대한수학교육학회지 <학교수학> 제 18 권 제 3 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 18, No. 3, 647 ~ 666. Sep 2016

예비교사의 무리수의 개념과 표현에 대한 이해

최 은 아* · 강 향 임**

본 연구는 수학적 표현이 개념적 이해를 형성하는 수단이라는 관점을 토대로 예비교사들의 무리수 개념과 표현 방식에 대한 이해 정도를 조사하여 무리수 개념 지도를 위한 교수학적 시사점을 도출하고자 하였다. 이에 무리수 개념과 표현, 다양한 표현, 표현간 번역 항목을 조사하는 검사도구를 예비교사 48명을 대상으로 적용하였다. 체계적인 분석을 위해 무리수 표현을 非분수, 소수, 기호, 기하, 수직선, 함숫값 표현으로 범주화하여 활용하였다. 분석 결과, 예비교사들은 무리수 정의의 非분수 표현에 내포된 통약불가능성을 명확하게 인식하지 못하였으며, 무리수의 다양한 표현 중에서 기호 표현에 집중 경향을 나타냈고, 다른 표현들을 상대적으로 간과하는 현상을 나타내었다. 특히 규칙성이 있는 비순환 무한소수에 대한 제한된 이해와 무한소수에 대한 일관성 있는 이해의 결여를 확인할 수 있었다. 또한 기호 표현 $\sqrt{5}$에 비해 π를 다른 표현으로 번역하는데 더 큰 어려움을 나타냈으며, π를 번역하는 과정에서 가무한의 관점이 드러나기도 하였다. 이상의 연구결과를 종합하여 무리수 개념 지도는 무리수 정의와 표현의 관계, 다양한 무리수 표현의 이해, 무리수 표현간의 번역에 중점을 두어 지도되어야 함을 주장하였다.

Ⅰ. 서 론

인류의 역사와 함께 시작된 수는 수학에서 다루는 대상 중에서 가장 기본이 되는 개념이며, 수학 교육과정의 초석이 되어왔다. 우리가 알고 있는 대부분의 수 개념은 측정활동과 같은 실생활의 특정한 요구에 의해 형성된 개념이라고 볼 수 있다. 자연수는 '세기' 활동의 결과로서 도입되었으며, 정수는 음과 양의 대립적 상황을 토대로 발생되었고, 유리수는 연속량의 측정 또는 분할이라는 맥락으로 도입되었다. 반면에 무리수 개념은 다른 수 개념들에 비해 실생활과의 관련이 즉각적이지 않으며 명시적이지도 않다. 학교수학에서의 도입 맥락 또한 추상적이고 형식적인 경우가 많아서 학생들이 무리수 개념을 이해하는 것이 쉽지 않다.

그러나 무리수는 위계적인 수 체계에서 중요한 위치를 차지하는 수 개념으로 결코 소홀히 다룰 수 없다. 무리수 없는 실수 개념은 불완전하고 불가능하며(Fischbein, Jehiam & Cohen, 1995), 유리수 체계에서 실수 체계로의 수 개념의 확장과 재구성을 위해서 무리수에 대한 이해는 필수적이다(Sirotic & Zazkis, 2007). 그럼에도 학교수학에서 무리수는 Fischbein et al.(1995)이 지적한 바와 같이, 원주율 π와 $\sqrt{2}$ 등의 근호를 사용한 무리수에 한정되어 제시되고 있어 '무리수는 루트($\sqrt{\ }$), 근호가 있는 식'과 같이

* 우석대학교, eunachoi@woosuk.ac.kr (제1 저자)
** 한국교원대학교 강사, hikang2002@hanmail.net (교신저자)

제한적 이해를 하는 학생들을 쉽게 관찰할 수 있다. 무리수 개념에 대한 이해가 부족한 학생들에게 무리수는 측정될 수 있는 길이가 아닐 뿐 아니라, 수직선 위에 그 위치가 정확하게 표현될 수 없는 수이며, 어떤 값에 계속 가까이 가는 과정 중에 있을 뿐 영원히 도달할 수 없는 수이다 (Peled & Hershkovitz, 1999).

그동안 무리수 개념에 관한 국내연구들을 살펴보면, 무리수의 개념적 특징을 분석하면서 대안적인 지도 방법을 제안(변희현, 박선용, 2002; 장혜원, 2003; 이영란, 이경화, 2006; 김부윤, 정영우, 2008)하거나, 무리수가 갖는 독특한 특성을 언급하면서 학생들의 오류와 오개념을 분석(노민숙, 2002; 박달원, 2007)한 사례가 대부분이다. 소수이긴 하지만, 예비교사들을 대상으로 한 연구도 찾아볼 수 있다. 이선비(2013)는 무리수의 정의와 연산 문항을 도구로 하여, 예비교사들의 무리수에 대한 이해를 형식적 차원, 직관적 차원, 알고리즘 차원, 도구적 차원으로 나누어 분석하였으며, 이지현(2015)은 유리수에서 실수로 수 체계를 확장하는 이유와 순환하지 않는 무한소수의 존재 이유에 대한 예비교사들의 반응과 이를 극복해가는 과정을 분석한 바 있다.

반면에 국외연구들에서는 무리수 학습의 어려움의 원인을 무리수의 표현과 관련하여 분석하는 논문들(Fischbein et al., 1995; Peled & Hershkovitz, 1999; Sirotic & Zazkis, 2007; Zazkis & Sirotic, 2010)을 다수 찾아볼 수 있다. 그들이 무리수 표현에 주목하는 것은 학교수학에서의 무리수 정의가 수학적 표현과 강하게 연결되어 있기 때문이다(Zazkis & Sirotic, 2010). 이들 연구들이 공통적으로 지적하고 있는 것은 학생들, 예비교사들, 심지어 현직교사들 조차도 무리수를 무한소수 표현에 지나치게 의존하여 이해한다는 것이다. 무리수의 소수 표현의 강조는 무리수에 대한 개념적 이해에 기여하지 못한다는 의견이다. 이에 대한 대안으로 Sirotic & Zazkis(2007)은 무리수의 기하적 표현을 학습할 것을 제안하고 있으며, Peled & Hershkovitz(1999)는 무리수의 서로 다른 표현들을 유연하게 사용할 것을 주장한다. 수학적 표현은 개념적 이해를 형성할 수 있는 유용한 도구이며(Zazkis & Sirotic, 2010), 동일 개념에 대한 다양한 표현들 간의 자유로운 번역은 개념적 이해의 준거이다(Lesh, Behr & Post, 1987). 무리수 개념의 깊이 있는 이해를 위해서는 무리수에 대한 다양한 표현을 가지고 있어야 함과 동시에 표현들 간의 자유로운 번역 또한 가능해야 한다.

따라서 무리수 학습에서 무리수의 정의와 표현 방식의 이해가 무리수에 대한 개념적 이해의 기초라고 볼 수 있으며, 학생들 또는 예비교사, 현직교사들을 대상으로 무리수 개념과 무리수 표현, 그 관계를 살펴보는 연구가 요청된다고 할 수 있다. Peled & Hershkovitz(1999)을 비롯한 다수의 연구들이 무리수의 서로 다른 표현 간의 번역을 강조하고 있지만, 무리수의 표현 집합체를 구성하여 이를 체계적으로 살펴본 연구는 찾아보기 힘들다. 이에 본 연구는 이론적 탐색으로 선행연구에 나타난 수학적 개념과 표현과의 관계를 살펴보고, 무리수 개념의 다양한 표현을 범주화할 것이다. 또한 예비교사들의 무리수 개념과 표현에 대한 이해 정도를 조사하여 중등학교에서의 무리수 개념 지도에 대한 교수학적 시사점을 도출하고자 한다. 특히 이 연구는 예비교사들의 무리수 지도의 어려움과 오류, 그리고 불충분한 내용지식을 완화시키도록 돕기 위해 고안된 것으로, 이들의 제한된 개념 이해를 분석하여 장차 예비교사교육을 위한 프로그램 개발에 기초 자료를 제공하고자 한다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 수학적 표현과 개념 학습

NCTM(2000)은 학교수학을 위한 원리와 규준에서 표현(representation)을 과정 규준의 하나로 제시하고 다음과 같은 학습목표를 강조하였다. (1) 학생들은 수학적 아이디어를 조직하고, 기록하고, 의사소통하기 위해서 수학적 표현을 만들고 활용해야 한다. (2) 문제를 해결하기 위해서 수학적 표현을 선택하고, 적용하고, 변환할 수 있어야 한다. (3) 물리적 현상, 사회적 현상, 수학적 현상을 모델링하고 해석하기 위해서 수학적 표현을 활용해야 한다. 이는 수학적 개념의 학습, 수학적 개념 간의 연결성 인식, 의사소통 과정, 수학적 모델링과 문제해결 과정에서 수학적 표현을 핵심 요소로 취급해야 함을 의미한다. Janvier(1987)와 Lamon(2001) 또한 학생들이 수학적 표현을 사용하는 것과 이해와의 높은 상관을 이야기했으며, Zazkis & Sirotic(2010)은 표현이 개념적 이해를 형성하는 수단임을 주장한 바 있다. 우리나라 교육과정도 수학적 표현을 중시하는 세계적 흐름을 반영하고 있다. 2015 교육과정의 수학과 목표의 첫 번째 하위 목표를 보면, '사회 및 자연 현상을 수학적으로 관찰, 분석, 조직, 표현하는 경험을 통하여 수학의 개념, 원리, 법칙과 이들 사이의 관계를 이해하고 수학의 기능을 습득한다(교육부, 2015).'로 제시되고 있다. 기존의 2007 개정 교육과정에는 '표현'이란 용어가 없었으나, 2009 개정 교육과정부터 추가로 삽입된 것이다.

