])의 교점을 통하여 삼차방정식의 기하학적 해를 제시하였다. Omar Khayyam의 해법과 현대적 표기법

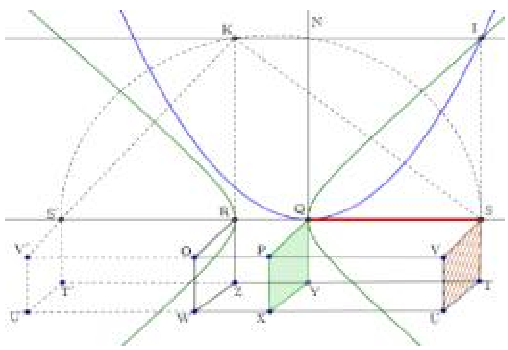
3) 두 개의 점근선이 서로 수직이 되는 쌍곡선

<표 II-3> Omar Khayyam의 해법과 현대적 표기법의 비교 2(Khayyam, 2008; Mena, 2009에서 변형)

| 단계 | Omar Khayyam의 해법 | 현대적 표기법 |
|---|---|---|
| | Cube equal sides and a number | $x^3 = bx + c\ (b, c > 0)$ |
| 1 | 넓이가 $b$가 되는 정사각형의 한 변의 길이 $a$를 생각하자. | $a = \sqrt{b}$ |
| 2 | 밑면의 넓이가 $b$, 부피가 $c$가 되는 직육면체의 한 모서리의 길이 $h$를 생각하자. | $h = \frac{c}{b}$ |
| 3 | Q를 꼭짓점으로 하고 QN을 축으로 하며, $a$를 표축(latus rectum)의 길이로 하는 포물선을 그린다. | $ay = x^2$ |
| 4 | 포물선의 꼭짓점을 지나며 축에 수직인 직선위에 꼭짓점으로부터 길이가 $h$인 점 R을 잡고 QR을 주축으로 하는 직각쌍곡선을 그린다. | $\left(x + \frac{h}{2}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2$ |
| 5 | 포물선과 직각쌍곡선의 교점 I를 찾는다. 점 I에서 QR에 내린 수선의 발 S에 대하여 QS의 길이가 미지의 길이이다. | 포물선의 방정식 $\sqrt{b}\,y = x^2$과 쌍곡선의 방정식 $\left(x + \frac{h}{2}\right)^2 - y^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2$을 연립하여 $x$의 값을 구하면 된다. |

을 비교하여 <표 II-3>과 같이 나타낼 수 있다.

Omar Khayyam이 삼차방정식 $(\overline{\mathrm{QS}})^3 = b(\overline{\mathrm{QS}}) + c$를 해결하면서 각 항의 값으로 해석한 직육면체의 부피라는 물리량을 어떻게 원뿔곡선의 교점과 연결했는지 살펴보기 위하여 <표 II-3>의 Omar Khayyam 해법에 제시된 포물선 및 직각쌍곡선을 직육면체와 함께 [그림 II-5]와 같이 나타내었다.



[그림 II-5] $x^3 = bx + c$에 대한 Omar Khayyam 해법의 재해석

삼차방정식 $(\overline{\mathrm{QS}})^3 = b(\overline{\mathrm{QS}}) + c$를

$$(\overline{\mathrm{QS}}\text{를 한 모서리로 하는 정육면체의 부피}) = (\text{직육면체}\mathrm{PQSV}-\mathrm{XYTU}\text{의 부피}) + (\text{직육면체}\mathrm{ORQP}-\mathrm{WZYX}\text{의 부피})$$

와 같이 부피라는 물리량을 이용하여 표현할 수 있다.

[그림 II-5]에서 정사각형 PQYX와 정사각형 VSTU는 <표 II-3>의 Omar Khayyam 해법의 3단계에서 나온 표축의 길이 $a = \sqrt{b}$를 한 모서리로 하고 있으므로, $\overline{\mathrm{QY}} = \sqrt{b}$이며, 주축의 길이는 $\overline{\mathrm{QR}} = \frac{c}{b}$이다. 한편, 직각쌍곡선의 두 꼭짓점 R과 Q를 잇는 선분의 중점을 중심으로 하고, 주축의 길이 보다 큰 값을 지름으로 하는 원을 그리면, 주축에 대하여 R에서 그은 수선이 원과 점 K에서 만난다. 그리고 선분 $\overline{\mathrm{RK}}$의 길이는 주축의 연장선과 원의 교점인 점 S와 주축의 연장선에 대하여 점 S에서 그은 수선이 쌍곡선과 만나는 점 I를 잇는 선분 $\overline{\mathrm{IS}}$의 길이와 같다(Berggren, 1986, p. 88). 주축의 연장선과 원이 만나는 점 S 이외의 점을 점 S′이라 하고, 점 K에서 점 S, 점 R, 점 S′을 연결하는 보조선을 그릴 수 있다.

포물선에서 표축의 길이인 $\sqrt{b}$는 $\frac{\overline{\mathrm{QS}}^2}{\overline{\mathrm{IS}}}$의 값

과 같으므로,

$$\overline{QS}^2 = \sqrt{b} \cdot \overline{IS} \ \cdots (*)$$

이고, $\triangle KS'S$는 직각삼각형이므로, 닮음비의 성질을 이용하면, $\overline{KR}^2 = \overline{S'R} \cdot \overline{RS}$이며, $\overline{KR} = \overline{IS}$, $\overline{S'R} = \overline{QS}$이므로,

$$\overline{IS}^2 = \overline{QS} \cdot \overline{RS} \ \cdots (**)$$

이다. 이제, 식 (*), (**)로부터, $\overline{QS}^3 = b \cdot \overline{RS}$가 성립한다는 것을 알 수 있다.

그러므로 $\overline{QS}$를 한 모서리로 하는 정육면체의 부피가 [그림 II-5]의 직육면체 $PQSV-XYTU$의 부피와 직육면체 $ORQP-WZYX$의 부피의 합인 직육면체 $ORSV-WZTU$의 부피와 같아지게 하는 점 S를 찾았다는 것이 증명되었다.(Khayyam, 2008; Wagner, 2013). Omar Khayyam의 위와 같은 해법을 현대적인 대수 표기법을 사용하여 나타내면, $\overline{QS} = k$, $\overline{IS} = y$라 할 때, 위의 식 (*)은 $k^2 = \sqrt{b}y$, 식 (**)는 $y^2 = k\left(\frac{c}{b} + k\right)$이며, 두 식을 연립하면, $k$ 값을 실근으로 갖는 삼차방정식 $x^3 = bx + c$를 얻을 수 있다.

