

# T-S Fuzzy Model-based Sampled-data Observer Design for Detecting Internal Oil Leakage in Single-rod Hydraulic Cylinder: LMI Approach

Sung Chul Jee\*, Hyogon Kim\*\*, Jeongwoo Park\*\*, Mun-Jik Lee\*, Hyungjoo Kang\* and Ji-Hong Li\*

\*Marine Robotics R&D Division, Korea Institute of Robot and Convergence, Pohang, Gyeongbuk, Korea

\*\*Field Robotics R&D Division, Korea Institute of Robot and Convergence, Pohang, Gyeongbuk, Korea

## 편로드 유압실린더 내부 누유 검출을 위한 T-S 퍼지 모델 기반 샘플치 관측기 설계: LMI 접근법

지성철\* · 김효곤\*\* · 박정우\*\* · 이문직\* · 강형주\* · 이계홍\*

\*한국로봇융합연구원 해양로봇연구본부

\*\*한국로봇융합연구원 필드로봇연구본부

**KEY WORDS:** Oil leakage 누유, Fault detection 고장검출, Model-based observer 모델기반 관측기, Linear matrix inequality 선형행렬부등식,  $H_\infty$  performance  $H_\infty$  성능

**ABSTRACT:** This paper presents an internal oil leakage detection problem for a hydraulic single-rod cylinder. We derive the dynamics of the hydraulic cylinder as a state space model, and then design a T-S fuzzy model-based fault detection observer. We adopt an  $H_\infty$  observer design scheme so that the observer is robust against disturbance and relatively sensitive to the leakage fault. Sufficient design conditions are derived in the form of linear matrix inequalities. A numerical example is provided to verify the proposed techniques.

### 1. 서 론

수중 중작업용 ROV(Remotely operated vehicle)의 주요 구동부는 유압시스템으로 이루어진다(Lee et al., 2015). 유압시스템이 가지는 높은 출력 효율이 수중 케이블 매설과 같은 큰 하중을 요하는 작업에 적합하기 때문이다. 하지만 유압시스템은 잠재적으로 누유 고장의 가능성을 지니고 있으며 이는 시스템의 오동작을 일으키는 주원인이 된다. 특히, 육안으로 식별이 불가능한 내부 누유는 발생 직후 별 다른 이상 징후를 보이지 않기 때문에 방치될 가능성이 매우 높다. 만일 수중 작업 중 누유 고장이 방치되어 상호 연결된 주변 유압 장비의 이상동작을 유발한다면 주어진 임무에 실패할 뿐 아니라 인양 후 사후처리를 위한 높은 비용이 발생할 수 있다.

누유는 실린더 내부의 피스톤과 같이 동적 움직임이 빈번한 곳에서 주로 일어난다. 실린더 내벽과 피스톤 사이의 유막을 통해 자연 발생하기도 하지만 작동유 오염에 의한 피스톤 실

(Seal) 손상이 이상 누유를 유발할 가능성도 있다. 누유를 직접 계측할 수는 없으나 모델 기반의 해석적 방법을 사용하면 측정 가능한 압력, 로드(Rod) 이동거리등의 센서 신호를 피드백 받아 상태추정이 가능하다. 모델 기반 검출 기법은 상태추정오차로부터 여분(Residual)을 생성하고 적절한 판단 논리에 의해 고장을 검출하는 방법으로 이미 많은 연구에서 그 성능이 입증되었다(Guo et al., 2009; Jee et al., 2012; Liu et al., 2005; Wang et al., 2007).

최근 시스템 안정성 확보 및 유지 보수를 위한 비용 절감의 필요성이 대두됨에 따라 누유 검출을 위한 모델 기반 연구가 크게 주목을 받고 있다(Yao et al., 2014). 유압실린더의 강인 제어기 설계 기법에 대한 연구는 다양한 분야에서 수행되었으나 관측기 기반 고장 검출과 같은 모델 기반의 상태 추정 기법 연구는 그 중요성에도 불구하고 아직 개발이 많이 이루어지지 않았다(Alleyne and Liu, 2000; Yao et al., 1998; Yao et al., 2000).

유압실린더는 T-S 퍼지시스템으로 모델링 가능하다. T-S

Received 22 March 2016, revised 27 September 2016, accepted 7 October 2016

Corresponding author Sung Chul Jee: +82-54-279-0441, jeesch@kiro.re.kr

© 2016, The Korean Society of Ocean Engineers

It is noted that this paper is revised edition based on proceedings of Korean Marine Robot Technology Society 2015 Autumn Conference (Jee et al, 2015).

퍼지시스템은 퍼지 규칙의 후반부가 국부적 선형 방정식으로 기술되는 IF-THEN 규칙들의 컨벡스 조합으로 시스템 전역 동특성을 나타낸다. T-S 퍼지 모델을 사용하면 선형 관측기 설계 기법을 유압실린더와 같은 복잡한 비선형 시스템에 적용할 수 있다. 특히 편로드 실린더 모델은 양로드 실린더 모델에 비하여 시스템 차수가 높아 형태가 복잡하지만 T-S 퍼지 모델을 사용하면 IF-THEN 규칙의 전반부 변수를 하나 추가함으로써 시스템의 표현이 가능하다.

유압실린더의 내부 누유는 액츄에이터 방정식의 상태변수에 직접적으로 영향을 미치는 곱형(Multiplicative form) 고장으로 모델링된다. 고장에 대한 여분의 민감도를 나타내는  $H_\infty$  성능을 제시하기는 어려우나 외란에 대한  $H_\infty$  성능을 갖도록 관측기를 설계함으로써 고장에 대한 상대적 민감도를 높일 수 있다. 관측기의  $H_\infty$  성능을 기반으로 판단 논리를 적용하면 고장 검출이 가능하다(Jee et al., 2016).

본 논문은 유압 실린더의 내부 누유 검출을 위한 관측기 설계 문제를 다룬다. 관측기 설계를 위해 복잡한 비선형 방정식으로 표현되는 편로드(Single-rod) 실린더를 5차의 T-S 퍼지 모델로 표현하며 피스톤 실 손상에 의해 발생하는 이상 누유를 곱형 고장으로 모델링한다. 관측기 설계 조건은 선형행렬부등식 형태로 나타내며 제한한 관측기의 검출 성능과 강인 추종 성능을 검증하기 위해 모의실험을 보인다.

본 논문은 표준 표기법을 따른다.  $X = X^T < 0$ 는 음정행렬을 의미한다. 임의의 벡터  $x_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \in \{1, \dots, K\}$ 에 대하여  $\|x_k\| := \sqrt{x_k^T x_k}$ 는 유클리디안 놈을 의미하며  $\|x\|_{l_2} := \sqrt{\sum_{k=1}^K \|x_k\|^2}$ 는  $l_2$  놈을 의미한다. \*는 대칭행렬의 대각 전치요소이다.