그런데 학교수학에서 수학적 표현의 역할을 중시하고 강조하는 것은 분명하나, 정작 수학적 표현이 무엇인지는 분명하지 않아 보인다. 학자마다 의견이 다르기도 하지만 사용되는 맥락도 다양하여 단일하게 정의되고 있지 않다. 다만, Janvier(1987)과 Cuoco & Curcio(2001)를 비롯한 수학적 표현에 대한 연구물에서 공통적으로 제시하고 있는 다음과 같은 특징들을 찾아볼 수 있다.

첫째, 수학적 표현은 내적 표현(internal representation)과 외적 표현(external representation)으로 구분하여 설명할 수 있다(Cuoco, 2001). 외적 표현은 그림, 도표, 식, 그래프 등 우리가 다른 사람들과 의사소통할 수 있게 하는 표현을 말하며, 내적 표현은 수학적 대상과 과정이 우리 마음속에서 창조된 이미지를 말한다. 내적 표현은 외적 표현에 비해 기술하기 어렵다는 특징을 갖는다. 장혜원(1997)은 수학적 내용을 표현한 물리적 대상을 지칭하는 외적 표현을 '표현'으로, 주체의 정신적 실체인 이미지, 관념 등을 뜻하는 내적 표현을 '표상'이라고 번역하여 사용하기도 하였다. 반면에 김영국(2008)은 수학적 표현을 통합적인 관점에서 '수학적 개념의 인식활동으로서 내적 표현과 외적 표현의 상보적 대응작용'으로 정의하였다. 둘째, 표현은 과정과 결과를 모두 의미한다(NCTM, 2000). 일반적으로 수학적 내용을 표현하는 기호나 그림, 식, 표 등의 형식, 즉 사고의 결과물을 의미하는 것으로 이해하기 쉽지만, 수학적 표현은 수학적 개념이나 관계를 나타내는 행동 그 자체를 의미하기도 한다. 예를 들어, 수를 수직선 위에 대응시킨다고 할 때, 표현은 수직선 위에 나타난 점만을 의미하는 것이 아니라, 그 대응을 구성하는 행동 자체를 의미한다(Cuoco, 2001). NCTM(2000)은 수학하는 사람의 마음속에서 '내적으로' 발생하는 과정과 결과뿐 아니라, '외적으로' 관찰가능한 과정과 결과라는 것이라는 수학적 표현의 두 가지 의미 모두를 고려할 것을 제안하고 있다. 셋째, 수학적 표현에서는 발명된 표현(invented representation)과 제시된 표현(presented representation)

모두가 중요하다(Cuoco, 2001). 전자는 학생들이 개인적으로 발명한 표현 방법을, 후자는 오랜 시간에 걸쳐 수학적으로 정련 과정을 거친 표준적인 결과물로서 교사에 의해 제시되는 관례적인 표현 방법을 의미한다. 교사는 학생들로 하여금 자신의 아이디어를 의미 있게 표현하도록 격려해야 하며, 개인적 표현으로부터 표준화된 관례적 표현으로 발전해나갈 수 있도록 도와주는 역할을 해야 한다(NCTM, 2000). 본 연구에서는 '표현'이라는 용어를 '수학적 개념을 내적으로 인식하고 외적으로 나타내는 과정과 결과'라는 의미로 사용할 것이다.

수학적 표현은 문제해결과정 뿐 아니라 개념 학습 과정에서도 중요한 역할을 담당한다. 특히, 수 개념은 정의 자체가 표현에 의존하는 경우가 대부분이어서(Zazkis & Gadowsky, 2001) 수에 대한 개념적 이해를 위해서는 표현에 대한 이해가 필수적이다. 예를 들어, 유리수의 정의는 '$\frac{b}{a}$(a는 0이 아닌 정수, b는 정수)로 나타내지는 수'이며, 짝수의 정의는 '$2k$(k는 정수)'이고, 복소수의 정의는 '$a+bi$(a, b는 실수, $i=\sqrt{-1}$)'이다. 어떤 수가 특정한 수 집합에 속하는지에 대한 판단 기준은 정의에 기술된 표현 형식을 만족하는지에 달려 있다. 이렇듯 수 개념의 정의와 수학적 표현은 분리해서 생각할 수 없을 정도로 상호 연결되어 있다.

한편 수 개념을 비롯한 수학적 개념들이 단일한 표현을 갖는 것은 아니라는 점에 주목할 필요가 있다. 하나의 수학적 개념에 대한 다양한 표현에 대한 연구는 함수 개념에 대하여 의미론적 영역(semantic domain)을 언급한 Janvier(1987)의 연구가 대표적이다. 하나의 개념에 대해서 여러 가지의 표현이 존재할 수밖에 없는 이유는 수학적 아이디어의 이면에 짧은 형식적 정의로는 기술할 수 없는 다양한 측면의 의미가 포함되어 있기 때문이다. 예를 들어, Janvier가 말한 함수 개념의 의미론적 영역은 변환, 변수, 수열, 치환, 동형사상이다. 이와 같은 함수의 의미론적 영역은 함수 개념 안에서 정의될 수 있지만, 각각과 관련된 상황이 본질적으로 다르다는 점에서 구별되며, 이 구분을 돕는 것이 바로 표상(표현)이다(장혜원, 1997). Janvier(1987)가 설정한 함수의 표현 양식은 상황·언어적 표현, 표, 그래프, 공식이다.

수 개념 또한 Janvier의 함수 개념과 같이 다양한 의미 영역과 다양한 표현을 가진다. 장혜원(1997)에 따르면, 자연수 개념은 세기, 집합의 원소 개수, 수열, 측도, 비 등의 의미를 가진다. 이러한 의미 영역들은 다양한 표현에 의해 구분되며, 다양한 표현들은 다시 자연수라는 하나의 개념으로 연결된다. 유리수 개념 또한 부분-전체 비교, 작용소, 비, 측정값, 몫 등의 여러 의미론적 영역을 가지며, 분수, 비, 수직선, 분할된 도형 등의 다양한 표현이 존재한다.

Lamon(2001)은 전형적인 수업 방식인 부분-전체 비교로서의 분수 지도를 벗어나 분수 표현 '$\frac{b}{a}$'가 가지는 여러 가지 의미를 학습하는 활동으로 수업을 시작하였다. 이 과정에서 학생들은 스스로 다양한 표현을 만든 경험을 했으며, 결과적으로 분수 계산 알고리즘을 더 의미 있게 수행하는 모습을 보였다. 이로부터 Lamon은 분수에서 유리수로 개념적 확장이 이루어지기 위해서는 학생들이 만들어낸 표현(representational model)과 교사에 의해 제시되는 표현(presentational model)이 상보적으로 의미 있는 역할을 함을 주장하였다. 유리수 개념의 표현을 수직선 표현과 비 표현으로 구분하여 설명한 Lesh(1983)에 따르면, 유리수의 수직선 표현은 유리수를 실수 집합의 부분집합으로 해석하게 하고, 비 표현은 유리수를 두 자연수의 비로 해석하게 하여 자연수의

확장으로 이해하게 하는 경향이 있다(장혜원, 1997 재인용). 표현은 개념적 이해를 형성하는 수단(Zazkis & Sirotic, 2010)이기도 하지만, 한 개념에 대한 다양한 표현 간의 자유로운 번역 능력은 개념적 이해의 증거이자 문제 해결에 의미 있는 영향을 미치는 요소이며, 교수의 목표이다(Lesh et al., 1987). 학생들의 표현 번역 능력을 강화시키고 교정하는 것은 학생들로 하여금 기본적인 수학적 아이디어를 획득할 수 있게 하고, 이를 적용시키는 것을 촉진시킨다. 예를 들어, 어떤 학생이 '$\frac{1}{3}$을 이해한다'는 것은 $\frac{1}{3}$을 나타내는 서로 다른 표현 체계에 내재된 아이디어를 인식할 수 있다는 것과 제시된 표현 체계 안의 아이디어를 유연하게 조작할 수 있다는 것, 하나의 표현방식에서 다른 표현 방식으로 정확하게 번역할 수 있다는 것을 뜻한다. 그 학생이 가지고 있는 $\frac{1}{3}$에 대한 개념이 점점 발달하고 있다는 것은 관련된 표현 체계의 번역, 변환의 네트워크가 점점 복잡해진다는 것을 의미한다. 이에 교사는 학생들의 개념 학습의 어려움을 진단하고 교수전략을 결정하기 위해서, 하나의 표현 방식 안에 내재된 아이디어를 드러낼 수 있도록 하는 유용한 질문들을 생성해야 하며, 동일한 아이디어를 다른 표현 방식으로 설명하고 기술하고 나타내도록 지도해야 한다.

요컨대 수학적 개념의 형성을 위해서는 동일 구조를 지닌 다양한 표현을 이용 가능한 상황에서 출발해야 할 것이다. 다양한 표현을 구성하여 그 집합체로부터 본질이 되는 개념을 파악하는 과정이야말로 바람직한 개념 학습이며, 이것이 바로 Freudenthal이 말하는 개념 구성이다(김연식, 장혜원, 1996).