이상에서 살펴본 바와 같이 Omar Khayyam은 자와 컴퍼스만을 이용한 작도 방법으로 삼차방정식의 기하학적 해를 구하는데 한계가 있다는 것을 알고, 원뿔곡선을 활용하여 기하학적인 해를 구할 수 있는 방법을 제시하였다. 그는 삼차방정식을 기하학적으로 해석하여 대수와 기하의 연결 고리를 마련했다는 점에서 수학사에 큰 공헌을 하였지만(Boyer & Merzbach, 1991), 기하학적인 해법 역시 삼차방정식의 완벽한 해법이 될 수 없다는 것을 알고 있었으며, 삼차방정식을 대수적으로 해결할 수 있는 일반적인 해법이 언젠가는 알려질 것이라고 믿고 있었다(Kasir, 1931, p. 49; Lumpkin, 1978). 이후 근대가 시작되면서 이탈리아의 수학자들에 의하여 삼차방정식의 대수적 해법이 세상에 알려지기까지는 약 500여년의 시간이 필요했었다.

## Ⅲ. Omar Khayyam의 기하학적 해법의 현대적 재해석

Omar Khayyam이 활동하던 시대에는 일반적인 계수의 개념이 없었기 때문에 삼차방정식을 19가지 형태로 분류할 수밖에 없었으며, 각각의 경우에 대하여 양의 실근을 구할 수 있는 기하학적 해법을 생각해야 했지만, 현대적인 표기법을 사용하면 다음과 같이 한 가지 표현으로 삼차방정식을 나타낼 수 있다.

$$z^3 + pz^2 + qz + r = 0 \ (p, q, r \in \mathrm{R})$$

이 식에서 $z = x - \frac{p}{3}$로 치환하면, 이차항이 제거된(depressed) 삼차방정식

$$x^3 + mx + n = 0 \ (m, n \in \mathrm{R}) \ \cdots (\bigstar)$$

을 얻을 수 있다.

$(\bigstar)$의 삼차방정식은 $a, b$가 양수라는 전제하에 Omar Khayyam의 표기법을 사용하면, 다음과 같은 네 가지 형태의 삼차방정식으로 분류된다.

$$x^3 + ax = b \ \cdots (*) \qquad x^3 = ax + b \ \cdots (**)$$
$$x^3 + b = ax \ \cdots (***) \qquad x^3 + ax + b = 0 \ \cdots (****)$$

이 중 삼차방정식 $(*)$의 경우 양의 실근만 존재하는데, 이는 $(****)$의 음의 실근과 절댓값이 같으며, 삼차방정식 $(**)$의 양(음)의 실근은 $(***)$의 음(양)의 실근과 절댓값이 같으므로 삼차방정식의 실근을 다룬다는 관점에서는 네 가지 형태의 방정식 중 $x^3 + ax = b$와 $x^3 = ax + b$의 실근을 구하는 것으로 충분하다고 할 수 있다. 또한 $a, b$가 양수라는 조건하에 삼차방정식 $x^3 + ax = b$와 $x^3 = ax + b$는 단 하나의 양의 실근을 갖기 때문에 양의 실근의 개수에 관한 혼란이 없이 삼차방정식에 대한 Omar Khayyam의 기하학적 해법을 다룰 수 있으므로 삼차방정식 $x^3 + ax = b$와 $x^3 = ax + b$의 기하학

적 해법을 고찰해보는 것에 대한 의미를 찾을 수 있을 것이다.

한편, $x^3+ax=b$와 $x^3=ax+b$ 형태의 변수가 포함된 삼차방정식을 해결하기 이전에 $a$와 $b$의 값이 구체적인 수로 적절하게 제시된 삼차방정식을 다루는 것이 의미가 있을 것이며, 구체적인 예를 바탕으로 한 귀납을 통하여 일반화를 하는 과정에서 좋은 예를 제공하는 것이 무엇보다 중요하게 때문에(Sriraman, 2004; Zazkis, Liljedahl & Chernoff, 2007), 삼차방정식 $x^3+ax=b$와 $x^3=ax+b$의 기하학적 해를 제시하는 과정에서 사용되는 $\sqrt{a}$의 값과 $\dfrac{b}{a}$의 값 등을 고려하여 $a$의 값을 $4$로, $b$의 값을 $32$로 하는 삼차방정식 $x^3+4x=32$와 $x^3=4x+32$를 구체적인 삼차방정식의 한 예로 제시할 수 있다.

<표 III-1> 교수학적으로 활용할 수 있는 삼차방정식의 유형 및 종류

| 유형 | $a, b$의 값이 주어진 삼차방정식 | 일반화된 삼차방정식 |
|---|---|---|
| 유형 I | $x^3+4x=32$ | $x^3+ax=b$ |
| 유형 II | $x^3=4x+32$ | $x^3=ax+b$ |

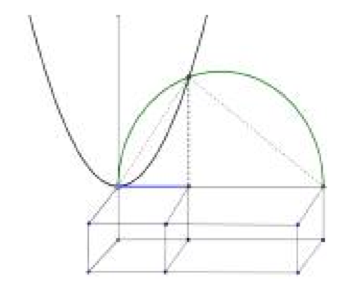
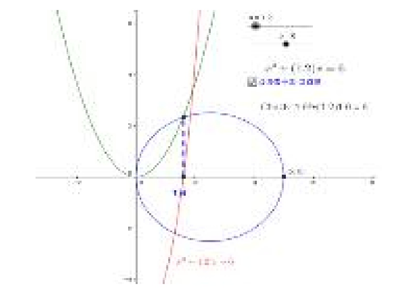
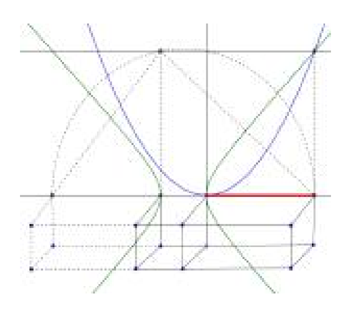
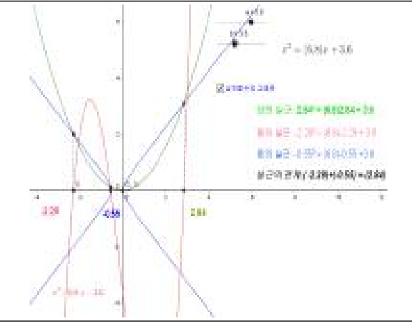
삼차방정식의 기하학적 해법을 다루기 위해서는 위의 <표 III-1>과 같이 $a, b$의 값이 각각 $4, 32$로 주어진 삼차방정식과 변수 $a, b$가 포함된 삼차방정식을 $x^3+4x=32$, $x^3+ax=b$, $x^3=4x+32$, $x^3=ax+b$의 순서대로 활용할 수 있을 것이다.