### 2. 편로드 유압실린더

Fig. 1은 편로드 실린더와 움직이는 수레로 표현되는 부하질량을 도식화하여 나타낸 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 부하질량은 로드와 우측 끝단에 있고 실린더 좌우 챔버에서 피스톤을 밀어내는 힘의 차이에 의해 움직인다. 부하질량은 각 챔버에 걸리는 압력, 접촉 마찰력, 누유 등의 영향을 받는다. 유압실린더 동적 모델의 간단한 표현과 수식 전개의 편의를 위해 다음을 가정한다.

**가정 1** (Jee et al., 2015): 편로드 유압실린더 모델링을 위해 다음을 가정한다.

- (1) Fig. 1의 부하질량  $m$ 은 변하지 않는 상수이다.

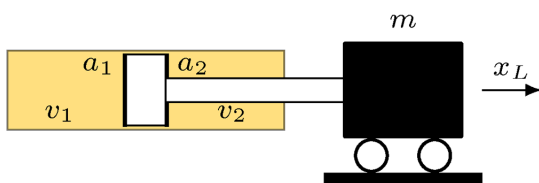


Fig. 1 Single-rod cylinder

- (2) 실린더의 각 챔버에 작용하는 유량의 유입, 토출 제어 입력력은 0이다.
- (3) 로드 실 손상에 기인한 외부 누유는 발생하지 않는다.
- (4) 유막을 경계로 접촉한 피스톤과 실린더의 표면 거칠기는 일정하다.
- (5) 작동유의 체적탄성률은 변하지 않는 상수이다.

위 가정을 기반으로 다음과 같은 유압실린더 동역학을 유도할 수 있다(Alleyne and Liu, 2000; Yao et al., 1998; Yao et al., 2000).

$$\begin{cases} m\ddot{x}_L = a_1 p_1 - a_2 p_2 - b\dot{x}_L - \delta(\dot{x}_L) + w \\ \frac{v_1}{\beta} \dot{p}_1 = -a_1 \dot{x}_L - (l_n + l_f)(p_1 - p_2) \\ \frac{v_2}{\beta} \dot{p}_2 = a_2 \dot{x}_L + (l_n + l_f)(p_1 - p_2) \end{cases} \quad (1)$$

여기서, 첨자 1과 2는 각각 실린더 내부의 좌, 우 챔버를 의미한다.  $m [kg] \in \mathbb{R}_{>0}$ 은 부하질량,  $x_L [m] \in \mathbb{R}$ 은 피스톤 이동 거리,  $a [m^2] \in \mathbb{R}_{>0}$ 는 작동유와 접촉한 램 단면적 크기,  $p [N/m^2] \in \mathbb{R}_{>0}$ 는 각 챔버의 내부 압력,  $b [kg/s] \in \mathbb{R}_{>0}$ 는 점성 마찰 계수,  $w [N] \in \mathbb{R}$ 은 모델링 되지 않는 유계된 비선형성과 외란,  $v [m^3] \in \mathbb{R}_{>0}$ 는 각 챔버의 부피,  $\beta [N/m^2] \in \mathbb{R}_{>0}$ 는 체적탄성률,  $l_n, l_f [m^5/Ns] \in \mathbb{R}_{>0}$ 는 각 챔버의 압력차에 의해 발생하는 공칭 누유 계수와 이상 누유 계수이다.  $\delta [N] \in \mathbb{R}$ 는 다음과 같이 비선형 방정식으로 표현되는 LuGre 마찰력이다(Yao et al., 2014).

$$\delta(\dot{x}_L) = \text{sgn}(\dot{x}_L)(F_C + (F_S - F_C)e^{-(\dot{x}_L/v_s)^2}) \quad (2)$$

여기서,  $F_C [N] \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $F_S [N] \in \mathbb{R}_{>0}$ 는 각각 쿨롱 마찰력, 정지 마찰력이며  $\text{sgn}(\cdot)$ 은 부호 함수,  $v_s [m/s] \in \mathbb{R}_{>0}$ 는 Stribeck 속도이다. 식 (2)의 속도-마찰력의 관계를 Fig. 2와 같이 나타낼 수 있다.

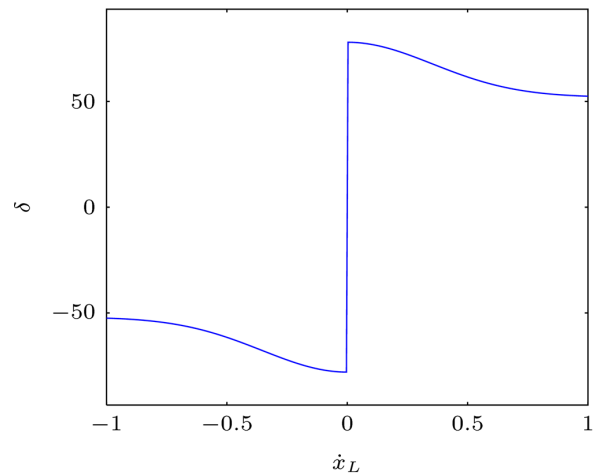


Fig. 2 Velocity-Friction Plot of LuGre Model ( $F_S = 78$ ,  $F_C = 52$ ,  $v_s = 0.5$ )

실린더의 상태 추정을 위한 수치 해석적 연산 속도는 변수들의 크기 변화에 의존적이다. 연산 속도의 개선을 위해 다음과 같은 스케일 변환된 새로운 변수를 정의한다.

$$\tilde{p}_1 := \frac{p_1}{s}, \tilde{p}_2 := \frac{p_2}{s}$$

여기서,  $s \in \mathbb{R}_{>0}$ 는 적절한 크기의 스케일링 팩터,  $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ 는  $p_1, p_2$ 의 스케일 변환된 값이다. 상태변수  $x$ 를 다음과 같이 정의하자.

$$x := (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_L, \dot{x}_L, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$$

각 챔버의 부피는 거리변화에 의존적인 변수이다. 피스톤의 초기 위치  $x_1 = 0$ 에서 좌, 우 챔버의 부피를 각각  $v_{1_0}, v_{2_0}$ 라고 한다면 이동 거리에 따른 각 챔버의 부피는  $v_1 = v_{1_0} + a_1 x_1, v_2 = v_{2_0} - a_2 x_1$ 이 된다. 식 (1)은 다음과 같은 4차의 상태방정식으로 쓸 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-bx_2 + a_1 s x_3 - a_2 s x_4 - \delta(x_2) + w) \\ \dot{x}_3 = \frac{\beta}{v_{1_0} + a_1 x_1}(-a_1 s^{-1} x_2 - (l_n + l_f)(x_3 - x_4)) \\ \dot{x}_4 = \frac{\beta}{v_{2_0} - a_2 x_1}(a_2 s^{-1} x_2 + (l_n + l_f)(x_3 - x_4)) \end{cases} \quad (3)$$

마찰력 추정을 위해  $\delta(x_2)$ 를  $x_5$ 로 치환하고 상태공간방정식에 마찰력 동역학을 포함한다. 식 (2)를 미분하면 다음과 같은  $x_5$  동역학을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta(x_2) = \dot{x}_5 &= \begin{cases} \frac{2x_2}{v_s^2} (F_C - x_5) \dot{x}_2, & x_2 > 0 \\ \frac{2x_2}{v_s^2} (-F_C - x_5) \dot{x}_2, & x_2 < 0 \end{cases} \\ &= \frac{2x_2}{v_s^2} (\text{sgn}(x_2) F_C - x_5) \dot{x}_2, \quad x_2 \neq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