2. 무리수 개념의 정의와 다양한 표현

무리수 개념 학습에서도 다양한 표현에 대한 이해와 표현 간의 번역이 중요하다. Peled & Hershkovitz(1999), Zazkis & Sirotic(2010)는 무리수의 서로 다른 표현들의 유연한 사용과 표현 간의 번역을 강조하고 있다. 그러나 이들 연구에서의 무리수 표현은 소수 표현, 기하적 표현과 같이 부분적이거나 제한적으로 제시되고 있다. Peled & Hershkovitz(1999)는 $\sqrt{5}$의 소수 표현과 수직선 표현에, Sirotic & Zazkis (2007)은 $\sqrt{5}$의 기하적 표현에, Zazkis & Sirotic(2010)는 분수표현과 소수 표현의 관계에 초점을 맞추었다. 실제로 무리수의 다양한 표현 유형을 체계적으로 정리하고 살펴본 연구는 찾아보기 힘들다. 이에 본 연구자들은 무리수 개념과 무리수 표현을 논한 Fischbein et al.(1995)을 비롯한 선행연구들을 바탕으로 무리수의 표현의 범주화를 시도하여 무리수 표현 집합체를 구성하고자 한다.

무리수 개념 또한 다른 수학적 개념과 마찬가지로 형식적 정의로는 다 담을 수 없는 다양한 의미가 있고, 이로 인해 다양한 표현이 존재할 것이다. 그럼에도 무리수를 어떻게 정의하는가는 무리수의 가장 기본적인 표현이 무엇인지를 결정한다는 점에서 반드시 살펴볼 필요가 있다. 먼저 대학수학에서 다루는 무리수에 대한 수학적 정의는 실수의 정의 안에 포함되어 제시되므로, 실수의 정의 속에서 무리수의 정의를 도출할 수 있다. 실수의 수학적 정의는 크게 완비 순서체로서의 공리적 정의와 유리수의 Cauchy 수열의 동치류 또는 Dedekind의 절단 개념으로서의 구성적 정의로 나눌 수 있다. 공리적 방법에 의해 실수계는 덧셈과 곱셈에 기초한 체(field)의 공리를 만족하며, 순서 공리와 완비성 공리를 만족하는 완비인 순서체이다. 완비성 공리의 관점에서 보면, 유리수 집합은 유계인 부분집합이 최소 상계를 가지지 않을 수 있으므로 '틈'이 생기며, 완비성을 만족하지 못한다(이지현, 2015). 이 '틈'이

바로 무리수의 존재성을 설명하며, Dedekind는 절단 개념을 사용하여 이 결함을 메우고 실수를 구성한다. 이제 무리수의 정의는 유리수의 절단 (A, B)를 이용하게 된다. 집합 A의 상한과 집합 B의 하한이 유리수 집합에 존재하지 않는 경우의 절단으로부터 무리수의 정의가 가능하다. 예를 들어, $A=\{x \in Q | x \leq 0$ 또는 $x^2 < 2\}$, $B=\{x \in Q | x > 0$ 이고 $x^2 > 2\}$인 경우의 절단이라면, 무리수 $\sqrt{2}$를 정의할 수 있다. 실수를 구성적으로 정의하는 또 다른 방법을 적용하면 무리수를 유리수의 Cauchy 수열의 동치류로 정의할 수 있다. 즉 무한소수를 유한소수열의 극한으로 도입한다는 것인데, $\sqrt{2}$를 $1, 1.4, 1.41, 1.414, \cdots$ 와 같은 유리수열의 극한으로 볼 수 있다.

한편 학교수학에서의 무리수 정의는 수학적 정의에 비해서 수학적 표현과 강하게 연결되어 있다. 학교수학에서는 무리수를 '$\frac{b}{a}(a \neq 0,\ a,b \in Z)$로 나타낼 수 없는 수'로 정의한다. 물론 이것은 '$\frac{b}{a}(a \neq 0,\ a,b \in Z)$로 나타낼 수 있는 수'라는 유리수의 정의를 대조적으로 기술한 것이다. 그렇다고 해서 무리수를 '$\frac{b}{a}$로 나타낼 수 없는 수'라고 기술하는 것과 '유리수가 아닌 수'로 기술하는 것이 동일하다고 볼 수는 없다. 왜냐하면, 전자가 '$\frac{b}{a}$' 표현을 통해 동치인 '두 정수 a와 b의 비'의 의미를 드러내는 반면에 후자는 그 의미를 숨기고 있기 때문이다. 유리수가 공통척도를 갖는 두 양, 즉 통약가능한 두 양의 비를 정수비로 표현한 것이라면, 무리수는 통약불가능한 양의 존재성, 즉 공통척도가 존재하지 않아서 정수비로 표현되지 않는 두 양의 존재를 설명한다. 무리수의 통약불가능성은 역사적으로 오랜 기간 동안 무리수를 유리수와의 대조적인 성질로서 '두 정수 a와 b의 비로 표현될 수 없는 양 또는 $\frac{b}{a}$로 나타낼 수 없는 양'이라는 소극적인 의미만을 가질 수 밖에 없었다.

오늘날과 같은 무리수의 아이디어는 16세기 Stevin의 소수의 발명 덕분이라고 할 수 있다. 무한소수에 의해 통약불가능한 양의 수치화가 비로소 가능해졌으며, 순환하지 않는 무한소수가 단위와 통약불가능한 양의 측정값을 표현하게

<표 II-1> 무리수의 표현 양식

표현 양식	설명	예시
非분수 표현	분수 $\frac{b}{a}(a \neq 0,\ a,b \in Z)$, 즉 두 정수의 비로 나타낼 수 없다	1과 $\sqrt{2}$의 통약불가능성 $\sqrt{2}=\frac{b}{a}$의 귀류법
소수 표현	순환하지 않는 무한소수로 나타내진다	$0.12122122212\cdots$ (1과 1사이에 2가 하나씩 증가하는 규칙)
기호 표현	근호 기호를 사용해 나타내거나 특정 기호를 무리수로 기억하고 있다	$\sqrt{3}$, $\sqrt{0.1}$, π, e
기하 표현	도형의 길이, 넓이 등의 측정값으로 나타내진다	한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선 $\sqrt{2}$
수직선 표현	수직선 위의 한 점으로 정확히 나타낼 수 있다	수직선 위의 $\sqrt{5}$의 위치
함숫값 표현	무리수는 특정한 함수의 함숫값으로 나타내진다	$\log 2$, $\ln 5$, $\sin 45^\circ$, $\cos\frac{\pi}{6}$

된 것이다(변희현, 2005). 드디어 학교수학에 등장하는 무리수의 또 다른 정의, 즉 '순환하지 않는 무한소수'라는 정의가 발생하게 된다. 이는 실수를 무한소수로 정의하는 것으로 확장된다. 유리수는 순환하는 무한소수로, 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 정리될 수 있는 것이다. 물론 여기에는 유한소수를 0이 순환하는 무한소수로 해석하는 전제가 필요하다.

무리수의 개념과 정의에 관한 이상의 내용을 종합하여, 본 연구에서는 무리수의 표현 양식의 범주를 <표 II-1>과 같이 설정하였다.

먼저 非분수 표현은 무리수를 분수 $\frac{b}{a}(a \neq 0,\ a,b \in Z)$ 형태로 나타낼 수 없음을 기술하는 언어적 표현을 말한다. 유리수와의 구별이 목적이지만, 결국은 유리수의 표현에 의존할 수밖에 없다는 한계를 지닌다. 그럼에도 非분수 표현은 데데킨트의 절단과 같은 무리수의 형식적 구성을 학습하기 전까지 무리수의 정의로 사용된다. 여기서 주목해야 할 사실은 분수 $\frac{b}{a}$ 형태에 내재되어 있는 수학적 아이디어가 두 정수의 비 $b:a$ 라는 것이다. 무리수의 非분수 표현을 진정으로 이해하기 위해서는 $\frac{b}{a}$ 표현의 불가능성뿐만 아니라 그 안에 내포된 의미인 단위와 무리수의 통약불가능성까지를 설명할 수 있어야 한다.

소수 표현은 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 나타낼 수 있다는 것이다. 1과 1 사이에 2가 하나씩 증가하는 규칙을 가진 $0.12122122212\cdots$와 같이 순환마디가 없는 무한소수 형태를 무리수로 인식하는 것과 원주율 π를 순환하지 않는 무한소수 $3.141592\cdots$로 나타내는 것은 무리수의 소수 표현의 사례이다. 무리수의 소수 표현을 이해한다는 것은 유리수의 소수 표현과 구별하여 설명할 수 있다는 것을 포함한다. 학교수학에서는 유리수가 유한소수 또는 순환소수로, 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 나타낼 수 있다는 것을 아는 것이며, 대학수학에서는 '실수는 무한소수이다'라는 명제가 참임을 아는 것이다. 물론 그 역도 성립한다는 사실을 이해하는 것도 포함한다. 무리수의 소수 표현과 非분수 표현은 무리수의 정의 자체가 의존하고 있는 무리수의 기본 표현이라고 할 수 있다.

기호 표현은 무리수를 $\sqrt{3}$, $\sqrt{0.1}$ 와 같이 근호 기호를 사용해 나타내거나, π, e와 같은 특정 기호로 나타내는 경우를 말한다. 전자는 '무리수는 루트($\sqrt{\ }$), 근호가 있는 식'과 같이 제한적 이해의 위험이 있는 반면에, 후자는 단순 기억과 회상에 의해 무리수로 간주할 위험이 있다. $\sqrt{3}$과 π과 같은 기호 표현만으로 무리수를 이해하고 있는 학생들은 무리수의 본질적 개념인 통약불가능성이나 실수의 무한소수 표현에 대한 이해가 결여되기 쉽다.