Omar Khayyam은 음수의 개념 및 현대적인 대수적 표기법을 사용할 수 없었으며, 도형을 좌표평면에 나타낼 수도 없었던 당시에 고대 그리스 시대로부터 알려져 온 닮음비에 관한 개념과 원뿔곡선의 성질만을 활용하여 삼차방정식을 기하학적으로 해결할 수 있었다. 하지만, 실수의 개념과 좌표평면, 그리고 동적 기하 환경이라는 풍부한 자원을 활용하여 Omar Khayyam이 제시한 삼차방정식의 기하학적 해법을 현대적인 의미로 재해석할 수 있다. 원뿔곡선에 대한 Omar Khayyam의 고전적인 접근 방법은 도형의 방정식을 좌표평면에 표현하고, 이들의 교점을 구하는 것으로 이해할 수 있다.

학교 수학에서는 도형을 쉽게 구현해 줄 수 있다는 장점으로 인하여 동적 기하 환경이 주된 관심의 대상이 되어 왔으며, 이와 관련된 연구가 가장 활발하게 진행되고 있다(Jones, 2002; Sangwin, 2007). 동적 기하 환경에서 가능한 시각화는 학생들에게 수학적 관계와 개념을 이해하고 탐구할 수 있도록 지원해줄 수 있다는 다수의 선행연구(예, Erez & Yerushalmy, 2006; Healy & Hoyles, 2001; Laborde, 1998, 2010)를 바탕으로 동적 기하 환경을 교수 및 학습을 위한 탐구의 수단으로 활용할 수 있는 가능성을 제시할 수 있을 것이다.

동적 기하 환경을 활용하면 원뿔곡선이나 함수의 그래프를 좌표평면에 비교적 수월하게 표현할 수 있기 때문에 삼차식 $f(x)$에 대하여 삼차방정식 $f(x)=0$의 기하학적 해를 삼차함수 $y=f(x)$의 $x$절편으로 해석하는 과정이나 원뿔곡선의 교점을 통하여 Omar Khayyam이 제시한 삼차방정식의 기하학적 해법을 다루는 과정에서 인지적인 부담을 줄일 수 있다.

Omar Khayyam이 제시한 삼차방정식의 기하학적 해법을 현대적인 대수 표기법을 사용하여 좌표평면 상에서 재해석한 내용이 [그림 III-1]에 제시되어 있다. 이 그림은 Omar Khayyam이 분류한 삼차방정식 중에서 $x^3+ax=b$와 $x^3=ax+b$의 기하학적 해를 동적 기하 환경을 통하여 구현한 것이며, 원뿔곡선의 교점을 이용하여 나타낸 삼차방정식의 기하학적 해를 삼차함수 $y=x^3+ax-b$와 $y=x^3-ax-b$의 $x$절편과 함

| 삼차방정식 | Omar Khayyam의 해법 | ⇨ | 현대적 재해석 |
|---|---|---|---|
| $x^3+ax=b$ |  | ⇨ |  |
| $x^3=ax+b$ |  | ⇨ |  |

[그림 III-1] Omar Khayyam 해법의 현대적 재해석

께 표현하였다.

[그림 III-1]에서 Omar Khayyam의 해법을 현대적으로 재해석하기 위하여 동적 기하 환경이라는 교수학적 도구 및 도형을 대수적으로 해석하는 기하학의 한 방법론인 해석기하학의 아이디어(우정호, 2007)를 활용하였다.

대수방정식에 대한 Omar Khayyam의 기하학적인 해석은 대수와 기하의 연결을 부단히 시도한 아랍 수학의 흐름을 전형적으로 보여준다고 할 수 있다(Boyer & Merzbach, 1991). 이와 같은 Omar Khayyam의 접근은 Descartes의 해석기하학에도 영향을 주게 되었다는 점(Grabiner, 1995; Mardia, 1999)에서 수학사적으로 매우 큰 가치가 있다고 볼 수 있으며, 삼차방정식의 기하학적 해법이 고대 그리스 수학, 중세 아랍의 수학, 근대의 수학을 연결해 줄 수 있는 이상적인 소재가 될 수 있음을 시사한다.

## Ⅳ. Omar Khayyam의 기하학적 해법의 교수학적 활용

Omar Khayyam이 원뿔곡선을 활용하여 접근한 삼차방정식의 기하학적 해법이 이미 오래전부터 소개되어 왔으나(예, Eves, 1958; Guilbeau, 1930; Henning, 1972), 이를 교수학적으로 활용할 수 있는 구체적인 방법을 제시해주고 있는 연구는 찾아보기 어렵다.

역사적으로 방정식의 해를 구하기 위하여 도형을 이용한 다양한 기하학적 접근이 시도되어 왔다. 이 중 본 연구에서는 대수 곡선을 좌표평면에 표현하고 이들 곡선들의 교점의 $x$좌표를 방정식의 기하학적 해라고 받아들이는 해석기하학의 관점을 바탕으로 하고 있다(Allaire & Bradley, 2001). 특히, 주어진 삼차방정식을 이용하여 서로 다른 두 개의 원뿔곡선을 찾고 이들

<표 IV-1> 기하학적 해결 방법의 분류

| 기하학적 해결 방법 | 방법 1 | 방법 2 |
|---|---|---|
| 서로 다른 두 방정식의 도출 과정 | 주어진 삼차방정식의 양변에 있는 식을 그대로 이용하거나, 양변에 같은 식을 1회 또는 2회 사칙 연산하여 나온 식을 이용함. | 주어진 삼차방정식에서 2차 이하의 두 개의 식을 구하여 기하학적 해결에 이용함. |
| 예 | $x^3+4x=32 \rightarrow \begin{cases} y=x^3 \\ y=-4x+32 \end{cases}$ | $x^3+4x=32 \rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}x^2 \\ (x-4)^2+y^2=16 \end{cases}$ |

의 교점으로 좌표평면에 표현하는 삼차방정식의 기하학적 해법은 주어진 삼차방정식에서 2차 이하의 두 개의 식을 구하여 기하학적 해결에 이용하는 방법이라고 할 수 있으며, 주어진 삼차방정식의 양변에 있는 식을 그대로 이용하거나, 양변에 같은 식을 1회 또는 2회 사칙 연산하여 두 개의 식을 구하고 각각을 좌표평면에 표현하여 해를 제시하는 기하학적 해법과 구분된다(<표 IV-1>).