위 미분방정식에서 정지 상태( $x_2 = 0$ )에서의 마찰 동역학은 정의되지 않는다. 실제로 정지마찰력은 가해지는 외력에 따라 변하므로 하나의 값으로 정의할 수 없다. 상태추정을 위한 수치 해석적 연산량은  $x_2$ 가 0을 지날 때 매우 높으며 이는 실시간 관측을 어렵게 만든다. 하지만  $x_2 \approx 0$ 일 때의 짧은 선형동작 영역을 가정하면 해석이 용이할 뿐 아니라 실제 실험에 적용하더라도 오차가 거의 발생하지 않는다. 매우 작은 한계 속도  $v_{th} [\text{m/s}] \in \mathbb{R}_{>0}$ 를 설정하고  $|x_2| \leq v_{th}$ 인 경우에 대하여 선형 동작 영역을 가정하면 식 (4)는 다음과 같은 선형동작 영역을 포함하는 동역학으로 다시 쓸 수 있다.

$$\dot{x}_5 = \begin{cases} \frac{2x_2}{v_s^2} (\text{sgn}(x_2) F_C - \delta) \dot{x}_2, & |x_2| > v_{th} \\ \frac{\delta(v_{th})}{v_{th}} \dot{x}_2, & |x_2| \leq v_{th} \end{cases} \quad (5)$$

여기서,  $\frac{\delta(v_{th})}{v_{th}} = \frac{F_C + (F_S - F_C)e^{-(v_{th}/v_s)^2}}{v_{th}}$ 이며  $x_2 - x_5$  평면에서의 선형 기울기 값이다. 이제 식 (3)과 (5)로부터 다음과 같은 5차 상태공간방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{m}(-bx_2 + a_1 s x_3 - a_2 s x_4 - x_5 + w) \\ \dot{x}_3 = z_1(-a_1 s^{-1} x_2 - (l_n + l_f)(x_3 - x_4)) \\ \dot{x}_4 = z_2(a_2 s^{-1} x_2 + (l_n + l_f)(x_3 - x_4)) \\ \dot{x}_5 = \begin{cases} z_3 (\text{sgn}(x_2) F_C - z_4) \frac{1}{m}(-bx_2 + a_1 s x_3 - a_2 s x_4 - x_5 + w), & |x_2| > v_{th} \\ \frac{\delta(v_{th})}{m v_{th}}(-bx_2 + a_1 s x_3 - a_2 s x_4 - x_5 + w), & |x_2| \leq v_{th} \end{cases} \end{cases} \quad (6)$$

여기서

$$z_1 := \frac{\beta}{v_{1_0} + a_1 x_1}, \quad z_2 := \frac{\beta}{v_{2_0} - a_2 x_1}, \quad z_3 := \frac{2x_2}{v_s^2}, \quad z_4 := x_5$$

이다.

복잡한 형태의 비선형 방정식 (6)에서  $x_3, x_4, x_5$  동역학은 각각 선형방정식의 비선형 결합 형태를 가진다. T-S 퍼지 모델을 사용하면 이러한 형태의 비선형 함수를 전반부 규칙에 따른 국부적 선형 영역으로 나누어 기술할 수 있으며 각각의 선형 동작 영역에서 동작 가능한 관측기를 설계하면 이들의 컨벡스 조합으로 표현되는 비선형 전역시스템의 상태추정이 가능하다. 식 (6)은

Table 1 Indices of fuzzy rules

$p$	$i$	$j$	$k$	$l$
1	1	1	1	1
2	1	1	1	2
3	1	1	2	1
4	1	1	2	2
5	1	2	1	1
6	1	2	1	2
7	1	2	2	1
8	1	2	2	2
9	2	1	1	1
10	2	1	1	2
11	2	1	2	1
12	2	1	2	2
13	2	2	1	1
14	2	2	1	2
15	2	2	2	1
16	2	2	2	2

전반부 변수들  $z_1 \in [z_{1_1}, z_{1_2}]$ ,  $z_2 \in [z_{2_1}, z_{2_2}]$ ,  $z_3 \in [z_{3_1}, z_{3_2}]$ ,  $z_4 \in [z_{4_1}, z_{4_2}]$ 에 대하여 총  $16(2^4)$ 개의 규칙을 가지는 퍼지 모델로 표현 가능하다. 다음 퍼지 모델의  $p \in \{1, 2, \dots, 16\}$  번째 규칙을 보자.

$R^p$ : IF  $z_1$  is  $z_{1_1}^p$  and  $z_2$  is  $z_{2_1}^p$  and  $z_3$  is  $z_{3_1}^p$  and  $z_4$  is  $z_{4_1}^p$

$$\text{THEN } \dot{x} = \begin{cases} (A_p^+ + A_p^f)x + B_{w_p}^+ w, & x_2 > v_{\text{th}} \\ (A_p^- + A_p^f)x + B_{w_p}^- w, & x_2 < -v_{\text{th}} \\ (A_p^0 + A_p^f)x + B_{w_p}^0 w, & |x_2| \leq v_{\text{th}} \end{cases}$$

여기서, 첩자 규칙 번호  $p$ 에 대응하는 첩자들  $i, j, k, l$ 은 Table 1과 같으며

$$A_p^+ = \theta_p^+ A, \quad A_p^- = \theta_p^- A, \quad A_p^0 = \theta_p^0 A, \quad B_{w_p}^+ = \theta_p^+ B_w, \quad B_{w_p}^- = \theta_p^- B_w, \\ B_{w_p}^0 = \theta_p^0 B_w$$

$$\theta_p^+ = \text{blockdiag} \left\{ 1, \frac{1}{m}, z_{1_i}, z_{2_j}, \frac{z_{3_k}(F_C - z_{4_l})}{m} \right\},$$

$$\theta_p^- = \text{blockdiag} \left\{ 1, \frac{1}{m}, z_{1_i}, z_{2_j}, \frac{z_{3_k}(-F_C - z_{4_l})}{m} \right\}$$

$$\theta_p^0 = \text{blockdiag} \left\{ 1, \frac{1}{m}, z_{1_i}, z_{2_j}, \frac{\delta(v_{\text{th}})}{m v_{\text{th}}} \right\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b & a_1 s - a_2 s - 1 & & \\ 0 & -a_1 s^{-1} - l_n & l_n & 0 & \\ 0 & a_2 s^{-1} & l_n & -l_n & 0 \\ 0 & -b & a_1 s - a_2 s - 1 & & \end{bmatrix}, \quad A_p^f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_{1_i} l_f & z_{1_i} l_f & 0 & \\ 0 & z_{2_j} l_f & -z_{2_j} l_f & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

이다. 식 (6)과 등가인 비퍼지화된 전역 동특성은 다음과 같이 기술할 수 있다.

