

보에 부착된 압전웨이퍼의 전기역학적 신호를 통한 고주파수 대역 감쇠 추정

신용재* · 박현우**

Shin, Yong Jae*, Park, Hyun Woo**

Estimating High-Frequency Damping of a Beam through Electro-Mechanical Signatures of Piezoelectric Wafer Mounted on the Beam

ABSTRACT

The high-frequency electro-mechanical signatures, which are excited and received by piezoelectric wafers mounted on a beam, are sensitive to incipient defect in a beam. Predicting the sensing range of the piezoelectric wafers is needed to effectively conduct damage assessment of a beam through utilizing their advantage. Damping of a beam plays the most important role in determining the sensing range among other features. This paper has proposed a scheme for estimating high-frequency damping of a beam through electro-mechanical signatures of piezoelectric wafers mounted on the beam. Considering damping effect while resonance of a beam evolves, wave perspective is adopted to formulate the electro-mechanical signatures of piezoelectric wafers. The damping of a beam is estimated through the least squares method minimizing the difference between the calculated and the measured damping ratio function values which are obtained from formulated and measured electro-mechanical signatures, respectively. The validity of the proposed scheme has been demonstrated through numerical and experimental examples using an aluminum beam with collocated piezoelectric wafers.

Key words : Piezoelectric wafer (PZT), Beam, Electro-mechanical signatures, Damping estimation, Structural health monitoring

초록

보의 표면에 부착된 압전웨이퍼를 통해 가진되고 측정되는 고주파수 대역의 전기역학적 신호는 보에 발생한 미세 손상에 매우 민감하다. 이러한 부착형 압전웨이퍼의 장점을 이용한 보의 손상 진단을 효과적으로 수행하기 위해서는 압전웨이퍼의 탐지범위 예측이 필요하다. 고주파수 대역에서 압전웨이퍼의 탐지범위에 영향을 주는 여러 가지 요인 중 가장 지배적인 인자는 보의 감쇠이다. 이 연구에서는 보에 부착된 압전웨이퍼의 전기역학적 신호를 이용하여 보의 감쇠를 추정할 수 있는 기법을 제시한다. 공진이 발생하는 과정에서 보의 감쇠효과를 고려하여 압전웨이퍼의 전기역학적 신호를 파전달 관점에서 정식화한다. 실제 계측된 전기역학적 신호로부터 구한 측정 감쇠비 함수값과 정식화된 전기역학적 신호로부터 계산된 감쇠비 함수값의 차이를 최소화하는 최소자승법을 통해 보의 감쇠비를 추정한다. 제시된 방법을 압전웨이퍼가 병치되어 있는 알루미늄 보 수치 및 실험 예제에 적용하여 타당성을 검증한다.

검색어 : 압전웨이퍼(PZT), 보, 전기역학적 신호, 감쇠추정, 구조물 건전성 감시

* 동아대학교 대학원 토목공학과 석사과정 (Dong-A University · shin8705@naver.com)

** 종신회원 · 교신저자 · 동아대학교 인간환경융합공학부 토목공학과 부교수 (Corresponding Author · Dong-A University · hwpark@donga.ac.kr)

Received November 29, 2016/ revised December 27, 2016/ accepted January 17, 2017

1. 서론

지난 20년간 압전웨이퍼를 이용한 보의 건전성감시 기법에 대한 연구가 지속적으로 진행되어 왔다(Park et al., 2003; Raghavan and Cesnik, 2007). 압전웨이퍼는 전압을 가하면 변형을 일으키고 반대로 변형을 가하면 전류가 발생하는 속성을 동시에 가지고 있기 때문에 하나의 소자로 구조물의 동적 응답에 대한 가진 및 탐지가 가능하다. 압전웨이퍼는 구조물에 관입하지 않고 부착하여 사용할 수 있을 뿐만 아니라 크기가 작고 가볍기 때문에 보의 동특성에 영향을 미치지 않고 건전성 감시에 활용할 수 있는 장점이 있다. 초기 손상에 민감하다고 알려진 고주파수 대역 보의 응답에 대한 가진과 탐지가 용이한 점도 압전웨이퍼의 특징이다.