Omar Khayyam이 제시한 삼차방정식의 기하학적 해법을 교수학적으로 의미 있게 활용하기 위해서는 <표 IV-1>에서의 방법 2를 통하여 차수가 2차인 원뿔곡선 방정식을 찾아 좌표평면에 표현하고 이들의 교점을 통하여 해를 제시하는 방법을 삼차방정식의 기하학적 해결이라고 정의해야 한다.

Coxford(1995)는 학교 수학에서 활용할 수 있는 수학의 내적 연결성의 유형을 '개념적, 절차적 지식의 연결', '통합된 전체로서 수학을 인식', '수학적 주제 사이의 연결성에 대한 활용 및 가치 인식', '같은 수학 개념에 대한 동치 표현의 인식'과 같은 내용으로 제시하였다.

또한 Coxford(1995)는 수학적 연결성에 관하여 다양한 접근 방법이 있을 수 있다는 것을 분명하게 강조하면서 연결 방법에 대한 한 가지 모델을 다음의 <표 IV-2>와 같이 '주제의 통합에 의한 연결', '수학적 과정을 통한 연결', '수학적 연결자를 통한 연결'이라는 세 가지 차원으로 제시하였다.

Coxford(1995)는 교육과정 문서상에서 다양한 수학의 주제에 관한 연결성 내지는 상호작용에 대하여 다루고 있지만, 구체적인 방법과 내용에 대한 더 많은 연구가 필요하며, 특히 학생들이 연결을 하고 상호작용을 하는 맥락과 그 이면에 숨겨진 다양한 양상들을 설명하기 위해서는 보다 더 구체적인 논의가 필요하다고 하였다. 또한 중등 교육과정에서 동일한 개념에 대한 다양한 수학적 표현이 제시되어야 하며, 수학적 문제해결, 수학적 추론과 같은 다양한 수학적 접근 방법을 통하여 학생들이 수학적 연결성을 경험할 수 있는 기회를 제공해야한다고 주장하였다.

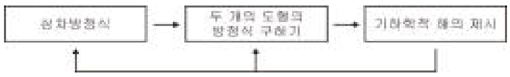
Coxford(1995)가 제시한 세 가지 연결 방법에

<표 IV-2> 연결의 방법 및 예(Coxford, 1995)

| 순 | 연결의 방법 | 예 |
|---|---|---|
| 1 | 주제의 통합 (unifying themes) | change, data, shape |
| 2 | 수학적 과정 (mathematical processes) | representation, applications, problem solving, reasoning |
| 3 | 수학적 연결자 (mathematical connectors) | algorithms, graphs, variable, ratio, function |

따라 Omar Khayyam이 제시한 삼차방정식의 해법을 토대로 다음과 같이 삼차방정식의 기하학적 해결 과제를 구성할 수 있을 것이다. 먼저, 방정식의 기하학적 해라는 주제로 대수의 주제(방정식)와 기하의 주제(원뿔곡선)를 통합(unifying themes)할 수 있으며, 그래프의 교점이라는 수학적 연결자(mathematical connector)를 활용하여 삼차방정식의 실근이라는 같은 개념에 대한 상이한 표상 방식인 대수와 기하학적 표상을 연결할 수 있다. 또한 삼차방정식을 기하학적으로 해결하는 문제의 해결 과정 및 귀납과 유추를 통한 개연적 추론이라는 수학적 과정(mathematical processes)을 다룰 수 있을 것이다.

문제의 해결자 관점에서 삼차방정식의 기하학적 해를 제시하는 과정은 크게 두 부분으로 나눌 수 있는데, 우선, 주어진 삼차방정식으로부터 대수적 조작을 통하여 두 개의 서로 다른 원뿔곡선의 방정식을 찾는 것이 선행되어야 한다. 삼차방정식으로부터 미지수가 두 개인 원뿔곡선의 방정식 한 쌍을 찾아야 하기 때문에 일반적으로 어려운 단계이다. 이후 두 개의 도형의 방정식이 나타내는 자취를 좌표평면에 표현하여 교점을 구하면서 문제를 해결할 수 있는데, 두 개의 도형의 방정식을 찾았다고 가정할 경우에 자취를 그리는 것은 상대적으로 첫 번째 단계보다는 쉽다고 할 수 있다. 대수적 조작을 통하여 찾은 두 개의 도형의 방정식을 연립하여 삼차방정식을 구할 수 없거나, 제시한 기하학적 해가 주어진 삼차방정식에 대한 기하학적 해가 되지 않을 경우에는 처음부터 이 과정을 반복하여 수정된 해를 제시할 수 있다.




[그림 IV-1] 삼차방정식의 기하학적 해결을 위한 일련의 접근 방법

[그림 IV-1]에 삼차방정식을 기하학적으로 해결하기 위하여 접근할 수 있는 일련의 과정이 제시되어 있다. 대수방정식으로부터 두 개의 원뿔곡선의 방정식을 찾아낸 후, 원뿔곡선에 대한 기하학적인 표현을 통하여 방정식의 해를 해석하는 과정을 도식으로 표현한 것이며, 전체적으로 방정식이라는 대수적 대상을 기하학적으로 해석하고 이에 대한 적절성을 다시 대수적으로 확인하는 일련의 순환 과정이라고 할 수 있다.

한편, 본 연구에서는 Coxford(1995)가 제시한 수학의 내적 연결성의 유형 및 귀납, 일반화, 유추와 관련된 선행 연구의 관점을 반영하여 Omar Khayyam 해법의 교육적 활용 관점을 관점 1(대수와 기하의 연결), 관점 2(귀납 및 일반화), 관점 3(유추를 통한 유사한 해법의 연결)으로 분류

<표 IV-3> Omar Khayyam 해법의 교육적 활용 관점

| 활용 관점 | | 내용 | 관련 선행 연구 |
|---|---|---|---|
| 1 | 대수와 기하의 연결 | 삼차방정식과 원뿔곡선이라는 대수적 표상과 기하학적 표상의 연결 | Atiyah(2001), Coxford(1995), Katz(1997), Wagner(2013). |
| 2 | 귀납 및 일반화 | 계수 및 상수항이 구체적인 수로 제시된 삼차방정식의 해법을 변수로 제시된 삼차방정식의 해법으로 일반화 | Hershkowitz et al. (2001), Hoyles et al.(1999), Mitchelmore(2002), Tall(2011), Zazkis et al.(2007). |
| 3 | 유추를 통한 유사한 해법의 연결 | 이미 해결한 삼차방정식의 해법을 새로운 삼차방정식의 해결에 적용 | 이경화(2010), English(2004), Lee & Sriraman(2011), Polya(2005), Schoenfeld(1985). |

하여 제시하고자 한다.

