*Journal for History of Mathematics*
Vol. 29 No. 5 (Oct. 2016), 267–278

http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2016.29.5.267

# Counting is an important ingredient of mathematics education

## 조합수학의 수학교육 내용요소로서의 적합성과 필요성

Koh Youngmee 고영미 Ree Sangwook* 이상욱

Mathematics is a kind of language, and even a tool of cognition for human beings. Mathematics has been used to communicate and to develop the civilizations through the history. So mathematics is one of the most important subjects for human to teach and learn. Especially, developed countries believe that mathematics will play very important roles in the developments of future industries and so future society. In this article, we clarify that combinatorics which is mainly represented by counting is an important ingredient of future mathematics education. To do so, we investigate the characteristics of combinatorics from the educational and cognitive perspectives.

*Keywords:* Mathematics Education, Cognition, Counting; 수학교육, 인지, 셈.

*MSC:* 05-01, 97A40, 97B20, 97C30, 97C70, 97K20

## 1 미래세대 수학교육의 변화의 필요성과 방향

새 천년이 되면서 세계 각국은 새 시대에 맞는 교육과정 개발에 힘을 쏟고 있다. 특히 격변하고 있는 미래산업을 고려할 때, 그에 걸맞는 수학교육의 변화도 불가피하다. 대표적인 예가 미국과 영국에서 실시되고 있는 STEM 교육이다.[1)] STEM은 각각 과학(Science), 기술(Technology), 공학(Engineering), 그리고 수학(Mathematics)을 의미한다.

STEM교육의 핵심 내용은, 새 천년의 시대에는 과학과 기술의 개발, 공학의 발전이 필요하며, 그를 실현시키기 위해서는 학생이 일찌감치 좋은 수학교육을 받을 수 있어야 한다는 것이다. STEM 교육을 학교교육에 적용하는 방법은 과학과 기술 및 공학을 소개하며 그에

*Corresponding Author.
Koh Youngmee: Dept. of Math., Univ. of Suwon E-mail: ymkoh@suwon.ac.kr
Ree Sangwook: Dept. of Math., Univ. of Suwon E-mail: swree@suwon.ac.kr
Received on Sep. 20, 2016, revised on Oct. 24, 2016, accepted on Oct. 26, 2016.

1) U.S. Department of Education , Science, Technology, Engineering and Math: Education for Global Leadership. http://www.ed.gov/stem
NRICH is part of the family of activities in the Millennium Mathematics Project. Refer to the University of Cambridge(http://www.cam.ac.uk). nrich.maths.org/stemnrich

필요한 수학을 교육시키는 것이다. 즉, 현실 세계에서 과학, 기술, 공학의 중요성을 강조하며 그것으로 수학교육에 대한 동기를 부여하는 것이다. 예를 들면, 케임브리지 대학이 운영하는 NRICH(enriching mathematics) 프로그램은 화학, 생물학, 천문학, 공학 등을 잘 이해하기 위해서 수학이 큰 도움이 된다는 사실을 강조하고 있다.[2] 그 외에도 케임브리지 대학은 「새천년 수학 프로젝트(Millennium Mathematics Project)」를 운영하며 수학교육을 진흥하고 있다 [24].

미래세대를 위한 수학교육은 미래산업의 변화가 배경이 되어야 하며, 그래서 수학교육 내용요소의 선택에도 그러한 배경이 내포되어야 한다. 즉, 과학의 발전, 기술의 개발, 공학의 진보를 위한 실용적 수학이 교육 내용요소로 포함되어야 한다는 것이다. 우리나라도 수학·과학교육에 있어서 미국과 영국의 사례와 유사한 변화를 모색하고 있다. 한국과학창의재단이 진행하고 있는 「미래 세대를 위한 과학교육표준 개발 프로젝트」가 그러한 예다.[3]

본 논문은 실용적 수학교육의 고려할 만한 내용요소로서 셈(counting)으로 대표되는 조합수학[4])을 지목한다. 특히 미래세대의 수학교육을 위한 학습 내용요소로서 조합수학을 강조한다. 조합수학은 2000년을 전후한 반세기 동안에 빠르게 발전을 거듭하여 수학 전분야에 걸쳐 영향을 미치며 [3, 12, 13], 컴퓨터과학과 정보과학의 바탕 학문으로 작용하고, 특히 조합수학에서 다루어지는 수학적 아이디어는 최근의 빅데이터(big data)와 알파고(AlphaGo)로 유명해진 인공지능(artificial intelligence)에 따른 미래 산업구조의 변화에도 적용 가능하다. 본 논문은 조합수학이 가지는 의미와 수학적, 교육적 속성을 살펴보며 그것이 미래세대의 수학교육 내용요소로 적합함을 살펴본다.

## 2 수학교육의 의미

### 2.1 수학이란?

수학은 무엇일까? 이러한 질문은 포괄적이고 일반적이어서 꼭 이렇다 할 만한 정답은 따로 없다. 하지만 수학은 오래 전부터 실생활 문제를 해결하는 수단이기도 했고, 세상을 인식하는 인류의 인지활동이기도 했다. Peter Watson 의 거작 「생각의 역사」[5]나 Charles Lincoln

---

2) NRICH 프로그램의 웹페이지 nrich.maths.org/stemnrich는 Maths Meets Chemistry, Maths Meets Biology, Astronomy for Beginners, Maths Explores the Planet, Engineering for Beginners 등의 배너를 보여주며, 수학을 강조한다.