$$\dot{x} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{16} \Phi_p ((A_p^+ + A_p^f)x + B_{w_p}^+ w), & x_2 > v_{\text{th}} \\ \sum_{p=1}^{16} \Phi_p ((A_p^- + A_p^f)x + B_{w_p}^- w), & x_2 < -v_{\text{th}} \\ \sum_{p=1}^{16} \Phi_p ((A_p^0 + A_p^f)x + B_{w_p}^0 w), & |x_2| \leq v_{\text{th}} \end{cases} \quad (7)$$

여기서

$$\Phi_p = \prod_{q=1}^4 I_q^p \left( \sum_{p=1}^{16} \left( \prod_{q=1}^4 I_q^p \right) \right), \quad \sum_{p=1}^{16} \Phi_p = 1, \quad I_1^p = \mu_i, \quad I_2^p = \nu_j, \quad I_3^p = \phi_k,$$

$$I_4^p = \varphi_l$$

$$\mu_1 = \frac{z_1 - z_{1_2}}{z_{1_1} - z_{1_2}}, \quad \mu_2 = 1 - \mu_1, \quad \nu_1 = \frac{z_2 - z_{2_2}}{z_{2_1} - z_{2_2}}, \quad \nu_2 = 1 - \nu_1$$

$$\phi_1 = \frac{z_3 - z_{3_2}}{z_{3_1} - z_{3_2}}, \quad \phi_2 = 1 - \phi_1, \quad \varphi_1 = \frac{z_4 - z_{4_2}}{z_{4_1} - z_{4_2}}, \quad \varphi_2 = 1 - \varphi_1$$

이다.

수레의 이동 거리  $x_L$ 과 챔버 양단의 압력  $p_1, p_2$ 가 디지털 센서에 의해 측정된다고 가정하자. 샘플링 주기  $T \in \mathbb{R}_{>0}$ 를 가지는  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  번째 이산시간 출력방정식을 다음과 같은 형태로 표현한다.

$$y_k = Cx_k$$

여기서, 아래첨자  $k$ 는  $kT$  시점,  $y_k$ 는 출력 신호를 의미하며

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s & 0 \end{bmatrix} \text{이다.}$$

**가정 2** (Jee et al., 2013): 논의의 편의를 위해 충분히 짧은 시간구간  $t \in [kT, kT+T)$ 에 대하여  $x(t) \equiv x_k$ ,  $z(t) \equiv z_k$ ,  $l_f(t) \equiv l_{f_k}$ ,  $w(t) \equiv w_k$ 를 가정한다.

가정 2를 적용하여 식 (7)을  $kT$ 에서  $kT+T$ 까지 적분하면 다음과 같은 이산시간 모델을 유도할 수 있다.

$$\begin{cases} x_{k+1} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{16} \Phi_p ((I + T(A_p^+ + A_p^f))x_k + TB_{w_p}^+ w_k), & x_2 > v_{\text{th}} \\ \sum_{p=1}^{16} \Phi_p ((I + T(A_p^- + A_p^f))x_k + TB_{w_p}^- w_k), & x_2 < -v_{\text{th}} \\ \sum_{p=1}^{16} \Phi_p ((I + T(A_p^0 + A_p^f))x_k + TB_{w_p}^0 w_k), & |x_2| \leq v_{\text{th}} \end{cases} \\ y_k = Cx_k \end{cases} \quad (8)$$

피스톤 실에 이상이 생긴다면 챔버 양단의 압력차에 의한 이상 누유 현상이 발생할 수 있다. 누유 검출을 위한 상태추정은 다음과 같은 이산시간 관측기에 의해 이루어진다.

$$\begin{cases} \hat{x}_{k+1} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{16} \Phi_p ((I + TA_p^+) \hat{x}_k - L_p^+(y_k - \hat{y}_k)), & \hat{x}_2 > v_{\text{th}} \\ \sum_{p=1}^{16} \Phi_p ((I + TA_p^-) \hat{x}_k - L_p^-(y_k - \hat{y}_k)), & \hat{x}_2 < -v_{\text{th}} \\ \sum_{p=1}^{16} \Phi_p ((I + TA_p^0) \hat{x}_k - L_p^0(y_k - \hat{y}_k)), & |\hat{x}_2| \leq v_{\text{th}} \end{cases} \\ \hat{y}_k = C\hat{x}_k \\ r_k = H(y_k - \hat{y}_k) \end{cases} \quad (9)$$

여기서,  $\hat{x} \in \mathbb{R}^5$ 는  $x$ 의 추정치,  $\hat{y} \in \mathbb{R}^3$ 는  $y$ 의 추정치,  $r \in \mathbb{R}^3$ 은 여분,  $L_p^+, L_p^-, L_p^0 \in \mathbb{R}^{5 \times 3}$ 은 관측기 이득 행렬,  $H \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ 은 여분 이득 행렬이다. 상태추정오차  $e_k := x_k - \hat{x}_k$ 를 정의하면 식 (8)과 식 (9)로부터 다음과 같은 오차방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{cases} e_{k+1} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{16} \Phi_p ((I + TA_p^+ + L_p^+ C)e_k + TA_p^+ x_k + TB_{w_p}^+ w_k), & \hat{x}_2 > v_{\text{th}} \\ \sum_{p=1}^{16} \Phi_p ((I + TA_p^- + L_p^- C)e_k + TA_p^- x_k + TB_{w_p}^- w_k), & \hat{x}_2 < -v_{\text{th}} \\ \sum_{p=1}^{16} \Phi_p ((I + TA_p^0 + L_p^0 C)e_k + TA_p^0 x_k + TB_{w_p}^0 w_k), & |\hat{x}_2| \leq v_{\text{th}} \end{cases} \\ r_k = H(y_k - \hat{y}_k) \end{cases} \quad (10)$$

여분  $r$ 로부터 고장을 판단하기 위해 다음과 같은 여분평가함수  $J_k$ 와 문턱값  $J_{th_k}$ 을 정의한다.

$$J_{r_k} := \sqrt{\frac{1}{K_W} \sum_{\tau=k-K_W}^k \|r_\tau\|^2} \quad (11)$$

$$J_{th_k} := \sup_{w \in l_2} \gamma \sqrt{\frac{1}{K_W} \sum_{\tau=k-K_W}^k \|w_\tau\|^2} \quad (12)$$

여기서,  $K_W \in \mathbb{R}_{>0}$ 는 상수 시간 창(Constant time window)이다.

정의 1 (고장 판단 논리): 고장 발생 여부는 다음의 고장판단 논리에 의해 결정된다.

$$\begin{cases} J_{r_k} \geq J_{th_k} \Rightarrow \text{with fault} \\ J_{r_k} < J_{th_k} \Rightarrow \text{no fault} \end{cases}$$

정의 2: 오차 시스템(식 (10))에서  $w_k$ 로부터  $r_k$ 까지  $H_\infty$  성능을 다음과 같이 정의한다.

$$\|O\|_\infty := \sup_{w \in l_2} \frac{\|r_k\|_{l_2}}{\|w_k\|_{l_2}}$$

문제 1: 주어진  $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ 에 대하여 관측기(식 (9))가 다음 조건을 만족하도록 관측기 이득 행렬들  $L_p^+$ ,  $L_p^-$ ,  $L_p^0$ 과 여분 이득 행렬  $H$ 를 설계하라.