기하 표현은 무리수를 도형의 길이, 넓이 등의 측정값으로 나타내는 것을 말한다. 본 고에서 설정한 기하 표현은 형식적인 작도의 관점이 아닌 직관적인 측정의 관점을 취하며 시각적으로 나타내어 질 수 있는 도형을 의미한다. 예를 들어, 정사각형의 한 변의 길이에 대한 대각선의 길이, 직각삼각형의 두 변의 길이에 대한 빗변의 길이와 같은 기하적인 형태를 포함하는 유형이다. 무리수 π의 경우에도 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 원의 둘레라든지 반지름의 길이가 1인 원의 넓이 등의 기하 표현을 가질 수 있다. 자칫 무리수는 무한소수 특성으로 인하여 끝없이 계속되는 과정이라는 가무한으로 인식될 위험이 있다. 반면에 기하 표현은 무리수를 측정값으로서의 하나의 대상으로 다룰 수 있게 한다는 점에서 무리수의 실무한의 속성을 이해하는데 도움을 줄 수 있다는 장점이 있다.

수직선 표현은 수직선 위의 무리수의 위치를 결정하는 것으로, 수직선 위에 대응하는 점을 나타내는 것을 말한다. 학생들은 수직선과 실수의 일대일대응을 기본 성질로 하여 무리수와 수직선을 연결할 수 있어야 한다. 그러나 무리수에 대한 개념적 이해가 부족한 학생들은 무리수의 소수 표현, 즉 순환하지 않는 무한소수라는 표현이 작동하여 무리수가 끝이 없이 계속해서 진행하는 수라는 이미지를 갖게 되고, 이로 인해 수직선 위에 대응하는 하나의 점으로 표현할 수 없다는 오개념을 가질 위험이 있다. 또한 자와 컴퍼스와 같은 도구를 사용해서는 수직선 위에 무리수의 정확한 위치를 찾을 수 없다는 물리적인 한계를 수직선 위에 대응점 자체가 존재하지 않는다는 것으로 혼동할 위험도 예견된다. 우리가 무리수의 수직선 표현에 주목하는 이유는 이 표현 양식이 무리수의 무한소수 표현이 가지는 가무한의 속성을 극복하고 무리수의 실무한의 속성을 이해하는 것과 밀접한 관련이 있기 때문이다.

마지막으로 함숫값 표현은 무리수를 특정한 함수의 함숫값으로 나타낼 수 있다는 것이다. 예를 들어 $\log 2$, $\ln 5$, $\sin 45°$, $\cos\frac{\pi}{6}$는 함숫값을 이용하여 무리수를 나타낸 사례이다. 함숫값을 표현은 중등학교 무리수 도입에서 다루어지지 않지만, 본 연구의 대상이 예비교사라는 점에서 함숫값을 이용한 무리수 표현이 나타날 가능성은 충분하다.

본 연구에서 설정한 무리수의 여섯 가지 표현 양식이 무리수 표현의 절대적 범주는 아닐 것이다. 다만 각각의 표현 양식이 다른 표현 양식과 구별되는 고유의 특징들이 존재하고, 각각의 표현 양식에 대응하는 무리수의 의미 영역을 이야기할 수 있다는 점에서 무리수 개념의 표현 집합체로서 유의미하다고 보여진다. 분명한 것은 무리수의 다양한 표현들이 다시 무리수라는 하나의 개념으로 연결되고 이로 인해 무리수의 본질이 되는 개념을 파악하는 것이야말로 진정한 의미의 무리수에 대한 개념적 이해라는 것이다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구대상자

본 연구의 목적은 예비교사들의 무리수 개념과 표현에 대한 이해 정도를 조사하여 중등학교에서의 무리수 개념 지도에 대한 교수학적 시사점을 도출하는 것이다. 본 연구의 대상자는 2016년 1학기에 수학교육과의 학부와 대학원에 각각 개설된 교과교육 관련강좌를 수강한 예비수학교사들이다. 연구를 위해 참여한 학생들은 학부 4학년과 대학원 1년차 학생들로 학부학생은 수학교육과 16명과 타과학생 5명(환경교육 2명, 지리교육 2명, 영어교육 1명)으로 21명이었고, 대학원생은 모두 수학교육 전공자들로 28명이었다. 학부학생들과 대학원생 모두 무리수의 표현에 초점을 맞춘 수업을 받은 경험은 없었다. 예비교사들의 이해 정도를 조사하고자 한 본 연구의 의도에 따라 대학원 과정의 현직교사 한 명은 결과분석에서 제외하였다. 결과분석에서는 연구대상자들에게 임의로 번호를 부여하여 S1~S48로 기술한다.

2. 검사도구

본 연구에서는 예비교사들의 무리수 개념의 정의에 내포된 표현, 무리수 표현, 표현 간의 번역에 관한 이해 정도를 확인하고 무리수의 개념과 표현에 대한 제한적인 이해나 오류를 확인하기 위해 ‘무리수 개념과 표현’, ‘무리수의 다양한

<표 III-1> 검사도구의 구성과 조사 내용

조사 항목	문항	조사 내용
무리수 개념과 표현	1-1, 3-1, 3-2	예비교사들은 무리수 정의에 내포된 표현을 어떻게 이해하는가?
	1-3, 1-4, 1-5	무리수 표현은 예비교사들의 무리수 판단 기준에 어떤 영향을 미치는가?
무리수의 다양한 표현	1-2	예비교사들이 제시한 무리수 표현에서는 집중과 간과 현상이 어떻게 나타나는가?
무리수 표현 간의 번역	2-1, 2-2, 2-3	예비교사들이 무리수 표현들을 번역하는 과정에서는 어떤 특징들이 나타나는가?

표현', '무리수 표현 간의 번역'으로 조사항목을 설정하고 총 9개의 세부문항으로 구성된 검사지를 개발하였다. [문항1-3]과 [문항3-1], [문항3-2]은 Fischbein et al.(1995)에서, [문항1-4]는 Zazkis & Sirotic (2010)에서 발췌하였고, [문항2-1]과 [문항2-2]는 Sirotic & Zazkis(2007a)가 사용한 문항을 수정하였으며, 그 외 문항은 자체 개발하였다. 검사도구의 조사항목에 따른 문항과 조사 내용은 <표 III-1>과 같다.

[문항1-1]은 학교수학에서 무리수를 정의하고 있는 두 가지 정의방식을 제시하고 본질적인 정의방식을 선택하는 문항이다. 임의의 두 선분에 대한 공통척도의 존재성을 판단하는 [문항3-1]과 정사각형의 한 변과 대각선에 대한 공통척도의 존재성을 판단하는 [문항3-2]는 무리수의 통약불가능성을 이해하는지를 확인하는 문항이다. [문항1-3]은 '0.12122122212222…'가 유리수인지 무리수인지를 물었으며, [문항1-4]는 '53/83'과 이 수의 계산기 화면(0.6385542168674698)이 동시에 주어졌을 때 유리수인지 무리수인지를 판단하게 하였다. 이 두 문항과 '실수는 무한소수이다'의 참·짓을 판단하는 [문항1-5]는 무리수를 판단하는 상황에 무리수 정의와 표현의 일치 여부 등 표현이 미치는 영향을 확인하고자 구성하였다. 이상의 문항들은 '무리수 개념과 표현' 항목에 해당된다.

[문항1-2]는 무리수를 최대한 다양하게 나열하도록 하여 무리수 표현에서 나타나는 집중되거나 간과된 현상을 확인하고 더불어 무리수 표현에 나타나는 오류를 확인함으로써 예비교사들의 무리수 표현에 대한 이해를 분석하기 위해 구성한 문항으로, '무리수의 다양한 표현' 항목에 해당한다.

무리수의 기호 표현 $\sqrt{5}$와 π의 기하적 표현을 묻는 [문항2-1], $\sqrt{5}$와 π의 수직선 표현을 묻는 [문항2-2], $\sqrt{5}$와 π에 해당하는 수직선 위의 점의 존재성을 묻는 [문항2-3]은 기호 표현과 수직선 표현을 비롯한 다양한 무리수의 표현 간 번역의 이해를 조사하는 문항으로 '무리수 표현간의 번역' 항목에 해당된다.

3. 분석방법

본 연구에서는 예비교사들의 무리수 개념, 표현들, 표현 간의 번역에 관한 이해를 확인하기 위해 검사지 반응을 분석한다. '무리수 개념과 표현' 항목은 [문항1-1]의 반응을 통계적으로 확인하고, [문항3-1]과 [문항3-2]의 반응을 '非분수 표현 인식', '표현의 부재', '제한된 지식', '오류' 등으로 분류하여 예비교사들이 무리수 정의에 내포된 표현을 어떻게 이해하고 있는지를 분석한다. [문항1-3]은 0.12122122212…을 '비순환 무한소수이므로 무리수이다'로 답한 경우를, [문항1-4]에서는 '53/83이 '(정수)/(정수)$\neq$0 꼴이므로 유리수이다'로 답한 경우를 기준으로 정답과 오답으로 분류한다. 오답으로 분류된 사례에서

정의와 표현이 불일치하는 경우가 있는지를 분석한다. [문항1-5]에서는 ‘실수는 무한소수이다’를 정답으로 하되, 학생들이 제시한 정당화의 근거를 분류하여 분석한다.

‘무리수의 다양한 표현’ 항목은 [문항1-2]의 반응에서 제시된 다양한 표현들을 통계적으로 분류하여 무리수 표현에서 나타나는 ‘집중 또는 간과’된 경향을 살펴본다. 이를 위해 6가지 표현 양식 중 특정한 표현 양식에 대하여 동일한 표현 양식의 무리수를 3개 기술한 사례나 동일한 표현 양식의 무리수만 기술한 사례가 90% 이상일 때 ‘집중’으로 판단하고 특정한 표현 양식의 무리수를 기술한 사례가 50% 미만일 때 ‘간과’로 판단한다. 추가로 학생들이 제시한 무리수 표현에서 나타나는 오류를 확인한다.