3) The Science Times, 미래세대 과학표준 2017년 완성. http://www.sciencetimes.co.kr/ (July 17, 2016)

4) 조합수학(combinatorial mathematics/combinatorics)은 연속수학에 대비되는 이산수학(discrete mathematics)을 의미하기도 하고, 이산수학에 속한 수학 분야를 의미하기도 한다. 본 글에서는 셈(counting)으로 대표되는 조합론(combinatorics)과 연결 구조를 이해하는 수단인 그래프이론(graph theory) 정도를 조합수학으로 부르기로 한다.

5) 피터 왓슨 지음, 남경태 옮김, 생각의 역사 1,2, 들녘, 2009.

Van Doren 의 「지식의 역사」[6]에도 수학은 핵심 내용 중 하나로 포함된다. Yuri Ivanovitch Manin 도 수학을 지식을 만들어내는 수단과 도구로 설명하였다 [16]. 더 나아가, Lakoff 와 Núñez 는 수학이 곧 정신세계의 표현임을 지적하였다 [10].[7]

수학은 그 자체로 긴 역사를 가지고 있고, 의미도 시대의 변천에 따라 변화했다. Keith J. Devlin 은 [5] 에서 시대에 따른 수학의 의미를 이야기했으며, 미래의 수학, 즉 2100년의 수학이 어떠할지도 설명하였다. 예를 들면, 기원전 500년의 수학은 수의 체계적인 사용방법 및 결과였고, 이후 300년 정도까지의 그리스 수학은 수와 형태의 성질 연구로 이해됐다. 또, 뉴턴과 라이프니츠 이전까지의 수학은 정적인 셈과 측정과 형태의 기술 등이었다면, 이후로는 연속적 운동과 변화에 대한 탐구였다. 이 당시의 수학은 물리학과의 공조를 이루기도 했으나, 18세기 중반에 들어서면서 수학은 그 자체로 관심 및 연구의 대상이 되었고, 19세기가 끝나갈 무렵에 수학은 수와 형태, 운동과 변화, 그리고 형식논리와 확률 등 그 범위를 쉽게 기술할 수 없을 정도로 확장되었다. 그러면서 1980년대에 이르러, 수학은 대개 「패턴의 과학」으로 인식되었다 [5]. 예를 들면, 수와 셈의 패턴의 과학이 산술이며, 형태의 패턴을 다루면 기하학, 운동과 변화의 패턴을 다루면 미분적분학, 추론의 패턴을 다룬 것이 논리이며, 위상의 패턴에 대한 수학이 곧 위상수학이다. 즉, 패턴의 종류에 따라 수학의 분야가 형성된다.

수학은 학문 자체로 끝나는 것은 아니고, 실생활이나 과학과 기술의 개발 등에도 응용되고 사회적 현상에 대한 분석 수단을 제공하기도 한다. 이와 같은 수학의 응용은 수학적 모델링 또는 수학화를 통하여 이루어진다. 수학화(mathematising)는 수학적 개념, 아이디어, 구조 등을 포함하는 수학적 수단에 의해 현실의 경험을 조직하거나 수학적 개념을 체계화시켜 가는 것으로서, 현실이 출발점이 되어 이상화·단순화 과정을 통해 문제 상황의 비본질적인 것을 제거하고 본질을 이해하는 활동으로, 소음이 포함된 현상 가운데에서 현상의 본질을 찾아 조직화해가는 과정이다 [19].

## 2.2 수학은 언어이자 인지활동

수학이 언어라는 주장은 이미 보편화된 사실이다. Paul R. Halmos 도 수학을 언어로 이해하기를 주저하지 않았다 [8]. 언어는 사고를 가능케 하는 기본 수단이다. 또한 사고가 가능해야 인지활동도 가능해진다. 그런 의미에서 언어는 인지 수단이기도 하다. 수학이 과학의 언어라면 과학적 사고와 과학적 현상에 대한 인지는 수학을 통하여 가능해진다. 수학의 언어적 효과가 경이적임은 1960년대 Eugene P. Wigner 가 이미 했던 주장이기도 하다 [25].

1963년에 노벨 물리학상을 수상한 Wigner 의 주장은 이미 고전이지만 [27], 지금도 그의

6) 찰스 밴 도렌 지음, 박중서 옮김, 지식의 역사: 과거, 현재 그리고 미래의 모든 지식을 찾아, 갈라파고스, 2010.