관점 1의 경우는 같은 개념에 대한 서로 다른 표상의 연결로 해석할 수 있다. 수학 내의 한 영역에서의 아이디어를 다른 영역에서 재해석하게 될 경우에 기존의 틀을 새로운 관점에서 이해할 수 있게 되어 해결할 수 없었던 문제에 대한 통찰을 얻을 수 있다는 관점이며(Atiyah, 2001; Katz, 1997; Lakoff & Núñez, 2000; Wagner, 2013), 이와 같은 대수와 기하 영역 간의 연결은 학교 수학에서도 매우 중요하게 다루어지고 있는 것을 확인할 수 있다(교육부, 2015; CCSSI, 2010; GDE, 2014; MDE, 2013; NCTM, 1989, 2000).

관점 2는 구체적인 대상을 통합하여 큰 범주로 인식하는 것으로 일반화의 사고 과정과 관련지어 해석할 수 있다. 일반화는 몇 가지 예에서 확인할 수 있는 공통된 패턴 및 성질을 그 예들을 포함하는 큰 범위로 확장시키는 것으로(Mitchelmore, 2002; Tall, 2011; Zazkis et al., 2007), 구체적인 대상에 대한 수학적 지식이 일반화 과정을 통하여 연결되기 때문에 구체적인 대상에 대한 지식과 일반화된 지식은 분리되어 있지 않고, 상호 연결되어 있는 지식의 망으로 볼 수 있다는 관점이다(Hershkowitz et al., 2001; Hoyles et al., 1999).

관점 3은 이미 알고 있는 문제의 해법을 새로운 문제의 해결에 적용하는 것과 관련되어 있으며, 문제의 해결을 위하여 이미 알고 있는 바탕 문제와 해결해야 할 표적 문제의 유사성을 인식하고 해법을 연결하는 추론 방식인 유추의 관점이라고 할 수 있다(이경화, 2010; English, 2004; Lee & Sriraman, 2011). 이는 문제 해결 전략 및 발견술에 관하여 논하면서 사전 지식이나 이미 알고 있는 해법의 활용을 권고한 Polya(2005) 및 Schoenfeld(1985)의 관점과 맥락을 같이 한다. 이상에서 검토한 귀납에 의한 일반화의 과정 및 유사성에 근거한 유추의 과정은 학교 수학에서도 매우 중요하게 다루어지고 있는 것을 확인할 수 있다(교육부, 2015; CCSSI, 2010; GDE, 2014; MDE, 2013; NCTM, 1989, 2000).

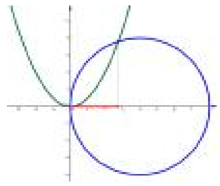
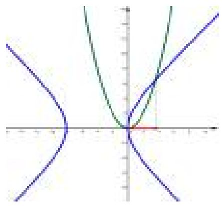
Omar Khayyam의 삼차방정식의 기하학적 해법을 교육적으로 활용할 수 있는 세 가지 관점을 <표 IV-3>에서 확인할 수 있다. 삼차방정식의 기하학적 해를 다루는 교수 및 학습을 통하여 대수와 기하의 연결 관점에서는 삼차방정식과 원뿔곡선이라는 대수적 표상과 기하학적 표상의 연결을 다룰 수 있으며, 귀납 및 일반화의 관점에서는 계수 및 상수항이 구체적인 수로 제시된 개별적인 방정식의 해법을 변수가 포함된 삼차방정식의 해법으로 일반화해야 한다. 또한 유추를 통한 유사한 해법의 연결의 관점에서는 이미 알고 있는 방정식의 해법과 새로운 방정식의 해법의 연결을 통하여 기하학적 해를 제시할 수 있다.

<표 IV-4>에서 $a, b$가 구체적인 수로 주어진 형태의 방정식인 $x^3+4x=32$와 $x^3=4x+32$의 기하학적 해를 확인할 수 있다. 일차항의 부호만 다른 두 삼차방정식의 기하학적 해에서 원의 방정식과 쌍곡선의 방정식이 각각 적용된 것을 확인할 수 있다.

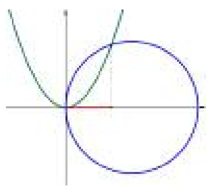
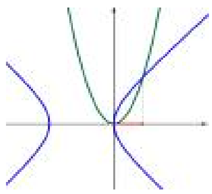
한편 <표 IV-5>에서 다양한 원뿔곡선을 활용하여 제시할 수 있는 삼차방정식 $x^3+ax=b$와 $x^3=ax+b$의 기하학적 해를 확인할 수 있다.

삼차방정식 $x^3+ax=b$의 기하학적 해 중에서 포물선의 방정식과 원의 방정식의 조합으로 제시되어 있는 일반해가 Omar Khayyam의 기하학적 해이며(음영 부분), 포물선과 타원을 활용한 기하학적 해의 제시 방법을 추가로 확인할 수 있다. 또한 Omar Khayyam이 포물선과 직각쌍곡선을 이용하여 기하학적으로 해결한 삼차방정식 $x^3=ax+b$의 일반해(음영 부분)와 함께 일반해를 제시할 수 있는 또 다른 방법을 생각해볼 수 있다는 점에서 의미가 있다.

<표 IV-4> 삼차방정식 $x^3+4x=32$와 $x^3=4x+32$의 기하학적 해

| 삼차방정식 | 원뿔곡선의 조합 | 기하학적 해 | 교육적 활용 관점 |
|---|---|---|---|
| $x^3+4x=32$ | $y=\frac{1}{2}x^2$ & $x^2-8x+y^2=0$ |  | 대수적 표상 및 기하학적 표상의 연결 |
| $x^3=4x+32$ | $y=\frac{1}{2}x^2$ & $x^2+8x-y^2=0$ |  | 유추를 통한 유사한 해법의 적용 |