‘무리수 표현 간의 번역’ 항목은 [문항2-1]과 [문항2-2], [문항2-3]에서 ‘기호 표현’이 ‘기하 표현’, ‘수직선 표현’으로 번역되는 것에 초점을 맞추어 분석한다. 특히 [문항2-3]에서는 수직선 위에 대응하는 점으로서 무리수의 실무한을 인식하고 답한 사례와 무한히 반복되는 과정으로서 가무한의 관점을 드러낸 사례를 확인한다.

Ⅳ. 결과분석

1. 무리수 개념과 표현

가. 무리수 정의에 내포된 표현

대다수의 예비교사들은 학교수학에서의 무리수에 대한 두 정의, 즉 ‘유리수가 아닌 수’와 ‘순환하지 않는 무한소수’ 모두를 제시하는 것이 무리수의 본질적 정의를 지도하는 방식이라고 답하였다. 각 답변에 대한 빈도수를 조사한 결과, ‘① 유리수가 아닌 수’는 8명, ‘② 순환하지 않은 무한소수’는 11명, ‘③ ①과 ② 모두’가 29명으로 조사되었다.

<표 IV-1> 무리수의 본질적 정의 방식 선택

응답 유형	응답자 수	비율
① 유리수가 아닌 수	8명	16.7%
② 순환하지 않는 무한소수	11명	22.9%
③ ①과 ② 모두	29명	60.4%
합계	48명	100%

‘① 유리수가 아닌 수’ 정의를 선택한 학생들은 ‘무한소수 개념을 이해하는 것이 어렵기 때문에’와 ‘실수는 유리수와 무리수로 설명되므로’라는 의견을 제시한 반면에 ‘② 순환하지 않는 무한소수’ 정의를 선택한 학생들은 ‘복소수 범위에서 유리수가 아닌 수와 무리수는 동치가 아니므로’, ‘유리수는 순환하지 않는 무한소수로 환원되므로’라는 이유를 제시하였다. ③을 선택한 학생들이 제시한 이유로는 ‘무리수를 다양하게 정의하는 것이 학생들의 이해를 돕기 때문에’와 ‘①과 ②는 수학적으로 동치이므로’가 가장 많았다. ①을 선택한 8명의 사례 중 3명(S7, S42, S43)이 제시한 ‘순환하지 않는 무한소수를 무한히 보여준다는 것은 현실적으로 어렵기 때문에’라는 의견에 주목할 필요가 있다. 이들은 무한의 개념을 학습하지 않은 중학교 학생들에게 순환하지 않는 무한소수로서의 무리수를 그 실체가 분명하지 않은 예시를 통해 가르친다는 것에 회의적이었다. 이들의 설명에 의하면 학생들에게 순환하지 않는 무한소수는 무리수의 불투명한 표현으로 ‘정확한 값을 갖지 않는 모호한 수’에 해당한다. 그러나 이는 규칙성을 포함하는 순환하지 않는 무리수 0.12122122212⋯가 투명한 무리수 표현으로 활용될 수 있다는 점을 간과한 것으로 판단된다.

한편 무리수의 정의방식에 대한 [문항1-1]의 반응에서 무리수 개념의 본질인 ‘통약불가능성’

<표 IV-2> 무리수의 통약불가능성에 관한 반응

반응 유형	[문항3-1]	[문항3-2]	분류 기준
非분수 표현 인식	16	10	공통척도의 존재성과 그 근거를 옳게 제시
표현의 부재	16	14	예시를 통해 공통척도의 존재성 제시
제한된 지식	7	4	완전한 예시 없이 공통척도의 존재만 언급
오류	9	20	바르지 못한 선택과 논리 또는 무응답
합계	48	48	빈칸

을 언급하여 자신의 선택을 정당화한 사례는 단 한 명도 없었다. 다만 3명(S2, S25, S32)만이 '$\left(\frac{\text{정수}}{\text{정수}}\right)$의 꼴로 나타낼 수 없다'는 무리수의 非분수 표현을 언급한 것에 그쳤다. 예비교사들은 '순환하지 않는 무한소수'라는 정의에서는 무리수가 갖는 '비순환성'을 즉각적으로 인식하였지만, '유리수가 아닌 수'라는 정의 속에 내포되어 있는 의미, 즉 '두 정수의 비 형태 $\left(\frac{\text{정수}}{\text{정수}}\text{의 꼴}\right)$로 표현될 수 없다'는 것, 더 나아가 '통약불가능성'을 인식하지 못한 것으로 보인다.

무리수의 본질인 통약불가능성을 본격적으로 살펴 본 [문항3-1]과 [문항3-2]의 반응은 '非분수 표현 인식', '표현의 부재', '제한된 지식', '오류'로 분류하였다. [문항3-1]의 정답은 '항상 존재하는 것은 아니다'였으며, [문항3-2]의 정답은 '항상 존재하지 않는다'였다. '非분수 표현 인식'은 '정수비로 표현할 수 없다', '무리수의 통약불가능성', '귀류법을 이용한 증명' 등을 언급하여 공통척도의 존재성을 설명한 경우로 하였으며, 두 선분이 유리수-무리수일 때 공통척도가 없고 유리수-유리수일 때 공통척도가 있다는 정도로만 기술하였을 뿐 공통척도가 없는 이유를 추가로 설명하지 않은 경우는 '표현의 부재'로 분류하였다. 그 외에 공통척도의 존재성을 바르게 판단하였지만 그 이유를 설명함에 있어 단편적인 지식만을 포함한 경우 '제한된 지식'으로 분류하였고, 설명이 없거나 설명에 오류를 포함하고 있는 경우와 공통척도의 존재성을 바르게 판단하지 못한 경우를 모두 포함하여 '오류'로 분류하였다.

[문항3-1]의 '서로 다른 길이의 선분 AB와 선분 CD는 항상 공통 측도를 갖는가?'에 대한 반응은 <표 IV-2>에서 보는 바와 같이, '非분수 표현 인식' 16명, '표현의 부재' 16명, '제한된 지식' 7명, '오류' 9명으로 나타났다. [문항3-2]의 '정사각형의 한 변과 대각선은 항상 공통 단위 척도를 갖는가?'에 대한 반응은 '非분수 표현 인식'으로 분류된 응답자는 10명, '표현의 부재'로 분류된 응답자는 14명, '제한된 지식'으로 분류된 응답자는 4명, '오류'로 분류된 응답자는 20명으로 나타났다.

이번 조사에서 두 선분의 통약가능성 여부를 옳게 답한 학생은 39명(66.7%), 타당한 근거를 제시함으로써 정당화에 성공한 학생은 16명(33.3%)라고 할 수 있으므로, 동일한 문항을 조사하였던 Fischbein et al.(1995) 연구의 38%, 10.3%에 비교하면 상대적으로 높은 정답률이라고 할 수 있다. 반면에 정사각형의 한 변과 대각선의 통약불가능성을 옳게 답한 학생이 28명(58.3%), 그 근거를 옳게 제시한 학생이 10명(20.8%)으로, Fischbein et al.(1995) 연구 결과인 49%, 49%와 차이를 보인다. 우리나라 예비교사들이 이스라엘 예비교사들에 비해 통약불가능성을 옳게 답한 비율이 높은 것은 사실이나 정당화에는 실패한 사례가 많은 것을 확인할 수 있다. 이와 같은 결과는 우리나라 예비교사들이 무리수의 통약불가능성을 단편적 지식으로 기억하

1과 $\sqrt{2}$는 공통척도가 존재하지 않는다
실수 a를 1과 $\sqrt{2}$의 공통척도라고 하면 적당한 양의정수 b, c가 존재하여 $1=a\cdot b$, $\sqrt{2}=a\cdot c$를 만족한다 $a=\frac{1}{b}$이고 $\sqrt{2}=a\cdot c=\frac{c}{b}$이다. $\frac{c}{b}$는 유리수이고 $\sqrt{2}$는 무리수이므로 모순 따라서 공통척도는 없고 임의의 두선분에 대하여 항상 공통척도가 있는 건 아니다.

정사각형의 한변과 대각선은 $1:\sqrt{2}$의 비를 갖고 있기 때문에 정수비로 표현할 수 없고 공통척도는 항상 존재하지 않는다

[그림 IV-1] 공통척도의 존재성과 그 근거에 대한 S43(좌)와 S24(우)의 반응

는 수준에 머물러 있음을 짐작하게 한다.

정당화에 성공한 예로서 [그림 IV-1]의 S43은 서로 다른 길이의 두 선분에 대해서 공통척도의 존재성과 그 근거를 바르게 제시하여 '非분수 표현 인식'으로 분류된 사례이다. 이와 같이 공통척도의 존재성을 대부분 유리수와 무리수 사이에 공통척도가 존재한다고 가정하여 모순을 끌어내는 방식으로 증명하였다. S24은 정사각형의 한 변과 대각선의 길이는 $1:\sqrt{2}$의 비를 갖고 이것은 정수비로 표현할 수 없기 때문에 공통척도가 존재하지 않는다고 설명하였다. 이와 같이 [문항3-2]의 반응에서 '非분수 표현 인식'으로 분류된 사례는 대부분 정수비로 표현되지 않는다는 의견을 제시했다.