7) Mathematics is deep, fundamental, and essential to the human experience. ... Rather, it lies in human ideas. — [10] 의 Preface 중에서

말을 돌아볼 가치는 충분하다. 그는 수많은 개념들을 정의하고 있는 수학이 모순의 늪에 빠지지 않는 것이 기적이며, 복잡하기만 한 자연현상 속에서도 규칙이 존재함을 찾아낼 수 있음이 기적이라고 말한다. 그러면서 물리법칙의 구성을 수학이라는 언어로 표현할 수 있는 기적같은 사실이 인류에게 주어진 선물이라고 결론을 내린다.[8)]

이와 같이, 수학은 언어적 기능을 가져 Blaise Pascal 이 사람을 생각하는 갈대로 비유하였듯이 인류에게 생각할 수 있는 능력을 부여한다. 그리고 자연현상을 수학으로 표현하였을 때 새로운 물리법칙에 대한 인지가 일어났다는 Wigner 의 설명에서 보듯이, 수학은 또한 하나의 인지활동이기도 하다. 사실, 수학이 인지활동의 주요 자리를 차지함은 현대수학과 응용수학을 자세히 들여다보면 쉽게 이해할 수 있다 [1, 4, 6, 7, 9, 18].

## 2.3 미래사회와 수학

미래사회는 어떻게 변화할까? 이미 세계 선진국들은 산업 형태에 있어 거대한 변화를 보이고 있고, 인터넷을 기반으로 한 지식정보사회는 빅데이터와 인공지능이라는 화두를 가지고 또다른 새로운 산업 모델을 창조하려는 시도에 몰두하고 있다. 또한 로봇의 사용은 산업사회를 넘어 대중성을 넘보기 시작했다는 보고가 있다.[9)] 그러나 선진국은 이러한 모든 미래산업의 변화는 수학의 지원이 필요하다고 믿고 있다. 그로 인하여 수학을 교육해야 함이 정책화된 결과가 STEM 교육이다.

이는 최근 활성적 논의가 일고 있는 「제4차 산업혁명 (Industry 4.0)」[10)]과도 연결된다. 4차 산업혁명이란 정보통신기술 (ICT) 의 발전과 맞물려 발생하는 기술의 융합에 의한 자동화와 네트워크화에 의한 차세대 산업의 변화를 의미한다. 여기에서 언급되는 정보통신기술은 미래창조과학부 미래준비위원회가 발행한 미래이슈분석보고서[11)]에서 미래에 개발해야할 핵심기술로도 언급된다. 핵심기술은 줄기세포, 유전공학/분자생물학과 같은 생화학 분야와 분자영상, 나노소재 등의 나노기술, 온실가스와 신재생에너지 등의 환경과학, 원자력 에너지와 우주개발 등의 물리학과 천문학 등이 포함되어 있지만, 빅데이터, 인공지능을 포함하여 사물인터넷, 가상현실, 3D 프린터, 웨어러블 디바이스 등 정보통신기술도 포함한다.

8) The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure, even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning [25].

9) 로봇이 음식 나르면, 식당 서빙은 사람이 `http://news.chosun.com/site/data/html_dir/2016/09/05/2016090500146.html` (2016.09.05)

10) 정보통신기술센터, 주요 선진국의 제4차 산업혁명 정책동향, 해외 ICT R& D 정책동향 2016-04호. `www.next-it.co.kr/board/actFileDown.html?Thread=388`
한국정보화진흥원, 인더스트리 4.0과 제조업 창조경제 전략, IT & Future Strategy 제2호 (2014). `www.nia.or.kr/`

11) 미래창조과학부 미래준비위원회, 미래이슈 분석보고서, 미래창조과학부, 2015. `http://www.msip.go.kr/web/msipContents/contentsView.do?cateId=mssw311&artId=1271205`

4차 산업혁명에 대처할 미래 핵심기술은 새로운 가치의 창달을 이루어낼 수 있는 창의력, 정보를 조직하고 지식을 창출할 수 있는 전문성, 새로운 문제의 창출과 그의 해결을 도모할 수 있는 문제해결력을 요구한다.

조벽 교수도 글로벌 시대에 인재가 갖추어야 할 역량으로 창의성과 전문성, 그리고 인성을 강조하였는데,[12) ]「전문성」은 단순히 충분한 전문지식을 지녔다는 의미보다는 전문 분야를 파고들어 실력을 발휘할 수 있는 능력을 의미한다. 이때 미래 핵심기술의 발전을 도모하기 위한 전문성의 확보에 수학의 사용이 한 요소로서 요구된다.

수학은 그 자체로서도 중요하지만, 응용도 매우 중요한 수학의 기능이다. 수학은, 괴델의 불완전성 정리[13)]가 있기는 하지만, 거의 완벽한 자체적 무모순성을 확보하고 있는 논리체계이다. 특히 수학만이 가지는 장점이 과정을 중시하는 연역논리를 제공한다는 점이다. 이것으로써 컴퓨터과학이나 정보통신이론의 기반이론을 제공하며, 수학화를 통하여 다양한 과학과 기술의 발전과 창출을 도모할 수 있다. 수학이 응용되어 새로운 기술이 개발되고 창출된 다양한 사례들은 미국수학회(American Mathematical Society)가 제공하는「수학이 필요한 순간들」[14)] 과 미래의 수학을 설명하는 저서 [6], [9], [18] 등에서 쉽게 찾아볼 수 있다.