압전웨이퍼를 이용한 보의 건전성 감시에서 널리 사용되는 방법은 크게 탄성 유도파 기법(Raghavan and Cesnik, 2007)과 임피던스 기법(Park et al., 2003)으로 나눌 수 있다. 탄성 유도파 기법은 보를 따라서 전달되는 탄성 유도파를 압전웨이퍼를 이용해서 가진하고 탐지하는 기법이다. 탄성 유도파는 먼거리까지 전달되고 미세한 손상에 민감하다고 알려져 있어서 보에 발생한 미세균열을 진단하는데 널리 사용되어 왔다(Alleyne and Cawley, 1992). 임피던스 기법은 수십 kHz의 고주파수 대역 진동특성을 압전웨이퍼의 전기역학적 임피던스 신호로 수집하여 보의 손상유무를 판단하는 기법이다. 탄성 유도파 기법에 비해 임피던스 기법은 보의 지점 조건의 영향을 받지 않으면서 압전웨이퍼 주변의 미세 손상을 탐지할 수 있다고 알려져 있다(Park et al., 2003).

이론적으로 탄성 유도파 기법에서 사용하는 고주파수 대역의 탄성 유도파는 극히 짧은 시간 동안 전달파의 천이 응답이므로 보의 감쇠 효과를 무시할 수 있다(Rose, 1999). 반면 임피던스

기법에서 사용하는 고주파수 대역의 전기역학적 신호는 보의 진동 특성이 직접 반영된다. 따라서 보의 감쇠가 전기역학적 신호에 미치는 영향을 정확하게 정량화하고 압전웨이퍼가 담당할 수 있는 탐지범위를 예측 하기 위해서 보의 감쇠 추정은 매우 중요한 이슈이다(Annandras and Soh, 2010). 구조 진동론에 기반을 두고 있는 기존 연구들은 보의 1차 모드와 같은 저주파수 대역에서 변위계 또는 가속도계로 수집된 동적 변위 응답 또는 가속도 응답을 사용하여 감쇠를 추정한다(Chopra, 1995). 그러나 임피던스 기법에서 사용하는 고주파수 대역에서의 전기역학적 신호를 이용하여 보의 감쇠를 추정한 연구는 극히 드문 실정이다(Lim and Soh, 2014).

이 연구에서는 임피던스 기법에 사용되는 압전웨이퍼의 탐지범위를 결정하는 고주파수대역 보의 감쇠를 전기역학적 신호를 통해 추정할 수 있는 기법을 제시한다. 압전웨이퍼의 전기역학적 신호를 파전달 관점에서 유도된 고주파수 대역 보의 해석해를 통해 정식화한다(Park, 2016). 보의 공진이 발생하는 과정에서 보의 감쇠가 전기역학적 신호에 미치는 영향을 정식화하고 감쇠비 함수를 정의한다. 실제 계측된 전기역학적 신호로부터 구한 측정 감쇠비 함수값과 정식화된 전기역학적 신호로부터 계산된 감쇠비 함수값을 최소화 시키는 최소자승법을 통해 보의 감쇠비를 추정한다. 제안된 방법의 타당성을 압전웨이퍼가 병치된 알루미늄 보의 수치예제와 개념검증 실험예제를 통해 보인다.