반면에 전체 학생의 66.7%의 학생들이 서로 다른 길이의 두 선분에 대해서, 79.2%의 학생들이 정사각형의 한 변과 대각선의 길이에 대해서 공통척도의 존재성의 근거를 정당화하지 못한 것으로 확인되었다. 이는 상당수의 예비교사들이 '유리수가 아닌 수'라는 정의에서 '무리수는 $\frac{\text{정수}}{\text{정수}}$라는 분수 표현, 즉 두 정수의 비 형태로 표현될 수 없다'는 내포된 의미를 인식하지 못하는 것과 동일하게, 무리수의 통약불가능성 문제에서도 '두 선분에 공통척도가 존재하지 않는다는 것이 유리수, 즉 $\frac{\text{정수}}{\text{정수}}$라는 분수 표현을 얻지 못한다는 의미로서 무리수라는 非분수 표현을 발생시킨다'는 것을 인식하지 못하고 있다는 해석을 가능하게 한다.

나. 무리수 표현과 무리수의 판단

[문항1-3]에서 1과 1사이에 2가 하나씩 증가하는 규칙을 가진 무한소수 $0.12122122212\cdots$가 무리수인 이유에 대해 44명(91.7%)의 학생들은 주어진 무한소수에는 순환마디가 존재하지 않으며, 따라서 '순환하지 않는 순환소수'이므로 무리수에 해당한다고 답하였다. 그 외에 '분수로 표현될 수 없으므로 무리수'로 설명한 학생이 4명 있었다. 같은 문항을 조사한 Fischbein et al.(1995)의 연구에서는 예비교사의 약 30%, Zazkis & Sirotic (2010)의 연구에서는 24%가 오답이었다는 점을 고려하면, 우리나라 예비교사의 정답률이 더 높은 것을 알 수 있다. 또한 44명의 응답자 대부분은 소수점 아래 숫자의 배열에서 규칙성과 순환성을 구별해야 함을 지적할 수 있었다.

한편 [문항1-4]에서 $\frac{53}{83}$과 이 수를 계산한 계산기 결과창(**0.6385542168674698**)이 동시에 제시되었을 때 무려 16명(33.4%)의 답안에서 오류가 발견되었다. 이러한 결과는 동일한 문항에 대해서 정답을 말하고, 정당화에도 성공한 비율이 67%로 조사된 바 있는 Zazkis & Sirotic (2010)의 연구 결과와 거의 유사함을 알 수 있다. 이 중에서 4명(S11, S12, S14, S21)은 계산기

결과창에 제시된 소수점 아래 숫자의 배열에 순환마디가 없다는 것을 이유로 무리수라고 답하였으며, 4명(S28, S31, S45, S48)은 소수점 아래 숫자가 끝까지 나타나지 않아서 판단할 수 없다고 답한 것이다. 반면에 이 수가 유리수라는 것은 옳게 답했으나, 제시된 이유에서 오류를 포함한 학생은 8명이었다. 이들은 $\frac{53}{83}$이라는 분수 표현보다는 소수로 표현된 계산기 결과창에 집중하여 '유한소수이므로 유리수'라고 답한 학생들이다. 이 상황은 순환마디가 41자리인 순환소수로 표현되는 분수 $\frac{53}{83}$을 계산기라는 공학이 갖는 한계로 인해 순환마디의 일부만을 보여줘야 하는 제한조건을 인식하지 못한 것으로 보인다. 결과적으로 위의 두 문항인 [문항1-3]과 [문항1-4]의 반응에서 무한소수 표현이 무리수 판단 기준의 중요한 요소로 작용하고 있다는 것을 알 수 있다.

다음으로 '실수는 무한소수이다'라는 명제에 대해서 참이라고 답한 사례가 22명(45.8%), 거짓이라고 답한 사례가 26명(54.2%)으로, 이 명제가 거짓이라고 생각하는 학생의 비율이 더 높았다. 거짓이라고 답한 학생들은 '유리수에 속하는 유한소수가 무한소수가 될 수 없기 때문에'라는 이유를 제시한 반면에 참이라고 답한 학생들은 구체적 근거 없이 '유한소수도 무한소수이기 때문에'라고 답하거나 '$1.3 = 1.2\dot{9}$와 같이, 유한소수를 9를 순환마디인 순환소수로 표현할 수 있어서'라는 이유를 제시했다. 유한소수를 0을 순환마디로 하는 순환소수로 설명한 학생은 S6을 비롯한 5명에 불과했으며, 순환마디 0과 9를 동시에 말한 학생은 S40 단 한 명이었다. 이러한 결과는 무한소수 표현이 무리수 판단 기준의 중요한 요소로 작용하고는 있으나, 무리수의 정의와 실수의 정의에 내포된 무한소수 표현에 대한 일관성 있는 이해가 결여되어 있다고 말할 수 있다. 앞으로 학생들을 가르쳐야 하는 예비교사로서 무리수와 관련된 무한소수 표현에 대한 관심과 깊이 있는 이해가 요구된다고 할 수 있다.

2. 무리수 표현의 집중과 간과

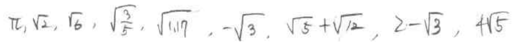
[문항1-2] '무리수에 대한 제한된 개념을 갖지 않도록 실제수업에서 학생들에게 제시할 수 있는 무리수를 최대한 다양하게 5개 이상 나열해 보시오.'에 대한 예비교사들의 반응은 본 연구에서 구성한 6가지 무리수의 표현 양식에 따라 분류하는 것을 기본으로 하되, 어느 하나의 양식에도 포함되지 않는 경우 기타 표현으로 분류하여 집중과 간과된 표현 양식을 확인하였다.

<표 IV-3> 집중되거나 간과된 무리수 표현

표현 양식	응답 유형(특이사례)	응답자 (특이사례응답자)		판단
기호	$\sqrt{2}, \sqrt{5}$, e, π등 (기호 표현만을 제시한 사례)	48 (19)		기호 표현의 집중
소수	규칙 없는 비순환 무한 소수	17	22	소수 표현의 간과
	규칙 있는 비순환 무한 소수	5		
함숫값	삼각비, 로그, 방정식의 근	8		함숫값 표현의 간과
기하	직사각형, 원 등의 도형	2		기하 표현의 간과
非분수	유리수가 아닌 수	1		非분수 표현의 간과
기타	방정식의 근	2		기타 표현의 간과

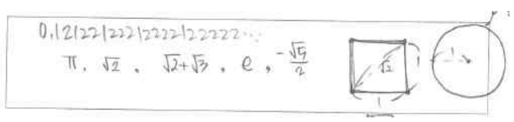
<표 IV-3>에서 보는 바와 같이, 48명의 응답자 모두가 ‘ $\sqrt{2}$, $\sqrt{0.1}$, $\sqrt{2}+3$, π, e’와 같은 기호 표현을 3개 이상 제시하였고 이 중 5개 모두를 기호 표현만으로 제시한 응답자가 19명으로 확인되었다. 소수 표현은 ‘$3.141592\cdots$’와 같이 규칙성이 없는 비순환 무한소수 17명과 ‘$0.01001000100001\cdots$’와 같이 규칙성이 있는 비순환 무한소수 5명을 합해 22명으로 확인되었다. 또한 ‘$\log 2, \sin 1, \tan 30^\circ, \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$’와 같이 특정 함수의 함숫값 표현 8명, 기하 표현 2명, 非분수 표현 1명으로 확인되었다. 그 외에 ‘$x^2=2$, $x^3=2$ 을 만족하는 x’와 같이 방정식의 근으로 무리수를 표현한 기타의 사례(2명)가 있었다.

결과적으로 ‘무리수의 다양한 표현’ 항목에서는 예비교사들의 기호 표현에 대한 집중 경향을 확인할 수 있었다. 예를 들어, S24의 경우는 그가 제시한 10개의 무리수에서 π를 제외한 9개가 모두 근호를 포함하는 무리수일 정도였다([그림 IV-2] 참조). 이는 예비교사들이 근호 기호($\sqrt{\ }$)를 사용하거나 π, e와 같은 특정 기호를 무리수로 기억하고 있다가 쉽게 재생하기 때문으로 보인다. 한편 기호 표현의 집중으로 분류된 사례에서 기호 표현만을 제시한 특이 사례 19명을 기준으로 무리수 정의의 본질 [문항1-1]에 대한 반응을 비교 분석해 본 결과, 이들이 생각하는 무리수 정의와 표현의 사례가 불일치하고 있음을 확인할 수 있었다. 이들 19명은 [문항1-1]에 대해 ②를 선택한 6명과 ③을 선택한 13명으로, 학교 수학에서 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 도입해야 한다고 선택하였지만, 정작 본인들이 제시한 무리수의 예시에는 순환하지 않는 무한소수를 제시하지 않음으로써 개념과 표현 사이의 모순된 결과를 나타냈다.



[그림 IV-2] 기호 표현에 집중된 사례(S24)

무리수 표현을 분석한 결과, 기타 표현을 포함한 7가지 표현 양식 중 ‘집중’으로 판단된 기호 표현을 제외하면 모든 표현 양식이 ‘간과’되고 있다는 것을 알 수 있었다. 이처럼 무리수 표현 양식에 대한 ‘집중’ 또는 ‘간과’ 현상은 무리수 표현에 대한 제한된 이해를 드러내는 것으로 볼 수 있다. 실제로 기호표현, 소수 표현, 기하 표현 등 3가지 이상의 표현 양식을 사용하여 무리수를 제시한 경우로 이러한 사례는 [그림 IV-3]의 S16이 유일하였다. S16의 경우, 무리수 표현을 다양하게 이해하고 있다고 볼 수 있겠지만, 전체 응답자 48명 중 47명이 제한적인 무리수 표현을 사용하고 있다는 것을 알 수 있다.