## 2.4 학교 수학교육과 그의 목표, 그리고 인지능력의 성장 원리

교육은 무엇인가? 사람은 태어나는 것만으로 생존능력을 가지지 못하기 때문에 교육을 통하여 생존능력을 갖추게 된다. 다시 말해 교육은 인류의 생존을 위한 필수불가결한 활동이다. 교육의 내용은 다양하지만, 교육학은 대개「무엇을 가르칠 것인가?」와「어떻게 가르칠 것인가?」를 핵심문제로 다룬다. 결국 수학교육의 핵심도 수학의 무슨 내용을 어떻게 가르칠 것인가가 될 것이다. 그러나 교육 또는 수학교육의 목표는 무엇인가? 목표가 없는 교육은 결국 의미없는 활동일 뿐이다. 그러므로 우리는 수학교육의 목표를 뚜렷하게 인지하여야만 한다.

교육이 생존을 위한 활동이라고 했듯이, 교육은, 영국의 역사학자 Arnold Joseph Toynbee의 명저「역사의 연구(A Study of History)」에서 인류의 역사를「도전과 응전(chanllenge and response)」으로 표현하였듯이, 문화와 문명 그리고 환경의 변화에 대한 응전을 위한 노력이라고 볼 수 있다. 이러한 교육은 피교육자와 교육 내용의 수준에 따라 단계적으로 이루어진다. 예를 들어, 교육의 단계를 학교교육과 대학교육으로 크게 나누어 볼 수 있다. 그러면 학교교육과 대학교육의 목표는 무엇이겠는가?

교육의 이유는 학교교육이나 대학교육이나 생존을 위한 활동으로 같겠지만, 그들의 목표는

12)「인재혁명」의 저자 조벽 교수가 말하는 '글로벌 시대의 인재', 중앙일보, 2011.04.06. http://news.joins.com/article/5304889

13) https://en.wikipedia.org/wiki/Gödel's_incompleteness_theorems

14) Mathematical Moments http://www.ams.org/samplings/mathmoments/mathmoments. 대한수학회(http://www.kms.or.kr)에서「소식/자료」로 들어가「수학이 빛나는 순간」을 선택.

다르다고 여겨진다. 학교교육은 학생들을 사람다운 사람으로 만드는 것이며, 대학교육은 사회가 필요로 하는 인재 또는 전문가로 성장시키는 것이 목표가 될 것이다. 즉, 대학교육은 산업사회의 요구에 따른 인재 양성을 위한 전문지식을 확장시키고 다음 세대로 전달함을 목표로 삼겠지만, 육체적 성장을 하면서 정신적으로 사춘기를 겪게 되는 학생들을 교육하는 학교교육은 지식의 전달보다는 학생 자신의 정체성을 확립시키고 사회와 그의 질서체계를 인식시키며 학생 자신의 사고체계를 정립할 수 있는 교육을 제공함이 목표가 되어야 할 것이다. 특히 수학은 과정을 중시하는 연역논리를 가르칠 수 있는 교과목이기에 학교교육의 필수 교과목이며, 그의 교육을 통하여 학생들은 자신의 논리적 사고체계를 확립하게 된다.

그러므로 현재의 지식의 전수만을 고집하는 학교교육의 교육방법은 창의성을 요구하는 4차 산업혁명과 같은 사회 및 산업구조가 격변하는 새 시대를 맞이하여 전환이 필요하다. 결국 학교수학교육 또한 교육방법의 전환을 요구받고 있는 것이다. 예를 들면, Francis Su는 [23]에서 수학교육의 가장 중요한 목표가 사고력의 개발 또는 사고체계의 정립임을 말하기 위하여 Poincaré의 말을 인용하였다.[15) ] 그는 또한 수학이 흥미진진하며 생명력이 있는, 학생들이 즐길 수 있는 대상임을 느낄 수 있게 하고자 10개 항목의 교육방법을 강조하였다. 즉, 수학교육을 위한 수학은 학생들의 흥미를 이끌어낼 수 있어야 한다. 실제로, 이만근은 수학의 역사를 소개하고 수학자의 삶을 찾아보는 것만으로도 충분히 학생들의 흥미를 이끌어낼 수 있음을 보여주었다 [11].

여기서 우리는 잠깐「인지능력의 성장 원리」[15]를 언급하고자 한다. 즉, 한 사람의 어떤 대상에 대한 인지는 대체적으로 대상에 대한 정보의 수용, 그리고 자신의 생각과 감정에 의한 적응, 그래서 대상에 대한 인식이 확고해지기까지의 완성, 그리고 어느 정도 확고해진 인식의 활용 등의 4단계를 거친다. 수학교육에서도 이와 같은 인지능력의 성장원리를 적용한 교육방법이 실시되어야 할 것이다. 이때 인식 대상에 대한 흥미가 자연스럽게 수용 단계에서 적응 단계로 넘어가는 진행을 돕는다. 결국 수학교육도 학생이 흥미를 가지고 스스로 문제를 해결하면서 새로운 자신만의 지식을 구성해가는 창의성을 기를 수 있는 기회를 제공해야만 하는 것이다. 이것이 학생으로 하여금 자기 지식의 창출과 자기 생각의 내면화[16) ]를 통해 수학과 지식을 구성해나갈 수 있도록 창의성과 전문성을 배양시켜주는 수학교육이 가져야 할 속성이다 [2, 10].