C1) 오차 시스템(식 (10))은  $w_k = 0, l_f = 0$ 에 대하여 점근적으로 안정하다;

C2)  $\|O\|_\infty < \gamma$ .

### 3. 누유 검출 관측기 설계

정리 1 (관측기의 점근적 안정성 및  $\gamma$ - $H_\infty$  성능): 주어진  $\gamma \in \mathbb{R}_{>0}$ 에 대하여 다음 행렬부등식을 만족하는 행렬들  $P^+ = (P^+)^T > 0$ ,  $P^- = (P^-)^T > 0$ ,  $P^0 = (P^0)^T > 0$ ,  $M_p^+$ ,  $M_p^-$ ,  $M_p^0$ ,  $H$ 이 존재한다면 오차 시스템(식 (10))은 점근적으로 안정하며  $w_k \in l_2$ 에 대하여  $\gamma$ - $H_\infty$  성능을 가진다.

$$\begin{bmatrix} -P^+ & * & * & * \\ (TB_{w_p}^+)^T(P^+ + TP^+A_p^+ + M_p^+C) & T^2B_{w_p}^T P^+ B_{w_p} - \gamma^2 I & * & * \\ P^+ + TP^+A_p^+ + M_p^+C & 0 & -P^+ & * \\ HC & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} -P^- & * & * & * \\ (TB_{w_p}^-)^T(P^- + TP^-A_p^- + M_p^-C) & T^2B_{w_p}^T P^- B_{w_p} - \gamma^2 I & * & * \\ P^- + TP^-A_p^- + M_p^-C & 0 & -P^- & * \\ HC & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} -P^0 & * & * & * \\ (TB_{w_p}^0)^T(P^0 + TP^0A_p^0 + M_p^0C) & T^2B_{w_p}^T P^0 B_{w_p} - \gamma^2 I & * & * \\ P^0 + TP^0A_p^0 + M_p^0C & 0 & -P^0 & * \\ HC & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

for all  $p \in \{1, 2, \dots, 16\}$

여기서,  $M_p^+ = P^+L_p^+$ ,  $M_p^- = P^-L_p^-$ ,  $M_p^0 = P^0L_p^0$ 이다.

**증명:** 먼저  $x_2 > v_{th}$ 에 대하여  $L_p^+$ 과  $H$ 를 구하기 위한 설계조건(식 (13))을 증명한다. 양한정 행렬  $P^+ = (P^+)^T > 0$ 에 대하여 양한정 함수  $V_k^+ := e_k^T P^+ e_k$ 와 차분방정식  $\Delta V_k^+ := e_{k+1}^T P^+ e_{k+1} - e_k^T P^+ e_k$ 을 정의한다. 다음 해밀턴-자코비-벨만 (Hamilton-Jacobi-Bellman) 부등식을 고려하자.

$$\|r_k\|^2 - \gamma^2 \|w_k\|^2 + \Delta V_k^+ < 0 \quad (16)$$

위 식을 0에서 임의의 시간  $K$ 까지 더하면 다음 관계를 얻는다.

$$\begin{aligned} C2) \Leftrightarrow \sum_{\tau=0}^K \|r_\tau\|^2 - \gamma^2 \sum_{\tau=0}^K \|w_\tau\|^2 &< V_0^+ - V_{K+1}^+ \\ &\leq V_0^+ \\ &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

위 관계로부터 식 (16)을 만족하는 이득행렬들  $L_p^+$ 과  $H$ 를 구한다면  $x_2 > v_{th}$ 에 대하여 문제 1의 C2)를 만족하는 관계할 수 있다. 식 (16)을 전개하면 다음과 같은 부등식과 동치관계를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} (16) \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} e \\ w \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} (HC)^T \\ 0 \end{bmatrix} [HC0] - \gamma^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ & + \left( \begin{array}{c} \sum_{p=1}^{16} \Phi_p(I + TA_p^+ + L_p^+ C)^T P^+ \left( \sum_{p=1}^{16} \Phi_p(I + TA_p^+ + L_p^+ C) \right) - P^+ \\ \sum_{p=1}^{16} \Phi_p(TB_{w_p}^+)^T P^+ \left( \sum_{p=1}^{16} \Phi_p(I + TA_p^+ + L_p^+ C) \right) \\ T^2 B_{w_p}^T P^+ B_{w_p} - \gamma^2 I \end{array} \right) \begin{bmatrix} e \\ w \end{bmatrix} < 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} -P^+ & * & * & * \\ \sum_{p=1}^{16} \Phi_p(TB_{w_p}^+)^T P^+ \left( \sum_{p=1}^{16} \Phi_p(I + TA_p^+ + L_p^+ C) \right) & T^2 B_{w_p}^T P^+ B_{w_p} - \gamma^2 I & * & * \\ \sum_{p=1}^{16} \Phi_p(I + TA_p^+ + L_p^+ C)^T P^+ (HC)^T & \begin{bmatrix} (P^+)^{-1} * \\ 0 \\ 0 \\ I \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} P^+ \sum_{p=1}^{16} \Phi_p(I + TA_p^+ + L_p^+ C) \\ HC \end{bmatrix} & 0 \end{bmatrix} < 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} -P^+ & * & * & * \\ \sum_{p=1}^{16} \Phi_p(TB_{w_p}^+)^T P^+ \left( \sum_{p=1}^{16} \Phi_p(I + TA_p^+ + L_p^+ C) \right) & T^2 B_{w_p}^T P^+ B_{w_p} - \gamma^2 I & * & * \\ P^+ \sum_{p=1}^{16} \Phi_p(I + TA_p^+ + L_p^+ C) & 0 & -P^+ & * \\ HC & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} -P^+ & * & * & * \\ (TB_{w_p}^+)^T P^+ (I + TA_p^+ + L_p^+ C) & T^2 B_{w_p}^T P^+ B_{w_p} - \gamma^2 I & * & * \\ P^+ (I + TA_p^+ + L_p^+ C) & 0 & -P^+ & * \\ HC & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \\ \Leftrightarrow & (13), \text{ for all } p \in \{1, 2, \dots, 16\} \end{aligned}$$

여기서, 세 번째 동치관계에서 Schur complement를 사용하였다.  $P^+L_p^+ = M_p^+$ 의 변수치환을 사용하면 마지막 동치관계가 성립한다. 행렬부등식 (14)와 식 (15)의 증명은 위 증명과 유사하므로 생략한다.