<표 IV-5> 삼차방정식 $x^3+ax=b$와 $x^3=ax+b$의 기하학적 해

| 삼차방정식 | 원뿔곡선의 조합 | 기하학적 해 | 교육적 활용 관점 |
|---|---|---|---|
| $x^3+ax=b$ | $y=\frac{1}{\sqrt{a}}x^2$ & $x^2-\frac{b}{a}x+y^2=0$ |  | 귀납 및 일반화 |
| | $y=\frac{1}{2}x^2$ & $\frac{a}{4}x^2-\frac{b}{4}x+y^2=0$ | | |
| | $y=\frac{a}{2}x^2$ & $\frac{a^3}{4}x^2-\frac{a^2b}{4}x+y^2=0$ | | |
| | … | | |
| $x^3=ax+b$ | $y=\frac{1}{\sqrt{a}}x^2$ & $x^2+\frac{b}{a}x-y^2=0$ |  | 귀납 및 일반화와 유추를 통한 유사한 해법의 적용 |
| | $y=\frac{1}{2}x^2$ & $\frac{a}{4}x^2+\frac{b}{4}x-y^2=0$ | | |
| | $y=\frac{a}{2}x^2$ & $\frac{a^3}{4}x^2+\frac{a^2b}{4}x-y^2=0$ | | |
| | … | | |

본 연구에서는 $a, b$의 값이 각각 4, 32로 주어진 삼차방정식 $x^3+4x=32$, $x^3=4x+32$와 변수 $a, b$가 포함된 삼차방정식 $x^3+ax=b$, $x^3=ax+b$으로부터 두 개의 원뿔곡선의 방정식을 찾아 이들의 교점으로 삼차방정식의 기하학적 해를 다룰 수 있는 가능성을 제시하였다. 삼차방정식을 다루는 순서는 본 연구에서 제시한 바와 같이 보편적으로 $x^3+4x=32$, $x^3+ax=b$, $x^3=4x+32$, $x^3=ax+b$의 순서가 적당할 것이며, 학생들의 인지적인 수준을 고려하여 삼차방정식을 다루는 순서를 정할 수 있을 것이다. 이 과정에서 동적 기하 환경을 활용한 시각화는 수학적 관계와 개념을 이해하고 탐구할 수 있도록 지원해줄 수 있으며(Erez & Yerushalmy, 2006; Healy & Hoyles, 2001; Laborde, 1998), 다양한 예를 관찰, 실험할 수 있게 하여 수학적 개념이나 문제 해결을 위한 단서를 추측할 수 있게 해주

기 때문에(Laborde, 2010), 대수와 기하의 연결을 위한 수학적 추론의 과정 및 변수의 값을 다양하게 변화시키면서 그 결과를 시각적으로 확인하는 과정에서 동적 기하 환경을 학생 중심의 탐구의 수단으로 활용할 수 있을 것이다.

## Ⅴ. 결론 및 제언

본 연구에서는 삼차방정식을 두 개의 원뿔곡선 방정식의 연립방정식으로 해석하고, 대수적으로 구할 수 없는 실근을 기하학적으로 제시한 중세 시대의 아랍의 수학자 Omar Khayyam의 삼차방정식의 기하학적 해법을 현대적인 의미로 재해석하여 다룰 수 있는 방법을 제시하였다. 삼차방정식을 기하학적으로 해결하기 위해서는 대수적으로 이차식이 되는 두 개의 원뿔곡선의 방정식을 연립하여 삼차방정식을 구성할 수 있어야 하며, 기하학적으로는 좌표평면에 표현된 두 개의 원뿔곡선의 교점을 이용하여 삼차방정식의 해를 제시해야 한다.

현행 교육과정에서 삼차방정식과 사차방정식 및 연립방정식에 관한 내용을 고등학교의 1학년 과정에서 다루고 있음에도 삼차방정식 혹은 사차방정식을 더 낮은 차수의 방정식들의 연립방정식으로 해석하는 과정이 생략되어 있으며, 원뿔곡선의 내용을 다룬 이후에도 고차방정식의 해와 원뿔곡선의 교점을 상호 연관시켜 교수학적으로 유의미하게 활용하고 있는 예를 찾아보기 어렵다. 이에 따라서 본 연구에서는 중세의 아랍의 수학자 Omar Khayyam이 시도했던 방정식에 대한 기하학적 해법을 현대적으로 재해석하여 좌표평면에서의 수학적 연결성을 기본적인 틀로 하고 있는 해석기하의 관점에서의 기하학적 해법을 제시하였다.

본 연구에서 제시한 원뿔곡선을 활용한 삼차방정식의 기하학적 해결 과정은 일차함수 및 이차함수의 그래프를 활용하여 일차방정식 및 이차방정식의 해를 제시하는 기하학적 해결 방법과 두 가지 면에서 차이가 있다. 먼저, 일차방정식과 이차방정식은 대수적으로 비교적 쉽게 일반해를 구할 수 있지만, 학교 수학의 수준에서는 삼차방정식의 일반해를 구할 수 없기 때문에 기하학적인 방법으로 접근하여 인수분해가 불가능한 삼차방정식의 실근에 대한 정보를 확인할 수 있다는 점에서 의미가 있다. 또한 일차방정식 및 이차방정식과 비교하여 삼차방정식의 경우는 다양한 곡선을 활용하여 기하학적 해를 제시할 수 있으며, 특히 Omar Khayyam이 삼차방정식을 기하학적으로 해결하면서 사용했던 원뿔곡선을 활용할 수 있다는 교수학적인 시사점이 있다.

물론, CAS(Computer Algebra System)를 활용하여 삼차방정식의 해를 구한다거나, 삼차함수의 그래프를 통하여 좌표평면에서 간단하게 기하학적 해를 확인할 수 있다. 하지만, 본 연구에서는 삼차방정식의 해를 구할 수 있는 경제적인 방법을 다루었다기보다는 주어진 삼차방정식을 차수가 낮은 한 쌍의 원뿔곡선의 방정식으로 전환하고 좌표평면에서 구현되는 원뿔곡선들의 교점으로 해석하는 교수학적 접근을 주된 관점으로 하고 있으며, 학교 수학에서 일반적으로 다룰 수 없는 삼차방정식의 대수적 해법에 대한 한계를 보완할 수 있는 기하학적 접근 방법을 대수와 기하의 연결, 귀납 및 일반화, 유추를 통한 유사한 해법의 연결의 관점에서 논하였다는 점에서 의미가 있다고 할 수 있다.

본 연구의 결과를 토대로 수학 교실에서의 교수 및 학습 과정과 후속 연구에 도움이 될 만한 다음과 같은 제언을 남긴다.