---

15) The principal aim of mathematical teaching is to develop certain faculties of mind, and among them intuition is not the least precious. It is through it that the mathematical world remains in contact with the real world. — Poincaré, *Science and Method* (1908).
It is by logic that we reason, it is by intuition that we discover. — Poincaré, *Mathematical Definitions in Education* (1964).

16) 국지영, 평가가 바뀌어야 수업이 바뀐다, 수학과 교육 117(2016년 7·8월), 전국수학교사모임, 22–27. 조벽 교수의「인재혁명」을 인용하며, 미국 유명 대학에 입학한 한국 학생들의 실패 이유로 영어도 잘 하며 알려준 지식의 기억과 조합 능력은 출중하지만, 새로운 지식을 창출하고 자기만의 생각으로 내면화하는 능력의 부족을 들고 있다.

카네기멜론 대학 교수 John R. Anderson 의 최근 연구[17]에 따르면, 수학 문제와 같은 지능을 사용해야 하는 문제를 풀 때 우리의 뇌는 4 단계의 활동을 한다고 한다. 즉, 문제 해결을 위한 부호화(encoding, downloading), 계획(planing, strategizing), 해결(solving, performing the math), 반응(responding, typing out an answer) 단계가 실행된다는 것이다. 이는 George Pólya 의 「문제해결 전략」[18]과도 어느 정도 맞아떨어지며, 인지능력의 성장 원리에도 합당한 설명이기도 하다 (Table 1 참조).

| | 1단계 | 2단계 | 3단계 | 4단계 |
|---|---|---|---|---|
| 뇌의 활동 | 부호화 | 계획 | 해결 | 반응 |
| 문제해결 | 문제의 이해 | 해결 전략의 계획 | 계획의 실행 | 반성 |
| 인지능력의 성장 | 수용 | 적응 | 완성 | 활용 |

Table 1. Comparison of the actions of brains, the procedures of problem solving, and cognitive development; 뇌의 활동과 문제해결과정 및 인지능력의 성장과정의 비교

## 3 미래 수학교육 학습내용으로서의 조합수학

### 3.1 조합수학과 그의 특성

셈(counting)으로 대표되는 조합수학(combinatorics)[19]은 수학의 한 분야로서 주로 유한 집합에 대한 정보와 그러한 정보를 얻는 방법론에 대한 연구이다. David R. Mazur 는 조합수학을 유한 집합과 관련하여 집합의 크기를 구하고 어떤 대상 또는 구조의 존재를 밝히거나 찾고 어떤 양상(configuration)의 구성과 최적화 등에 관련된 수학으로 정의하고 [17], Robin Wilson 은 어떤 대상들을 선택(selecting), 배열(arranging), 구성(constructing), 분류(classifying), 셈(counting)하고 목록 작성(listing)을 하는 활동과 관련된 수학으로 설명하였다 [26].

조합수학은 1970년대 이후로 급성장을 하면서 수학 전반에 걸쳐 영향을 미치게 되었다 [13]. 조합수학의 발전에는 많은 사람들의 기여가 있었지만 특히 Paul Erdős 의 영향이 컸다.[20] 조합수학과 관련된 문제의 해결로 1998년에 Timothy Gowers가, 2006년에 Terence Tao가

17) Benedict Carey, What your brain looks like when it solves a math problem, *New York Times*, 2016. 7. 28. `http://www.nytimes.com/2016/07/29/science/brain-scans-math.html?_r=0`. 이철재, 수학 문제를 풀 때 당신의 뇌 속에선, 중앙일보, 2016. 7. 30. `http://news.joins.com/article/20378961`

18) `https://en.wikipedia.org/wiki/How_to_Solve_It`

19) 앞에서도 언급하였듯이, 학교수학을 논하는 본 글에서 조합수학은 조합론(enumerative combinatorics)과 그래프이론(graph theory)으로 한정한다. `https://en.wikipedia.org/wiki/Combinatorics` 참조.

20) Paul Erdős(1913–1996)는 헝가리 출신 수학자로 랜덤그래프와 확률론적 방법론의 창시자로 유명하며, 많은 수학자들과 수많은 공동작업으로 인하여 Erdős Number가 생겨났고, 심지어 Euler에 비견된다. `https://en.wikipedia.org/wiki/Paul_Erdős`

Fields Medal을 수상했으며 [3], 2012년에는 Endre Szemerédi가 Abel상을 수상하였다 [21].

Peter J. Cameron은 「3번째 천년을 맞이하는 조합수학」이란 글에서, 컴퓨터와 정보통신기술의 발달로 인하여 조합수학이 자체적인 발전뿐만 아니라 다른 수학분야와의 연계가 강화되고 심지어 사회적 변화에도 영향을 미쳤다고 한다 [3]. 조합수학의 특성과 수학 내의 다른 분야뿐만 아니라 생물학, 경제학, 물리학, 컴퓨터과학 등의 다양한 전문 분야와의 연계 등에 관한 보다 자세한 설명은 [12, 13, 17, 26]을 참조한다.