#### 4. 모의실험

본 절에서는 실린더가 정상 동작하는 경우와 누유 고장이 발생한 경우의 동특성과 관측기의 추종 성능을 비교하고 제안한 관측기(식 (9))의 검출 성능을 확인하기 위해 가상의 이상 누유를 발생시켜 여분 평가를 실시한다. 다음과 같은 파라미터와 초기값을 가지는 식 (3) 형태의 유압실린더를 고려하자(Yao et al., 2014).

$$m = 40[\text{kg}], \quad a_1 = 2.5 \times 10^{-4}[\text{m}^2], \quad a_2 = 1.92 \times 10^{-4}[\text{m}^2],$$

$$b = 45[\text{Ns/m}]$$

$$l_n = 8.9 \times 10^{-12}[\text{m}^5/\text{Ns}], \quad \beta = 2 \times 10^8[\text{N/m}^2]$$

$$s = 3 \times 10^4, \quad F_C = 52[\text{N}], \quad F_S = 78[\text{N}], \quad v_s = 0.5[\text{m/s}], \quad v_{th} = 10^{-3}[\text{m/s}]$$

$$v_{1_0} = 2.76 \times 10^{-4}[\text{m}^3], \quad v_{2_0} = 1.76 \times 10^{-4}[\text{m}^3], \quad p_{1_0} = 7 \times 10^6[\text{N/m}^2],$$

$$p_{2_0} = 0[\text{N/m}^2]$$

$$x_{1_0} = 4 \times 10^{-2}[\text{m}], \quad x_{2_0} = 0[\text{m/s}], \quad x_{3_0} = \frac{p_{1_0}}{s} = \frac{700}{3}[\text{N/m}^2],$$

$$x_{3_0} = \frac{p_{2_0}}{s} = 0[\text{N/m}^2]$$

주어진  $\gamma = 0.05$ ,  $T = 10^{-3}[\text{s}]$ 에 대하여 정리 1의 설계 조건을 만족하는 관측기(식 (9))의 이득행렬들  $L_p^+$ ,  $L_p^-$ ,  $L_p^0$ ,  $H$ 를 구할 수 있다(부록 참조).

외란  $w \in \mathbb{R}$ 는 Fig. 3과 같이 크기 구간 (-0.5, 0.5)에서 불규칙하게 발생함을 가정한다. 수레의 속도  $x_2$ 는 측정 가능한 값이

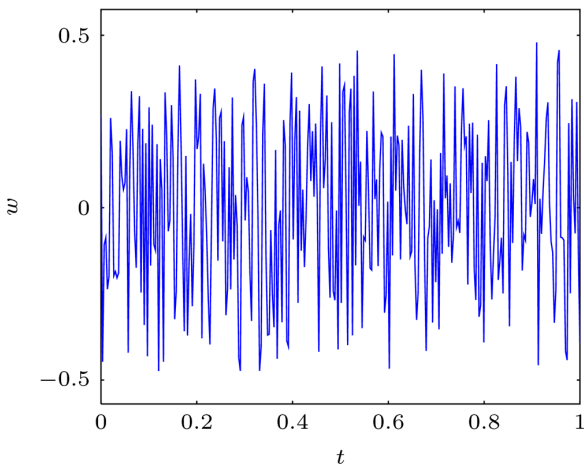


Fig. 3 Disturbance

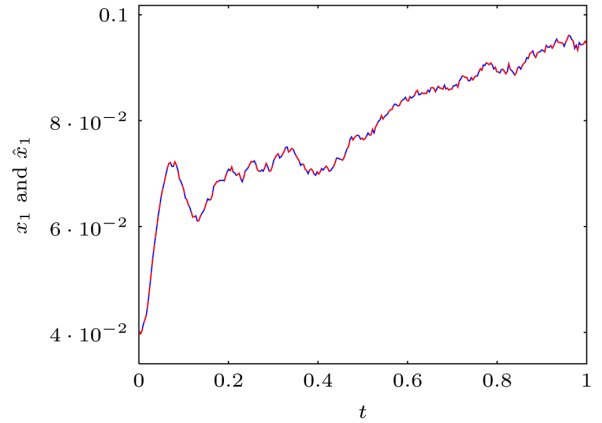


Fig. 4 Cart displacement and estimate (solid:  $x_1$ , dashed:  $\hat{x}_1$ ) when  $l_f = 0$

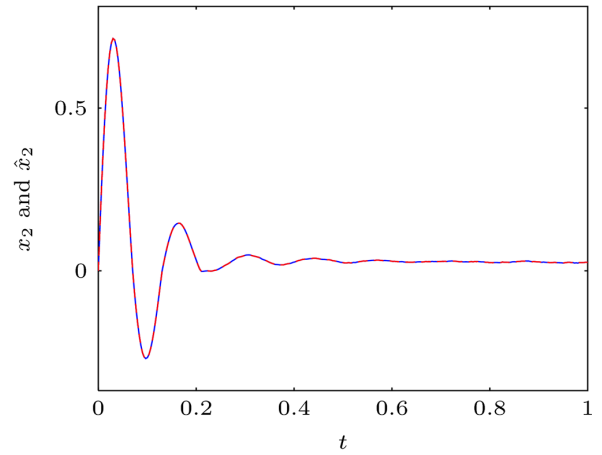


Fig. 5 Cart velocity and estimate (solid:  $x_2$ , dashed:  $\hat{x}_2$ ) when  $l_f = 0$

아니지만 측정 가능한 이동 거리  $x_1$ 으로부터 계산이 가능하다. 시간 구간  $t \in [0, 1]$ 에서 이상 누유 계수  $l_f = 0$ 에 대한 동역학(식 (3))과 관측기(식 (9))의 시뮬레이션 결과를 Fig. 4와 5에 나타낸다. Fig. 4와 5의 실선은 각각 수레의 거리 측정치, 속도 계산값을 의미하며 꺾선은 관측기에 의해 추정된 궤적이다. 그림에서 알 수 있듯이 고장이 발생하지 않은 경우 관측기의 상태추정치와 실제 상태변수와 거의 일치하는 것을 알 수 있다.

이상 누유가 발생한 경우의 관측기의 검출 성능을 확인하기 위해 0.1초를 기점으로 다음과 같은 이상 누유 계수가 발생함을 가정한다.

$$l_f = l_n = 8.9 \times 10^{-12}[\text{m}^5/\text{Ns}]$$

Fig. 6과 7의 실선은 각각 수레의 거리 측정치, 속도의 계산값이며 꺾선은 관측기에 의해 추정된 상태변수이다. Fig. 6은 누유와 상관없이 정상적으로 상태변수를 추정하고 있으나 Fig. 7에서는 0.1초 이후 상태추정오차가 발생하는 것을 알 수 있다.

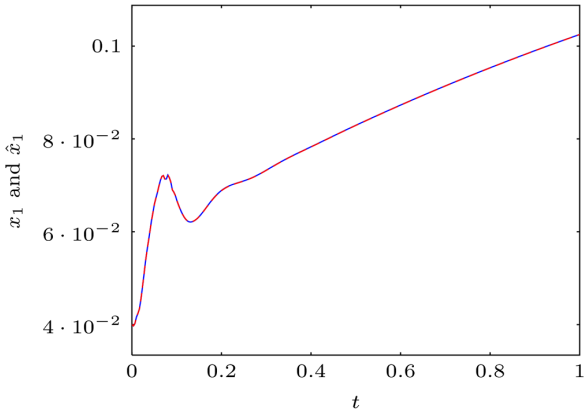


Fig. 6 Cart displacement and estimate (solid:  $x_1$ , dashed:  $\hat{x}_1$ ) when  $l_f \neq 0$