첫째로, 본 연구에서 다룬 삼차방정식의 기하학적 해법은 고대 그리스 시대의 기하학과 중세의 아랍의 수학 및 근대의 해석기하학을 연결해

주는 내용으로 수학사적인 가치가 매우 크다고 할 수 있다. 고대 그리스 시대 이래로 알려져 온 원뿔곡선이 삼차방정식의 기하학적 해법과 어떻게 연결될 수 있는지 고찰해보는 것은 수학에서의 진보와 수학적 연결성을 경험할 수 있는 매우 구체적인 예가 될 것이며, 특히 해석기하학의 관점에서 삼차방정식의 기하학적 해법을 점진적인 형식화가 가능한 재발명의 형태로 다루게 된다면, 당대의 수학자들이 좌표의 개념이나 수 체계에 관한 인식의 한계로 인하여 생각하지 못했던 음의 실근이나, 허근에 대하여 통찰할 수 있다는 점에서 의미가 있을 것이다.

또한 수학사를 통하여 확인할 수 있는 삼차방정식의 해법에 대한 새로운 아이디어를 적합한 형태로 재해석하여 교수학적으로 활용하는 것은 학교 수학에서 인수분해가 가능한 간단한 형태의 삼차방정식만을 다룰 수밖에 없는 한계를 보완할 수 있는 가능성을 제시해 준다고 할 수 있다. 삼차방정식을 해결하기 위하여 당대의 수학자들이 기존의 틀을 새로운 관점에서 해석하면서 수학의 한계를 극복해나갈 수 있었다는 측면에서 볼 때, 삼차방정식의 기하학적 해결은 학생들에게 도전적인 과제가 될 수 있을 것이다.

둘째로, 본 연구에서는 삼차방정식을 기하학적으로 해결하기 위한 Omar Khayyam의 시도를 해석기하학의 관점에서 현대적으로 재해석하여 다루었지만, 비와 비례 및 원뿔곡선의 정의와 성질을 이용한 논증기하의 내용으로 접근할 수 있을 것이며, Omar Khayyam이 분류했던 또 다른 형태의 삼차방정식에 대한 기하학적 해법을 교수학적으로 적절하게 변환하여 다룰 수 있을 것이다. 또한 삼차방정식의 기하학적 해법을 확장하여 사차방정식에 대한 기하학적 해를 다룰 수 있을 것이며, 더 나아가 오차 이상의 방정식에 대한 기하학적 해법을 교수학적으로 연구하는 것도 의미가 있을 것이다.

셋째로, 이 연구는 수학적 연결성, 귀납 및 유추와 관련된 선행연구를 바탕으로 Omar Khayyam이 제시한 삼차방정식의 기하학적 해법을 수학 교실에서 활용할 수 있는 가능성에 대하여 이론적으로 탐색한 것이다. 실제 학교 현장에서 본 논문에서 논의한 내용을 유의미하게 다루기 위해서는 교사의 실천적인 노력이 요구된다고 할 수 있으며, 앞으로 본 연구에서 논의한 내용과 관련된 구체적인 교수 및 학습의 결과를 제시해 줄 수 있는 후속 연구가 필요할 것이다.

또한 삼차방정식의 기하학적 해법에서 더 나아가 또 다른 소재를 활용하여 ‘대수와 기하의 연결’, ‘귀납 및 일반화’, ‘유추를 통한 유사한 해법의 연결’과 관련된 교수학적인 정보를 제공해 줄 수 있는 실질적인 연구가 요구된다고 할 수 있다. 한편, 본 연구에서 Omar Khayyam의 해법을 교육적으로 활용하기 위하여 하나의 틀로 제시한 ‘대수와 기하의 연결’, ‘귀납 및 일반화’, ‘유추를 통한 유사한 해법의 연결’이라는 세 가지 관점은 학교 수학의 다양한 교수학적 현상의 일부분에 해당하는 것이므로 본 연구를 기초로 하여 학교 수학의 다양한 영역에서 수학적 지식을 연결하고 확장할 수 있는 방법을 밝히고, 이를 교수 및 학습의 상황에 적용할 수 있는 방법을 제시해주는 많은 연구가 이루어지기를 기대한다.

## 참고문헌

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 제 2011-261호 [별책 8].

교육부(2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8].

류희찬 · 조완영 · 이정례 · 선우하식 · 이진호 · 손홍찬 · 신보미 · 조정묵 · 이병만 · 김용식 · 임미

선 · 선미향 · 유익승 · 한명주 · 박원균 · 남선주 · 김명수 · 정성윤(2014). **고등학교 수학Ⅰ**. 서울: 천재교과서.

우정호(2007). **학교수학의 교육적 기초**(증보판 2판). 서울대학교 출판부.

우정호 · 민세영 · 정연준(2003). 역사발생적 수학 교육 원리에 대한 연구(2): 수학사의 교육적 이용과 수학교사 교육. **학교수학, 5**(4), 555-572.

이경화(2010). 교수학적 변환 과정에서 은유와 유추의 활용. **수학교육학연구, 20**(1), 57-71.

Allaire, P. R., & Bradley, R. E. (2001). Geometric approaches to quadratic equations from other times and places. *Mathematics Teacher, 94*(4), 308-319.

Amir-Moez, A. R. (1962). Khayyam's solution of cubic equations. *Mathematics magazine, 35*(5), 269-271.

Atiyah, M. (2001). Mathematics in the 20th Century: geometry versus algebra. *Mathematics Today, 37*(2), 46-53.

Berggren, J. L. (1986). *Episodes in the mathematics of medieval Islam*. New York: Springer-Verlag.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1991). *A history of mathematics* (2nd ed). New York: McGraw-Hill.

Common Core State Standards Initiative(CCSSI). (2010). *Common Core State Standards For Mathematics*. U.S.A.

Connor, M. B. (1956). *A historical survey of methods of solving cubic equations*. Unpublished master's dissertation, University of Richmond, Virginia.

Coxford, A. F. (1995). *The case for connections*. In P. A. House & A. F. Coxford (Eds.), Connecting mathematics across the curriculum (pp. 3-12). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dikovic, L. (2009). Applications geogebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems, 6*(2), 191-203.

English, L. D. (Ed.). (2004). *Mathematical and analogical reasoning of young leaders*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Erez, M. M., & Yerushalmy, M. (2006). "If you can turn a rectangle into a square you can turn a square into a rectangle..." young students experience the dragging tool. *International Journal of Computers for Mathematics Learning, 11*(3), 271-299.

Eves, H. (1958). Omar Khayyam's Solution of Cubic Equation. *Mathematics Teacher 51*, 285-286.

________ (1995). **수학의 역사**(이우영, 신항균 역). 서울: 경문사. (원저는 1953년에 출판).

Georgia Department of Education(GDE). (2014). *Common Core Georgia Performance Standards Frameworks of Mathematics, CCGPS Coordinate Algebra Unit 6: Connecting Algebra and Geometry through Coordinates*. U.S.A.