2. 보에 부착된 압전웨이퍼의 전기역학적 신호 정식화

2.1 굽힘파관

Fig. 1(a)에서는 무한한 길이를 가지는 보의 한 지점에서 윗면과 아랫면에 동일한 제원의 압전웨이퍼가 병치되어 있다. 이후부터

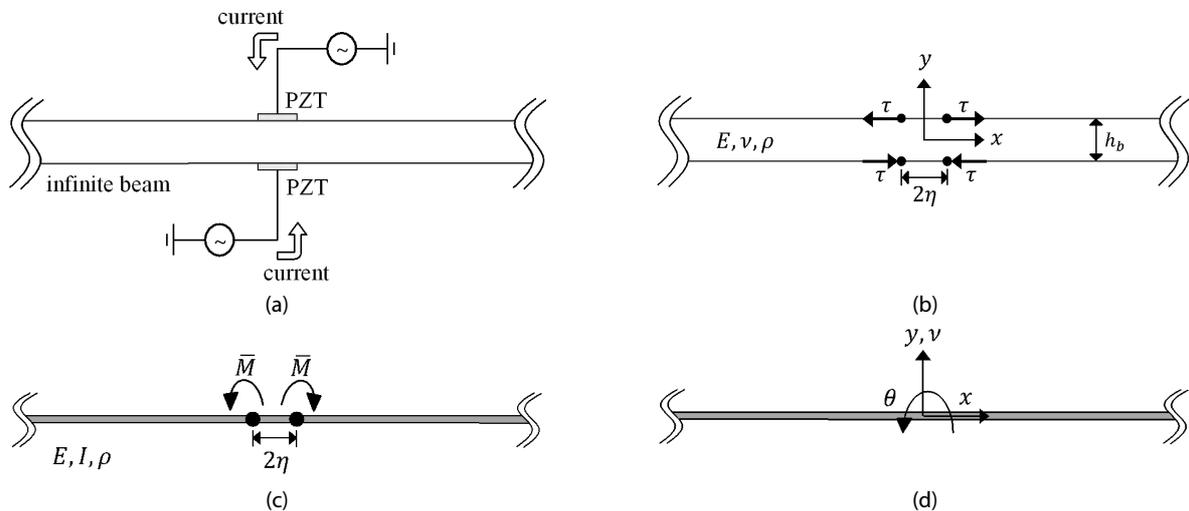


Fig. 1. (a) An Infinite Beam with Collocated PZTs; (b) An Idealized Elasto-Dynamic Model of (a); (c) An Infinite Beam Model Representing (b); (d) Coordinate System and the DOFs in (c) (Park, 2014)

설명을 간편하게 하기 위해 압전웨이퍼의 재료로 사용되는 대표적인 소재인 Lead zirconate titanate의 약자인 PZT로 압전웨이퍼를 칭하기로 한다. Fig. 1(b)는 Fig. 1(a)의 보-PZT의 동적 상호작용을 이상화시킨 모델로 나타난 것이다. 이 모델은 PZT의 크기와 두께가 보에 비해 매우 작고 PZT가 보에 완전 부착되어 있고 PZT가 전단변형을 일으키는 d31 타입이라는 가정하에서 유효한 것으로 알려져 있다(Crawley and De Luis, 1987). PZT의 극성을 이용하여 병치된 압전소자에 적절한 전압을 가하게 되면 보에 굽힘변형만 가할 수 있다. Fig. 1(b)를 다시 이상화하면 Fig. 1(c)와 같이 모멘트 더블릿(moment doublet) \overline{M} 을 받는 오일러-베르누이 보로 이상화할 수 있다. Fig. 1(d)는 Fig. 1(c)에 대한 좌표계와 자유도를 나타냈다.

미세한 손상에 민감하게 반응하는 고주파수 대역에서 보가 가진 되는 경우에 파 전달의 분산성을 정확하게 모사하기 위해 보의 회전 관성과 전단 변형을 고려할 수 있는 티모센코 보 이론을 이용한다. PZT에 의해 유도된 Fig. 1(c)의 모멘트 더블릿이 보에 발생시키는 수직 변위는 다음의 지배방정식으로부터 구할 수 있다 (Fung, 1965).

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \left(\frac{1}{c_0^2} + \frac{1}{c_Q^2} \right) \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{1}{c_0^2 c_Q^2} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + \frac{1}{c_0^2 R^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ &= \frac{\overline{M}}{EI} \{ \delta'(x-\eta) - \delta'(x+\eta) \} \\ & c_0^2 = \frac{E}{\rho}, c_Q^2 = \frac{kG}{\rho}, R^2 = \frac{I}{A} \end{aligned} \quad (1)$$

여기서, $t, v, E, I, \rho, \kappa, G$ 그리고 A 는 각각 시간, 보의 수직변위, 탄성계수, 단면 2차 모멘트, 밀도, 전단지수, 전단계수 그리고 단면적을 나타내며 $\delta(\cdot)$ 은 디랙-델타 함수를 나타낸다.