조합수학은 일반적인 현대수학이 담고 있는 공리체계적 구조에 대한 이해를 크게 요구하지 않으며, 이론적이라기보다 실험적이고 알고리즘적이어서 가시적 효과를 내포한다 [13]. 그러므로 조합수학은 활동과 경험에 기인한 사고체계의 확립에 도움을 주며, 특히 문제의 이해가 쉬어 흥미 유발에 도움을 주며 놀이와도 같은 학습내용을 제공한다 [20, 23]. 이러한 조합수학에서의 탐구활동은, Erdős가 보여주었던 것처럼, 다양한 수학적 사실에 대한 문제제기와 추측을 가능케 하는 창의적 사고에 영향을 준다.

Lakoff와 Núñez는 뇌와 사고활동이 연계되어 있고, 뇌는 운동과 공간의 이해 등의 다양한 사고활동에 감정, 언어, 추론뿐만 아니라 시각적으로도 상당한 영향을 받는다고 한다 [10]. Michael Atiyah도 모든 수준의 인지활동에 시각이 주는 효과가 대단함을 지적하였다 [1]. 결국 수학교육에서도 시각적 효과를 노릴 수 있는 수업형태가 제공되는 것이 바람직하다. 그런데 조합수학이 그러한 환경을 제공한다. 즉, 조합수학이 학교수학에서 훌륭한 교육 효과를 낼 수 있는 학습요소가 될 수 있음을 의미한다.

### 3.2 셈의 교육학적 의미와 중요성

교육은, 특히 학교교육은, 학생들의 사고체계를 확립시켜줌에 있다고 지적하였다. 그래서 수학교육은 연역논리를 제공하는 교과목으로서 창의성과 전문성을 배양시킬 수 있는 학습내용을 제공하여야만 한다. 공식이나 지식의 단순 적용에 의한 문제해결이 아니라 학생 자신의 생각과 판단 및 분별에 의한 시행착오를 거치는 경험에 의한 문제해결로, 학생의 창의적 사고체계를 정립할 수 있도록 학습내용이 제공되어야 한다.

한 때, 사람의 창의력이나 지능은 IQ 하나만으로 평가되었었다. 그러다가 1983년에 Howard Gardner가 다중지능[21)]을 주창하며 사람의 지능에 대한 인식에 변화가 일었다. 그 후 다시 Robert J. Sternberg가 환경의 변화에 적용하며 자신의 능력을 발휘할 수 있는 성향을 나타내는 「성공 지능(successful intelligence)」을 주창하였다 [22]. 성공지능은 Sternberg가 처음 주창하던 1985년에는 「삼원지능(triarchic intelligence)」으로 불리었으나, 학술적 의미의

21) Howard Gardner https://en.wikipedia.org/wiki/Howard_Gardner Theory of multiple intelligences https://en.wikipedia.org/wiki/Theory_of_multiple_intelligences

지능이론이 아니라 환경을 수용하고 적응하며 응전하여 성공을 이끌어내는 실증적 능력으로 이해되어 성공지능이라는 이름으로 개명되었다. 성공지능은 분석능력, 창의력, 실천력으로 구성된다.[22] 이때 Sternberg 가 말하는 분석능력은 분석, 평가, 판단, 비교, 대조 등의 작업 수행능력을 의미하여 다분히 수학적이다. 이러한 분석능력은 Wilson이 조합수학의 활동으로 명시한 선택, 배열, 구성, 분류, 셈과 목록 작성 등의 활동으로 배양할 수 있다.

우리가 언어를 구사할 때는 사용 단어와 용어의 의미와 활용법을 정확하게 알아야 한다. 수학에서도 정의가 중요하고 그 의미 또한 중요한 이유다. 수학이 언어로 활용될 때의 수학의 기본 활용방법은 계산이고, 계산의 기본은 「셈」이다. 「셈」은 「세기 (counting)」와 「헤아리기 (understanding)」의 의미로 사용된다. 더 나아가 조합수학에서의 수학적 활동들을 의미하기도 한다. 이러한 셈이라는 수학적 활동의 수학에서의 중요성은 이미 잘 알려져 있다.[23] 특히 셈으로 대표되는 조합수학은 유한 집합을 대상으로, 아니 그보다는 집합의 원소들을 대상으로, 다양한 분석능력을 함양할 수 있는 수학적 활동들을 수행할 수 있도록 해준다. 앞에서 미래세대에서의 수학의 중요성으로 수학의 언어로서의 기능과 인지활동으로서의 기능을 강조한 바 있는데, 조합수학이 이러한 기능을 함양할 수 있도록 도와 준다. 특히 미래세대의 교육에서 강조하는 코딩 (프로그래밍) 에 사용되는 연역논리와 수학적 귀납논리에 의한 알고리즘의 구조, 그리고 빅데이터로 대표되는 자료처리를 위한 귀납논리의 기초적 이해를 돕는다.