[그림 IV-3] 기하 표현을 제시한 사례(S16)

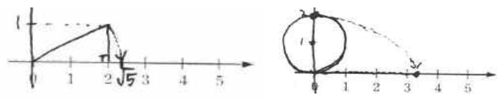
3. 무리수 표현 간의 번역의 유연성

무리수 표현 간의 번역에 대한 분석은 [문항 2-1]의 반응에서 $\sqrt{5}$와 π를 기하학적 대상으로 나타낼 수 있을 때 ‘기호 표현’을 ‘기하 표현’으로 번역하였다고 분류하고, (문2-2)의 반응에서 $\sqrt{5}$와 π를 수직선 위의 한 점으로 나타내었을 때 ‘기호 표현’을 ‘수직선 표현’으로 번역하였다고 분류한 결과를 확인하는 것에서 출발하였다. 분석 결과, 무리수 $\sqrt{5}$에 대해서는 각각 41명이 ‘기하 표현’과 ‘수직선 표현’으로 번역에 성공하였으며, 무리수 π에 대해서는 20명이 ‘기하 표현’으로, 3명이 ‘수직선 표현’으로 번역에 성공하였다.

<표 IV-4> 표현 간 번역의 성공 반응

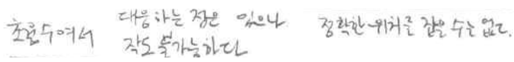
반응 유형 \ 무리수		$\sqrt{5}$	π	분류 기준
기호-기하 표현 번역		41	20	기하학적 대상으로 옳게 표현
기하-수직선 표현 번역		41	3	수직선 위의 정확한 위치 여부와 그 방법 또는 이유를 옳게 제시
수직선 위에 대응점	있다	48	43	수직선 위의 대응점 있는 이유를 옳게 제시
	없다	0	5	설명이 없거나 오류

$\sqrt{5}$의 기하 표현에 성공한 41명 모두 $\sqrt{5}$를 한 변이 1이고 다른 변이 2인 직각삼각형의 빗변 또는 직사각형의 대각선으로 나타냈으며, π에 대해서는 지름이 1인 원주 또는 반지름이 1인 반원주로 나타냈다([그림 IV-4] 참조). $\sqrt{5}$와 π가 일반적으로 교과서에서 제시되고 있는 무리수의 '기호 표현'임을 감안할 때, $\sqrt{5}$의 기하 표현의 성공률이 85.4%라는 것에 비해 π의 기하 표현의 성공률이 41.7%에 머물렀다는 것은 예비교사들의 π의 기호-기하 표현 번역에 대한 유연성이 떨어진다고 해석할 수 있다.



[그림 IV-4] $\sqrt{5}$와 π의 기하 표현과 수직선 표현(S2)

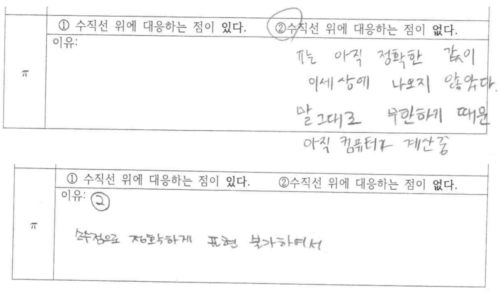
한편 $\sqrt{5}$의 수직선 표현에서는 기하 표현과 동일한 결과(85.4%)가 나타났다. Sirotic & Zazkis(2007)의 연구에서 성공한 예비교사의 비율이 19.6%에 불과했던 것과 비교하면 상당히 높은 수치이다. 이는 우리나라 예비교사들이 교과서에 제시되고 있는 $\sqrt{5}$ 내지는 이와 유사한 $\sqrt{2}$에 대한 동일 유형의 문제를 접해본 경험이 영향을 미친 것으로 생각할 수 있다. 반면에 π의 수직선 표현은 낮은 성공률(35.4%)을 보였다. 물론 수학적으로 $\sqrt{5}$는 작도가능인 수인 반면에 π는 작도불가능한 수이다. 따라서 $\sqrt{5}$는 수직선 위에 정확한 표현이 가능하지만, π는 불가능하다. 즉 π에 대해 '작도불가능한 수(초월수)이므로 수직선 위에 정확한 위치를 나타낼 수 없으나 대응하는 점은 있다'로 기술하였다면 번역에 성공한 것이다. 그런데 π의 수직선 표현 번역에 성공한 학생은 3명(S13, S43, S46)에 불과하였고 대다수의 학생들은 초월수로서 π의 작도불가능성이 π의 수직선 표현을 불가능하게 한다는 사실을 알지 못하는 것으로 보인다. [그림 IV-5]는 π를 수직선에 대응하는 점은 있으나 정확한 위치로 표현할 수 없는 작도불가능한 수라고 설명한 S46의 사례이다.



[그림 IV-5] 초월수로서 π의 작도불가능을 언급한 사례(S46)

무리수 표현의 번역에서 오류로 나타난 반응으로 무리수 π가 수직선 위에 대응하는 점이 없다고 답한 5명(10.4%)의 이유를 구체적으로 살펴보면, 적절한 설명을 하지 못한 경우(S13, S22), π는 직사각형의 빗변의 길이로 표현할 수 없는 수이기 때문이라고 답한 경우(S23), π는 소수 아래의 숫자가 무한히 계속되는 끝이 없는 수이고 아직 그 정확한 값이 알려져 있지 않기 때문에 수직선에 대응하는 점이 없다고 답한 경우(S27, S34)로 나눌 수 있다. [그림 IV-6]과 같이 S27와

S34는 무리수를 소수점 아래 자릿수가 무한히 계속되어 어느 하나의 수로 수렴하지 않는다는 관점을 갖고 있었다. 이러한 결과는 무리수를 무한소수의 극한값으로 이해하지 못하고 가무한의 관점에서 π를 이해하고 있는 예비교사가 있음을 보여준다.



[그림 IV-6] 가무한의 사례(S27(상), S34(하))

Ⅴ. 결 론

본 연구는 수학적 표현이 개념적 이해를 형성하는 수단이라는 관점을 토대로 예비교사들의 무리수 개념과 표현 방식에 대한 이해 정도를 조사하여 무리수 개념 지도를 위한 교수학적 시사점을 도출하고자 하였다. 이를 위해 선행연구에 나타난 수학적 개념과 표현과의 관계를 살펴보고, 무리수 개념의 다양한 표현을 6가지로 범주화하였으며, 이를 바탕으로 무리수 개념과 표현, 다양한 표현, 표현 간 번역에 관한 이해를 분석하였다. 본 연구의 분석 결과를 종합하여 무리수 지도에 있어 다음과 같은 시사점을 찾을 수 있다.

첫째, 무리수 정의에 내포된 표현의 의미를 무리수 개념의 본질과 연결시켜 지도할 필요가 있다. 본 연구에서 예비교사들은 무리수 정의에 내포된 표현의 의미를 명확하게 인식하지 못하고 있는 것으로 조사되었다. 실제로 상당수의 예비교사들이 '유리수가 아닌 수'라는 정의에 내포된 의미를 인식하지 못하였으며, 무리수의 통약불가능성 문제에 대한 결과도 동일하였다. 앞으로 학교수학과 예비교사 프로그램에서 '유리수가 아닌 수'라는 무리수의 정의를 다룰 때에는 '$\frac{\text{정수}}{\text{정수}}$라는 분수 표현, 즉 두 정수의 비 형태로 표현될 수 없다'를 포함하여 무리수 정의에 명시적으로 드러나지는 않지만 함의하고 있는 무리수의 본질적인 의미를 충분히 지도할 필요가 있다. 다시 말해서 예비교사들은 '두 선분에 공통척도가 존재하지 않는다는 것이 유리수, 즉 $\frac{\text{정수}}{\text{정수}}$라는 분수 표현을 얻지 못한다는 것을 의미하며, 더 나아가 무리수라는 非분수 표현을 발생시킨다'는 것 또한 이해해야 한다.

둘째, 무리수에 대한 개념 지도는 다양한 무리수 표현을 경험할 수 있도록 구성되어야 한다. 본 고에서는 무리수 표현을 非분수 표현, 소수 표현, 기호 표현, 기하 표현, 수직선 표현, 함숫값 표현 등의 6가지 표현 양식으로 범주화하였다. 6가지 표현 양식에서 非분수 표현은 '통약불가능성'을 소수 표현은 '비순환성'을 내포하고 있으며 이들은 각각 '유리수가 아닌 수', '순환하지 않는 무한소수'라는 학교수학에서의 무리수의 정의와 관련된다. 기호 표현은 작도 가능한 무리수(예, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ 등)와 작도 불가능한 무리수(예, π, e 등)으로 이해될 수 있다. 기하 표현은 직사각형의 대각선이나 원의 호 등 도형으로 나타내는 표현 양식이다. 수직선 표현은 수직선 위에 대응하는 점의 존재성과 그 근거를 설명하는 것과 관련되고 기하 표현은 도형의 측정값으로서 무리수를 표현하는 것이다. 특별히 기하 표현은 순환하지 않는 무한소수로서의 무리수를 하나의 대상으로 다룰 수 있다는 점에서 실무한을 이해하는 비계로 작용할 수 있다. 하나의 개념에 대해서 다양한 표현을 구성하여 그 집합체

로부터 본질이 되는 개념을 파악하는 과정이야말로 바람직한 개념 학습이며, Freudenthal이 말하는 개념 구성일 것이다.