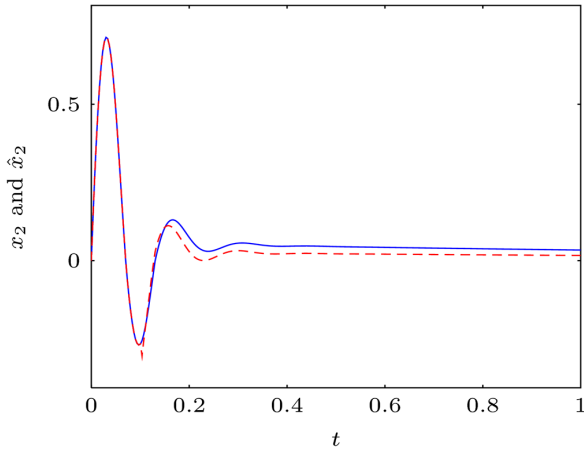


Fig. 7 Cart velocity and estimate (solid:  $x_2$ , dashed:  $\hat{x}_2$ ) when  $l_f \neq 0$

상태추정오차로부터 누유를 판단하기는 어려우나 정의 1의 판단 논리를 적용하면 누유 발생 여부를 확인할 수 있다. 관측기 (식 (9))는  $l_f = 0$ 에 대하여 다음 관계를 만족한다.

$$\begin{aligned}
 (17) \Leftrightarrow & \sqrt{\sum_{\tau=0}^k \|r_\tau\|^2} < \gamma \sqrt{\sum_{\tau=0}^k \|w_\tau\|^2} \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{\frac{1}{K_W} \sum_{\tau=k-K_W}^k \|r_\tau\|^2} < \gamma \sqrt{\frac{1}{K_W} \sum_{\tau=k-K_W}^k \|w_\tau\|^2} \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{\frac{1}{K_W} \sum_{\tau=k-K_W}^k \|r_\tau\|^2} < \sup_{w \in l_2} \gamma \sqrt{\frac{1}{K_W} \sum_{\tau=k-K_W}^k \|w_\tau\|^2} = J_{th,k}
 \end{aligned}$$

주어진  $\gamma = 0.05$ ,  $K_W = 50$ ,  $w \in (-0.5, 0.5)$ 에 대하여 문턱값  $J_{th,k}$ 를 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 J_{th,k} &= \sup_{w \in l_2} \gamma \sqrt{\frac{1}{K_W} \sum_{\tau=k-K_W}^k \|w_\tau\|^2} \\
 &= \begin{cases} \gamma \sqrt{\frac{0.25k}{50}} = 0.005 \sqrt{\frac{k}{2}}, & t < 0.1 \\ 0.5\gamma = 0.025, & t \geq 0.1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

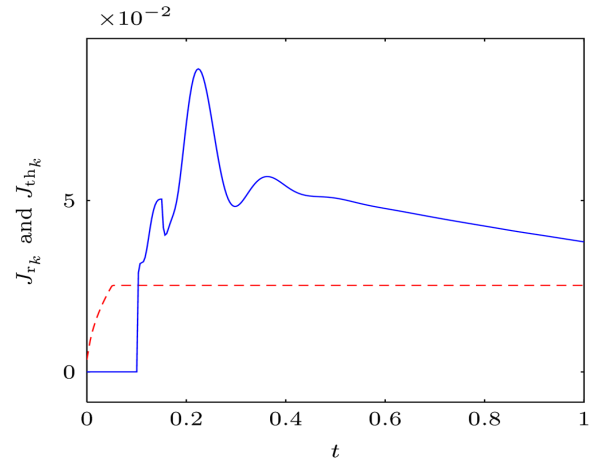


Fig. 8 Residual Evaluation 1 (solid:  $J_{r,k}$ , dashed:  $J_{th,k}$ )

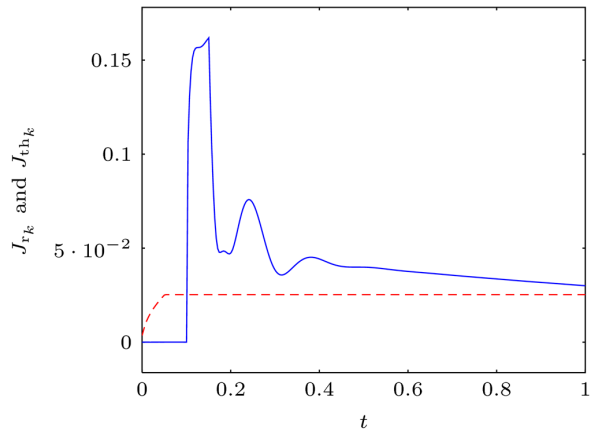


Fig. 9 Residual Evaluation 2 (solid:  $J_{r,k}$ , dashed:  $J_{th,k}$ )

Fig. 8은 위에서 계산된 문턱값과 계산식 (11)에 의해 얻어진 여분평가함수를 그래프로 나타낸 것이다. 여분평가함수는 0.1021초에 문턱값을 초과하였으며 정의 1의 판단 논리에 따라 이 시점에 누유가 발생하였음을 판단할 수 있다.

다양한 상황에서의 실험을 위해 다음과 같은 초기값을 가지는 실린더 모델을 고려하자.

$$\begin{aligned}
 x_{1_0} &= 2 \times 10^{-2} [\text{m}], \quad x_{2_0} = -1 [\text{m/s}], \quad x_{3_0} = \frac{p_{1_0}}{s} = \frac{600}{3} [\text{N/m}^2], \\
 x_{3_0} &= \frac{p_{2_0}}{s} = \frac{10}{3} [\text{N/m}^2]
 \end{aligned}$$

초기값을 제외한 모델 파라미터 및 실험 방법은 앞의 실험과 동일하다. 여분평가 결과를 Fig. 9에 나타내었으며 Fig. 8과 유사하게 누유 발생 직후인 0.1013초에 여분평가함수가 문턱값을 초과하여 누유가 발생하였음을 확인할 수 있다.

### 5. 결 론

본 논문은 펀로드 유압실린더의 내부 누유 검출 문제를 다루

었다. 복잡한 비선형 방정식으로 표현되는 유압실린더 동역학을 T-S 퍼지 모델로 나타내었으며 LuGre 마찰 모델의 불연속 구간을 이어주는 선형 영역을 가정하였다. 누유 검출을 위한 샘플치 관측기는 외란에 강인한  $H_\infty$  성능을 가지도록 설계되었으며 관측기 설계 조건은 선형행렬부등식으로 나타내었다. 모의 실험에서는 제안한 관측기의 성능을 확인하기 위해 외란은 존재하지만 누유는 발생하지 않는 경우와 외란과 누유가 모두 발생하는 경우로 나누어 실험하였으며 각각의 경우에서 관측기의 강인 추종 성능과 검출 성능을 확인할 수 있었다. 제안한 관측기의 검출 성능 향상을 위해서는 논문에서 제시한 외란에 대한 강인 성능 뿐 아니라 누유 신호에 대한 민감 성능 연구가 필요하며 이는 액츄에이터 고장 검출 분야에서 향후 연구되어야 할 주요 연구 분야이다.

## 후 기

이 논문은 2016년 해양수산부 재원으로 한국해양과학기술진흥원의 지원을 받아 수행된 연구임 (해양개발용 수중건설로봇 사업단, PJT200539).