이미 학교수학의 학습내용이 공식들로 가득 차 학생의 사고력 증진에 크게 도움을 주지 못한다면, 적정 수준의 조합수학을 미래세대 수학교육의 학습내용으로 제공하여 학생들의 흥미를 북돋우어주며 놀이를 하듯 자신의 생각과 판단에 따른 시행착오를 겪어가며 논리적, 창의적 사고력을 배양할수 있도록 함이 바람직하다.

## 4 결론

크로네커가 「신이 인류에게 자연수를 주었고, 그 외의 모든 것은 인류가 일구어낸 업적」이라는 말을 하였다. 여기서 「자연수」는 무엇을 의미할까? 그 의미에 대한 해석은 다양하겠지만, 「자연수」는 아담과 이브가 선악과를 따먹음으로써 갖게된, 인류가 신으로부터 부여받은 「판단능력」을 의미한다는 생각이 든다. 그렇게 이해했을 경우, 크로네커의 말은 결국 인류가 판단능력을 활용하여 인류만의 문명을 이루었음을 의미한다.

자연수로 표현된 인류의 판단능력은 「셈」이라고도 말할 수 있지 않을까. 그런 의미에서

22) 'Successful intelligence' is defined as the ability to balance the needs to adapt to, shape and select environments in order to attain success, ...... As the name 'triarchic theory' suggests, three aspects of intelligence are involved: analytic, crdative and practical. [22]

23) John B. Fraleigh 는 그의 저서 「A First Course in Abstract Algebra (7th edition, Addison Wesley, 2003)」의 180쪽에서 「Counting is one of the most powerful techniques in mathematics.」, 그리고 186 쪽에서 다시 「Counting arguments are often simple, but they are among the most powerful tools of mathematics.」라고 말하며 셈의 중요성을 강조하였다.

새로운 창의적 사고력을 요구하는 새천년에 필요한 미래세대 수학교육의 학습내용으로 조합수학을 손꼽아볼 만하다. 이는 Wilson 의 말에 따른 조합수학의 속성인 선택, 배열, 구성, 분류, 셈, 목록작성 등의 학생들의 활동을 유도할 수 있으며, 이는 Sternberg 의 삼원지능, 즉, 성공지능의 분석능력, 창의력, 실천력에 해당하는 내용을 담고 있다. 특히, 정보화 시대에는 자료의 분석과 종합을 통하여 유용한 정보를 추출하고 그럼으로써 자신만의 지식을 창출할 수 있으며, 정보의 교환과 자기 지식의 정보화를 할 줄 알아야 하는데, 조합수학이 제공하는 학습활동이 그러한 능력을 훈련시킨다. 또한 그러한 과정을 통하여 논리적, 창의적 사고력이 배양될 뿐만 아니라, 상황의 서술로 주어지는 조합수학의 문제들에 대한 이해의 과정으로부터 과학적 글쓰기와 같은 역량 또한 배양이 가능하다.

이상의 논의에서 우리는, 산업과 삶의 형태와 내용이 혁신적으로 변화하고 있는 미래사회에서 성공적 역량을 갖춘 인재로 자라나기에 필요한 학교수학교육의 학습내용 요소로 조합수학이 적절한 기능을 가졌음을 알 수 있다. 김정희는 자신의 책「소설처럼 아름다운 수학이야기」의 프롤로그에서 '수학은 마음에서 나오는 것이니까요.' 라며 수학 속에 담긴 정신을 강조하였다.[24) ] 사실 수학이 인간 뇌의 인지작용에 의한 개념화라는 Lakoff 와 Núñez [10] 의 말을 빌지 않더라도 수학은 사고체계를 훈련하기에 좋은 대상임은 분명하다. 그러한 수학 중에서도 시각적 효과를 다분히 사용할 수 있는 조합수학이 미래세대를 위한 수학교육의 학습요소로 적당함은 상당히 타당해보인다.

그러나 조합수학에서 다루어지는 문제가 이해는 쉽지만 풀이가 매우 어려운 경우도 많아, 학생들의 도전을 야기시킬 수 있는 장점이 있는 한편, 교육내용으로 합당치 않을 수도 있음에 유의하지 않을 수 없다. 그러므로 조합수학이 학교수학의 학습내용으로 제공해야 할 구체적 학습내용요소에 대한 향후 연구가 앞으로 꼭 선행되어야 할 것으로 사료된다. 특히, 미래세대의 인재를 구축하는 일이기에, 그래서 국가의 경쟁력을 확보하고 국민의 삶의 질을 향상시키는 일이기에, 충분한 전문인력과 재정적 지원, 그리고 충분한 연구 시간을 제공해야 할 것이다.