셋째, 무리수의 정의와 실수의 정의에 내포된 무한소수 표현에 대한 일관성 있는 이해가 필요하다. 예비교사들은 무한소수 표현을 무리수 판단 기준의 중요한 요소로 인식하고 있었다. 실제로 상당수의 예비교사들이 무리수 여부를 판단하는 상황에서 계산기 표현에 의존하는 경향이 나타났고 분수 표현과 소수 표현이 동시에 제시된 경우에 소수표현에 더 의존한다는 사실 또한 확인할 수 있었다. 이와 관련하여 예비교사들은 소수 표현만을 제시하였을 때 정답률이 약 91.7%로 나타났으나 분수 표현과 소수 표현을 동시에 제시하였을 때 약 66.6%에 그쳤고 '실수는 무한소수이다'에 대한 오답률이 약 54.2%에 달하였다. 이러한 결과는 무한소수 표현이 무리수 판단 기준의 중요한 요소로 작용하고는 있으나, 무리수의 정의와 실수의 정의에 내포된 무한소수 표현에 대한 일관성 있는 이해가 결여되어 있음을 나타낸 것으로 볼 수 있다.

넷째, 무리수 개념 이해를 위해서는 일부 특정 표현이 아니라 다양한 표현들에 대한 폭넓은 이해가 필요하다. 본 연구에서 예비교사들은 무리수의 기호 표현에 '집중' 경향을 보였으나 소수 표현에는 '간과' 현상을 나타냈다. 예비교사들은 근호($\sqrt{\ }$)를 사용한 무리수의 기호 표현에 지나치게 의존하고 있었으며, π, e와 같은 특정 기호를 기억에 의해 자동적으로 재생하고 있는 것처럼 보였다. 한편 무리수의 소수 표현에 대한 응답률은 기호 표현의 결과와는 다르게 매우 낮은 비율로 나타났다. 특히 무리수 개념을 순환하지 않는 무한소수로 답한 학생들조차도 무리수 예시로 소수 표현을 언급하지 않았다는 것은 예비교사들의 무리수 표현에 대한 제한된 이해를 보여준다고 할 수 있다. 이와 같은 결과는 현행 교과서의 분석에서 그 이유를 찾을 수 있는데, 13종의 교과서에서 무리수의 다양한 예로 순환하지 않는 무한소수를 제시한 교과서가 3종에 그쳤다는 점에서 그러하다. 따라서 앞으로 교과서의 무리수 표현의 제시 방식도 좀 더 다양화될 필요가 있다.

다섯째, 무리수 개념에 대한 다양한 표현 간의 자유로운 번역 능력을 증진시키는 것이 중요하다. 예비교사들은 무리수 $\sqrt{5}$에 대해서는 각각 41명이 '기하 표현'과 '수직선 표현'으로 번역에 성공하였지만, 무리수 π에 대해서는 낮은 성공률을 보였다. 무리수의 개념적 이해를 위해서는 학생들의 표현 간 번역이 좀 더 유연하고 자유롭게 일어나야 한다. 예를 들어, $\sqrt{5}$를 단순히 근호를 사용한 기호로만 기억할 것이 아니라 순환하지 않는 무한소수 $2.236067\cdots$, 두 변의 길이가 1과 2인 직각삼각형의 빗변의 길이라는 측정값, 수직선 위에 존재하는 한 점, 함수 $f(x) = \sqrt{x}$에서의 $x=5$일 때의 함숫값 등으로 상호 유연하게 번역할 수 있는 능력이 요구된다. Lesh et al.(1987)의 주장처럼, 수학적 표현의 번역 능력은 개념적 이해의 증거이자 문제해결에 의미 있는 영향을 미치는 요소이기 때문이다.

여섯째, 무리수를 수직선 표현을 실무한의 관점과 연결하여 이해하는 것이 중요하다. 예비교사들은 무리수 표현들을 번역하는 과정에서 특별히 π에 대한 제한된 개념을 가지고 있는 것으로 나타났다. 구체적으로 π의 기하 표현으로의 번역은 20명이 가능하였던 반면에 수직선 표현으로의 번역에서는 단 3명만이 성공하였다. 또한 π가 수직선 위에 대응하는 점이 없다고 답한 사례도 5명이나 있었다. 대다수의 학생들이 무리수를 수직선 위에 대응하는 점으로서 파악하고 있었지만, 이 또한 무리수를 실무한의 관점에서 이해한 것으로 보기 어렵다. 학교수학에서 실수와 수직선 위의 점의 일대일대응을 형식적으로 수

용한 결과로서 도구적 이해에 의한 선택은 아니었는지 우려되는 바가 크다고 할 수 있다. 장차 학생들을 지도할 예비교사들은 무리수가 한 점에 계속 가까이 가지만 도달하지 못하는 값이 아니라 실무한의 관점에서 수직선 위의 점과 같은 하나의 대상이라는 내용지식을 가지고 있어야 할 것이다.

수학적 개념을 이해한다는 것은 그 개념이 나타내는 서로 다른 표현 체계에 내재된 아이디어를 인식할 수 있다는 것과 하나의 표현방식에서 다른 표현 방식으로 정확하게 번역할 수 있다는 것을 포함한다. 또한 학생들의 수학적 개념이 점점 발달하고 있다는 것은 관련된 표현 체계의 번역과 변환의 네트워크가 점점 복잡해진다는 것을 의미한다. 따라서 무리수 개념 지도는 무리수 정의와 표현의 관계, 다양한 무리수 표현의 이해, 무리수 표현간의 번역에 중점을 두어 지도되어야 한다. 즉 무리수 개념의 본질적인 이해를 위해서는 무리수 정의와 표현에 내포된 '통약불가능성'의 의미와 '비순환성'의 의미를 이해하고, 편향되지 않은 관점에서 다양하게 무리수 표현을 다룰 수 있으며, 표현 간의 번역이 자유로울 수 있도록 지도되어야 할 것이다. 이를 위해 앞으로 학생들을 가르쳐야 하는 예비교사로서 무리수와 관련된 무한소수 표현에 대한 관심과 깊이 있는 이해가 요구된다고 할 수 있다. 특히 본 연구에서 드러난 예비교사들의 무리수 개념에 대한 오류, 그리고 불충분한 내용지식을 바탕으로 예비교사교육을 위한 프로그램 개발에 기초자료로 활용할 것을 희망한다.

참고문헌

교육부(2007). 교육부 고시 제 2015-74호(별책 8) **수학과 교육과정**.

김부윤, 정영우 (2008). 중학교에서의 무리수 지도에 관하여. **한국수학사학회지, 21**(1), 139-156.

김영국 (2008). 수학적 표현의 교수학적 의의. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 47**(2), 155-168.

박달원 (2007). 무한소수에 대한 학생들의 이해. **한국학교수학회논문집, 10**(2), 237-246.

변희현(2005). **소수 개념의 교수학적 분석**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

이선비 (2013). 예비 중등 교사들의 무리수에 대한 이해, **한국학교수학회논문집, 16**(3), 499-518.

이영란, 이경화(2006). Freudenthal의 수학화 학습 지도론에 따른 무리수 개념 지도 방법의 적용 사례. **수학교육학연구, 16**(4), 297-312.

이지현 (2015). 유리수와 무리수의 합집합을 넘어서: 실수가 자명하다는 착각으로부터 어떻게 벗어날 수 있는가?. **수학교육학연구, 25**(3), 263-279.

장혜원 (1997). **수학학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구: 표상 모델 개발을 중심으로**. 서울대학교 대학원 박사학위 논문.

Arcavi, A., Bruckheimer, M., & Ben-Zvi, R. (1987). History of mathematics for teachers: The case of irrational numbers. *For the Learning of Mathematics, 7*(2), 18-23.

Cuoco, A. (Ed.). (2001). *The roles of representation in school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Fischbein, E., Jehiam, R., & Cohen, C. (1995). The concept of irrational number in high school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics, 29*, 29-4.

Janvier, C. (1987). Representation and understanding: The notion of function as an example. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp.

67-72). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lamon, S. J. (2001). Presenting and representing: From fractions to rational numbers. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 146-165). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lesh, R., Behr, M., & Post, M. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 41-58). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Principles and standards for school mathematics. Reston*, VA: The Author. 류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 공역 (2007). **학교수학을 위한 원리와 규준**. 서울: 경문사.

Peled, I., & Hershkovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integration: Revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*(1), 39-46.

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007a). Irrational numbers on the number line -where are they? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(4), 477-88.

Sirotic, N., & Zazkis, R. (2007b). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 65*, 49-6.

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and Defining Irrational Numbers: Exposing the Missing Link. *CBMS Issues in Mathematics Education, 16*. American mathematical Society.

Zazkis, R., & Gadowsky, K. (2001). Attending to transparent features of opaque representations of natural numbers. In A. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 44-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Pre-Service Teachers' Understanding of the Concept and Representations of Irrational Numbers

Choi, Eunah (Woosuk University)
Kang, Hyangim (Korea National University of Education)

This study investigates pre-service teacher's understanding of the concept and representations of irrational numbers. We classified the representations of irrational numbers into six categories; non-fraction, decimal, symbolic, geometric, point on a number line, approximation representation. The results of this study are as follows. First, pre-service teachers couldn't relate non-fractional definition and incommensurability of irrational numbers. Secondly, we observed the centralization tendency on symbolic representation and the little attention to other representations. Thirdly, pre-service teachers had more difficulty moving between symbolic representation and point on a number line representation of π than that of $\sqrt{5}$. We suggested the concept of irrational numbers should be learned in relation to various representations of irrational numbers.

* Key Words : irrational number(무리수), concept of irrational number(무리수의 개념) decimal representation(소수 표현), geometric representation(기하 표현), incommensurability(통약 불가능성)

논문접수 : 2016. 8. 10
논문수정 : 2016. 9. 13
심사완료 : 2016. 9. 13