Grabiner, J. (1995). Descartes and problem-solving. *Mathematics Magazine, 68*(2), 83-97.

Guilbeau, L. (1930). The History of the Solution of the Cubic Equation. *Mathematics News Letter, 5*(4), 8-12.

Healy, L., & Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 235-256.

Henning, H. B. (1972). Geometric solutions to quadratic and cubic equations. *Mathematics Teacher, 65,* 113-119.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T.

(2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal of Research in Mathematics Education, 32*(2), 195-222.

Hoyles, C., Noss, R., & Pozzi, S. (1999). Mathematizing in practice. In C. Hoyles, C. Morgan, & G. Woodhouse (Eds.), *Rethinking the mathematics curriculum* (pp. 48-62). London: Falmer Press.

Jones, K. (2002). Research on the use of dynamic geometry software. *MicroMath, 18*(3), 18-20.

Kasir, D. S. (1931). *The Algebra of Omar Khayyam.* Columbia University, NY.

Katz, V. J. (1997). Algebra and its teaching: An historical survey. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(1), 25-38.

Khayyam, O. (2008). *An essay by the uniquely wise 'ABEL FATH BIN AL-KHAYYAM on algebra and equations.* Translated by R. Khalil & Reviewed by W. Deeb. UK: RG1 4QS.

Knuth, E. J. (2000). Understanding connections between equations and graphs. *Mathematics Teacher, 93*(1), 48-53.

Krantz, S. G. (2010). *An episodic history of mathematics: Mathematical culture through problem solving*. The Mathematical Association of America.

Laborde, C. (1998). Relationship between the spatial and theoretical in geometry: The role of computer dynamic representations in problem solving. In J. D. Tinsley & D. C. Johnson (Eds.), *Information and communications technologies in school mathematics* (pp. 183-195). London, UK: Chapman & Hall.

__________ (2010). Linking geometry and algebra through dynamic and interactive geometry. In Z. Usiskin, K. Andersen, & N. Zotto (Eds.), *Future curricular trends in school algebra and geometry* (pp. 217-230). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being*. New York, NY: Basic Books.

Law, H. L. (2003). The comparison between the methods of solution for cubic equations in Shushu Jiuzhang and Risalah fil-barahin a'la masail ala-Jabr wa'l-Muqabalah. *Mathematical Modley, 30*(2), 91-101.

Lee, K. H., & Sriraman, B. (2011). Conjecturing via reconceived classical analogy. *Educational Studies in Mathematics, 76*, 123-140.

Lumpkin, B. (1978). A mathematics club project from Omar Khayyam. *Mathematics Teacher, 71*(9), 740-744.

Mardia, K. V. (1999). *Omar Khayyam, Rene Descartes and solutions to algebraic equations*. Presented to Omar Khayyam Club, London. Retrieved from http://www1.maths.leeds.ac.uk/~sta6kvm/omar.pdf.

Maryland Department of Education(MDE). (2013). *Maryland Common Core State Curriculum Unit Plan for Geometry. Geometry Unit 4: Connecting Algebra and Geometry through Coordinates*. U.S.A.

Mena, R. (2009). *First course in the history of mathematics* (pp.123-125). Unpublished paper, California State University. Retrieved from http://web.csulb.edu/~rmena/History/Complete%20Notes%20303%20 with%20exercises.pdf.

Mitchelmore, M. C. (2002). The role of abstraction and generalisation in the development of mathematical knowledge. In D. Edge, & B. H. Yeap (Eds.), *Mathematics education for knowledge-based era (Proceedings of the 2nd East Asia Regional Conference on Mathematics*

*Education and the 9th Southeast Asian Conference on Mathematics Education)* (pp. 157-167). Singapore: Association of Mathematics Educators.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Reston, VA: Author. 구광조, 오병승, 류희찬 공역(1992). **수학교육과정과 평가의 새로운 방향**. 서울: 경문사.

_________ (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author. 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 공역(2007). **학교수학을 위한 원리와 규준**. 서울: 경문사.

Polya, G. (2005). **어떻게 문제를 풀 것인가? -수학적 사고와 방법-**(우정호 역). 서울: 경문사. (원저는 1956년에 출판).

Sangwin, C. (2007). A brief review of GeoGebra: dynamic mathematics. *MSOR Connections, 7*(2), 36-38.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Sriraman, B. (2004). Reflective abstraction, uniframes and formulation of generalizations. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(2), 205-222.

Tall, D. (2011). Looking for the bigger picture. *For the Learning of Mathematics., 31*(2), 17-18.

Wagner, R. (2013). A historically and philosophically informed approach to mathematical metaphors. *International Studies in the Philosophy of Science, 27*(2), 109-135.

Yerushalmy, M., & Gilead, S. (1997). Solving equations in a technological environment. *Mathematics Teacher, 90*(2), 156-162.

Zazkis, R., Liljedahl, P., & Chernoff, E. J. (2007). The role of examples in forming and refuting generalizations. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 131-141.

# A Study on the Pedagogical Application of Omar Khayyam's Geometric Approaches to Cubic Equations

Ban, Eun Seob (Heungdeok High School)
Shin, Jaehong (Korea National University of Education)
Lew, Hee Chan (Korea National University of Education)

In this study, researchers have modernly reinterpreted geometric solving of cubic equations presented by an arabic mathematician, Omar Khayyam in medieval age, and have considered the pedagogical significance of geometric solving of the cubic equations using two conic sections in terms of analytic geometry. These efforts allow to analyze educational application of mathematics instruction and provide useful pedagogical implications in school mathematics such as 'connecting algebra-geometry', 'induction-generalization' and 'connecting analogous problems via analogy' for the geometric approaches of cubic equations: $x^3+4x=32$, $x^3+ax=b$, $x^3=4x+32$ and $x^3=ax+b$. It could be possible to reciprocally convert between algebraic representations of cubic equations and geometric representations of conic sections, while geometrically approaching the cubic equations from a perspective of connecting algebra and geometry. Also, it could be treated how to generalize solution of cubic equation containing variables from geometric solution in which coefficients and constant terms are given under a perspective of induction-generalization. Finally, it could enable to provide students with some opportunities to adapt similar solving procedures or methods into the newly-given cubic equation with a perspective of connecting analogous problems via analogy.

* Key Words : cubic equations(삼차방정식), geometric solving of equation(방정식의 기하학적 해결), mathematical connection(수학적 연결성), induction(귀납), generalization(일반화), analogy(유추)

논문접수 : 2016. 8. 10
논문수정 : 2016. 9. 7
심사완료 : 2016. 9. 13