## References

- Alleyne, A., Liu, R., 2000. A Simplified Approach to Force Control for Electro-hydraulic Systems. *Control Engineering Practice*, 8(12), 1347-1356.
- Guo, J., Huang, X., Cui, Y., 2009. Design and Analysis of Robust Fault Detection Filter using LMI Tools. *Computers and Mathematics with Applications*, 57(11-12), 1743-1747.
- Jee, S.C., Kang H.J., Lee, M.J., Li, J.H., 2016.  $H_\infty$  Observer Design for Detecting Internal Oil Leakage in a Hydraulic Cylinder. *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems*, 22(2), 117-125.
- Jee, S.C., Lee, H.J., Joo, Y.H., 2012.  $H_\infty/H_\infty$  Sensor Fault Detection Observer Design for Nonlinear Systems in Takagi-Sugeno's Form. *Nonlinear Dynamics*, 67(4), 2343-2351.
- Jee, S.C., Lee, H.J., Kim, D.W., 2013. Sampled-data Fault Detection Observer Design of Takagi-Sugeno Fuzzy Systems. *Journal of Korean Institute of Intelligent Systems*, 23(1), 65-71.
- Jee, S.C., Park, J.W., Kim, M.K., Lee, M.J., Kang, H.J. Hong, S.M., 2015. Model-based Observer Design for Detecting Internal Oil-leakage of Hydraulic Cylinder: LMI Approach. *Proceedings of Korean Marine Robot Technology Society 2015 Autumn Conference*, 150-151.
- Lee, J.W., Park, J.W., Suh, J.H., Choi, Y.H., 2015. Redundant Architectural Design of Hydraulic Control System for Reliability Improvement of Underwater Construction Robot. *Journal of Ocean Engineering and Technology*, 29(5), 380-385.
- Liu, J., Wang, J.L., Yang, G.-H., 2005. An LMI Approach to Minimum Sensitivity Analysis with Application to Fault Detection. *Automatica*, 41(11), 1995-2004.
- Wang, J.L., Yang, G.-H., Liu, J., 2007. An LMI Approach to  $H_\infty$  Index and Mixed  $H_\infty/H_\infty$  Fault Detection Observer Design. *Automatica*, 43(9), 1656-1665.
- Yao, B., Bu, F., Chiu, G.T.-C., 1998. Nonlinear Adaptive Robust Control of Electro-hydraulic Servo Systems with Discontinuous Projections. in *Decision and Control, 1998. Proceedings of the 37th IEEE Conference on*, 2(3), 2265-2270.
- Yao, B., Bu, F., Reedy, J., Chiu, G.T.-C., 2000. Adaptive Robust Motion Control of Single-rod Hydraulic Actuators: Theory and Experiments. *IEEE-ASME Transactions on Mechatronics*, 5(1), 79-91.
- Yao, J., Yang, G., Ma, D., 2014. Internal Leakage Fault Detection and Tolerant Control of Single-rod Hydraulic Actuators. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014, 1-14.

## 부 록

$$L_1^+ = \begin{bmatrix} -1.00 & 3.42 \times 10^{-9} & -3.92 \times 10^{-9} \\ -2.28 \times 10^{-5} & 4.19 \times 10^{-6} & -4.79 \times 10^{-6} \\ 1.08 \times 10^{-4} & -5.33 \times 10^{-5} & 2.29 \times 10^{-5} \\ -1.29 \times 10^{-4} & 2.39 \times 10^{-5} & -6.07 \times 10^{-5} \\ 2.90 \times 10^{-2} & -5.00 \times 10^{-3} & 5.61 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$L_2^+ = \begin{bmatrix} -1.00 & 3.40 \times 10^{-9} & -3.90 \times 10^{-9} \\ -2.25 \times 10^{-5} & 4.15 \times 10^{-6} & -4.74 \times 10^{-6} \\ 1.07 \times 10^{-4} & -5.32 \times 10^{-5} & 2.28 \times 10^{-5} \\ -1.28 \times 10^{-4} & 2.37 \times 10^{-5} & -6.06 \times 10^{-5} \\ 2.83 \times 10^{-2} & -4.90 \times 10^{-3} & 5.50 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$L_3^+ = \begin{bmatrix} -1.00 & 3.38 \times 10^{-9} & -3.87 \times 10^{-9} \\ -2.24 \times 10^{-5} & 4.12 \times 10^{-6} & -4.71 \times 10^{-6} \\ 1.06 \times 10^{-4} & -5.30 \times 10^{-5} & 2.26 \times 10^{-5} \\ -1.28 \times 10^{-4} & 2.36 \times 10^{-5} & -6.04 \times 10^{-5} \\ 2.78 \times 10^{-2} & -4.82 \times 10^{-3} & 5.40 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$L_4^+ = \begin{bmatrix} -1.00 & 3.40 \times 10^{-9} & -3.91 \times 10^{-9} \\ -2.26 \times 10^{-5} & 4.16 \times 10^{-6} & -4.76 \times 10^{-6} \\ 1.07 \times 10^{-4} & -5.32 \times 10^{-5} & 2.28 \times 10^{-5} \\ -1.29 \times 10^{-4} & 2.38 \times 10^{-5} & -6.06 \times 10^{-5} \\ 2.86 \times 10^{-2} & -4.94 \times 10^{-3} & 5.54 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$L_5^+ = \begin{bmatrix} -1.00 & 3.42 \times 10^{-9} & -3.92 \times 10^{-9} \\ -2.28 \times 10^{-5} & 4.19 \times 10^{-6} & -4.79 \times 10^{-6} \\ 1.08 \times 10^{-4} & -5.33 \times 10^{-5} & 2.29 \times 10^{-5} \\ -1.37 \times 10^{-4} & 2.53 \times 10^{-5} & -6.24 \times 10^{-5} \\ 2.90 \times 10^{-2} & -5.00 \times 10^{-3} & 5.61 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$L_6^+ = \begin{bmatrix} -1.00 & 3.40 \times 10^{-9} & -3.90 \times 10^{-9} \\ -2.25 \times 10^{-5} & 4.15 \times 10^{-6} & -4.74 \times 10^{-6} \\ 1.07 \times 10^{-4} & -5.32 \times 10^{-5} & 2.28 \times 10^{-5} \\ -1.36 \times 10^{-4} & 2.51 \times 10^{-5} & -6.22 \times 10^{-5} \\ 2.83 \times 10^{-2} & -4.90 \times 10^{-3} & 5.50 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$L_7^+ = \begin{bmatrix} -1.00 & 3.38 \times 10^{-9} & -3.87 \times 10^{-9} \\ -2.24 \times 10^{-5} & 4.12 \times 10^{-6} & -4.71 \times 10^{-6} \\ 1.06 \times 10^{-4} & -5.30 \times 10^{-5} & 2.26 \times 10^{-5} \\ -1.35 \times 10^{-4} & 2.50 \times 10^{-5} & -6.21 \times 10^{-5} \\ 2.78 \times 10^{-2} & -4.82 \times 10^{-3} & 5.40 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$