## References


1. Michael Atiyah, Mind, Matter, and Mathematics. https://edoc.bbaw.de/files/23/09_Atiyah.pdf 이상욱, 고영미 번역, 생각과 물질 그리고 수학 - 아티야, *Proceedings of the Korean Society for History of Mathematics* 25(2) (2015), 81–91.
2. William Byers, *How Mathematicians Think*, Princeton University Press, 2007. http://press.princeton.edu/titles/8386.html
3. Peter J. Cameron, Combinatorics entering the third millennium, draft (2001). http://www.maths.qmul.ac.uk/~pjc/preprints/histcomb.pdf


24) 수학 속엔 분명 아름다운 정신이 숨어 있습니다. ······ 수학은 영감을 기다리는 예술 분야와 다르지 않으므로 항상 열린 맘으로 많은 것을 받아들여야 합니다. ······ 수학은 마음 속에서 나오는 것이니까요. — 김정희, 소설처럼 아름다운 수학이야기 [14] 프롤로그 중에서

4. Jean-Pierre Changeux, Alaine Connes, *Conversations on Mind, Matter, and Mathematics*, Edited and Translated by M. B. DeBevoise, Princeton University Press, 1996. https://books.google.co.kr/books?isbn=0691004056
5. Keith Devlin, What will count as mathematics in 2100? https://web.stanford.edu/~kdevlin/Papers/Math_in_2100.pdf
6. Engquist, Björn, Schmid (Eds.), *Mathematics Unlimited - 2001 and Beyond*, Springer, 2001. http://www.springer.com/la/book/9783642631146
7. Timothy Gowers (Ed.), *The Princeton Companion to Mathematics*, Princeton University Press, 2008.
8. Paul R. Halmos, Mathematics as a Creative Art, *American Scientist* 56 (1968), 375–389. http://math.slu.edu/~srivastava/Halmos.pdf 고영미, 이상욱 번역, 창조적인 예술로서의 수학 - 헐모시, *Proceedings of the Korean Society for History of Mathematics* 25(2) (2015), 93–103.
9. Nicholas J. Higham (Ed.), *The Princeton Companion to Applied Mathematics*, Princeton University Press, 2015.
10. George Lakoff, Rafael E. Núñez, *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, 2000. http://www.cogsci.ucsd.edu/~nunez/web/FM.PDF, http://www.cogsci.ucsd.edu/~nunez/web/INTR-04.PDF
11. Lee Man Keun, Dong-A Ilbo, *Mathematical Odyssey of Professor Lee Man Keun*, 21C Books, 2013. 이만근, 동아일보 지음, 이만근 교수의 수학 오디세이 1 & 2, 21세기북스, 2013.
12. Christian Lenart, The Many Faces of Modern Combinatorics, preprint. http://www.albany.edu/~lenart/articles/combin1.pdf
13. László Lovász, One Mathematics. http://www.cs.elte.hu/~lovasz/berlin.pdf
14. Kim Jeong Hee, *Mathematical Story, Beautiful as a Novel*, The Dong-A Ilbo, 2013. 김정희 지음, 소설처럼 아름다운 수학이야기, 동아일보사, 2013.
15. Koh Youngmee, Ree Sangwook, Educational Meaning of the Nine Chapters, *The Korean Journal for History of Mathematics* 23(1) (2010), 25–40. 고영미, 이상욱, 구장산술의 방정식론의 교육학적 의미, 한국수학사학회지 23(1) (2010), 25–40.
16. Yuri Ivanovitch Manin, Ronald Wengenmayr, The Tool of Knowledges, *Max Planck Research* 1 (2009), 52–57.
17. David R. Mazur, *Combinatorics: A Guided Tour*, MAA Textbooks, 2010. http://www.maa.org/publications/books/combinatorics-a-guided-tour
18. National Research Council, *The Mathematical Sciences in 2025*, The National Academies Press, 2013.
19. Noh Sun Sook, Kim Young Soo, Kim Min Kyung, *Curriculum Development for Mathematics and Information Science in a Knowledge Based Society*, Ewha Womans University Press, 2003. 노선숙, 김영수, 김민경 편저, 지식기반사회의 수학· 정보과학 교육과정개발 기초 연구, 이화여자대학교 출판부, 2003. https://books.google.co.kr/books?isbn=8973005278
20. Siu Man Keung, Problem of Seven Light Bulbs — Some reflection on popularization of mathematics, entertainment versus the underlying mathematics, 2016, personal communication.
21. Arne B. Sletsjøe, Abel Prize Laureate 2012: Endre Szemerédi, Combinatorics. http://

www.abelprize.no/c54147/binfil/download.php?tid=54123

22. Robert J. Sternberg, Successful intelligence: finding a balance, *Trends in Cognitive Sciences* 3(11) (1999), 436–442.
23. Francis Edward Su, Teaching Research: Encouraging Discoveries, *The American Mathematical Monthly* 117(9) (2010), 759–769. https://www.math.hmc.edu/~su/leitzel/leitzel.pdf
24. Rachel Thomas, Millennium Mathematics Project: Bringing mathematics to life, *MSOR Connections* 4(3) (2004), 7–10. https://www.heacademy.ac.uk/system/files/msor.4.3g_1.pdf
25. Eugene Wigner, The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences, *Pure and Applied Mathematics* 13(1) (1960), 1–14. http://math.northwestern.edu/~theojf/FreshmanSeminar2014/Wigner1960.pdf
26. Robin Wilson, *Combinatorics, A Very Short Introduction*, Oxford University Press, 2016.
27. wikipedia, The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. http://math.northwestern.edu/~theojf/FreshmanSeminar2014/Wigner1960.pdf