Eq. (1)에 대한 해석하는 이중 푸리에 변환을 통해 주파수와 파수(wave number)에서 수직 변위에 대한 해를 유도한 다음 파수에 대한 역푸리에 변환을 통해서 주파수 영역에서 실제 공간에 대한 해를 구하게 된다(Graff, 1991). 이 때 파수에 대한 역푸리에 변환을 수행하는 과정에서는 복소공간에서의 적분 이론인 코시의 유수 정리(residue theorem)를 사용하여 Eq. (1)의 해를 주파수 영역에서 다음과 같이 구할 수 있다(Park, 2016).

$$\begin{aligned} \hat{v} = & \frac{\widehat{M}}{2EI(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2)} [H(-(x+\eta)) \{ e^{\bar{k}_2(x+\eta)} - e^{i\bar{k}_1(x+\eta)} \} \\ & - H(x+\eta) \{ e^{-\bar{k}_2(x+\eta)} - e^{-i\bar{k}_1(x+\eta)} \} \\ & - H(-(x-\eta)) \{ [e^{\bar{k}_2(x-\eta)} - e^{i\bar{k}_1(x-\eta)}] \} \\ & + H((x-\eta)) \{ [e^{-\bar{k}_2(x-\eta)} - e^{-i\bar{k}_1(x-\eta)}] \}] \end{aligned} \quad (2)$$

여기서, \hat{v}, \widehat{M} 그리고 $H(x)$ 는 각각 주파수 영역에서 보의 수직 변위, 모멘트 더블릿 그리고 헤비사이드 계단함수(Heaviside step function)를 나타내며 \bar{k}_1 과 \bar{k}_2 는 티모센코 보의 분산성(dispersion)을 나타내는 특성방정식에서 계산되는 파수로서 다음과 같다(Fung, 1965).

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= \sqrt{\frac{B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2}}, \bar{k}_2 = \sqrt{\frac{-B + \sqrt{B^2 - 4C}}{2}} \\ B &= \omega^2 \left(\frac{1}{c_0^2} + \frac{1}{c_Q^2} \right), C = \left(\frac{\omega^4}{c_0^2 c_Q^2} - \frac{\omega^2}{c_0^2 R^2} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

파 전달 이론에 의하면 Eq. (2)는 보를 따라서 전달되는 전달파 성분과 발생 즉시 인근에서 소멸되는 소멸파 성분으로 나눌 수 있다. \bar{k}_1 이 포함된 항이 전달파 성분을 나타내고 \bar{k}_2 이 포함된 항이 소멸파 성분을 나타낸다. 고주파 대역에서 파의 중첩에 의해서 공진이 발생하는 과정에서 소멸파 성분의 기여는 무시할 수 있으므로 $|x| \geq \eta$ 인 경우 Eq. (2)를 전달파 모드에 대한 성분만으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{v}_{pr} = -\frac{\widehat{M}}{2EI(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2)} \{ e^{-i\bar{k}_1|x-\eta|} - e^{-i\bar{k}_1|x+\eta|} \} \text{sgn}(x) \quad (4)$$

여기서, $\text{sgn}(\cdot)$ 는 부호함수(sign function)를 나타낸다.

티모센코 보에서 처짐각과 처짐은 다음의 관계를 만족한다.

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \frac{1}{c_Q^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (5)$$

Eq. (1)에 대한 해석해를 구하는 방법과 마찬가지로 이중 푸리에 변환을 통해 주파수와 파수에서 처짐각에 대한 해를 유도한 다음 파수에 대한 역푸리에 변환을 통해서 주파수 영역에서 해를 구할 수 있다. 처짐각에 대한 해도 고주파수 영역에서는 전달파 성분만을 고려하고 $|x| \geq \eta$ 인 경우 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\theta}_{pr} = -\frac{i\widehat{M}}{2EI} \frac{\bar{k}_Q^2 - \bar{k}_1^2}{\bar{k}_1(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2)} \{ e^{-i\bar{k}_1|x-\eta|} - e^{-i\bar{k}_1|x+\eta|} \} \quad (6)$$

여기서, $\bar{k}_Q^2 = \frac{\omega^2}{c_Q^2}$ 이다.

Eq. (4)는 PZT에 의해 발생한 모멘트 더블릿이 무한한 길이를 가지는 보에 발생시키는 전달파 성분을 나타낸다. Fig. 2와 같이

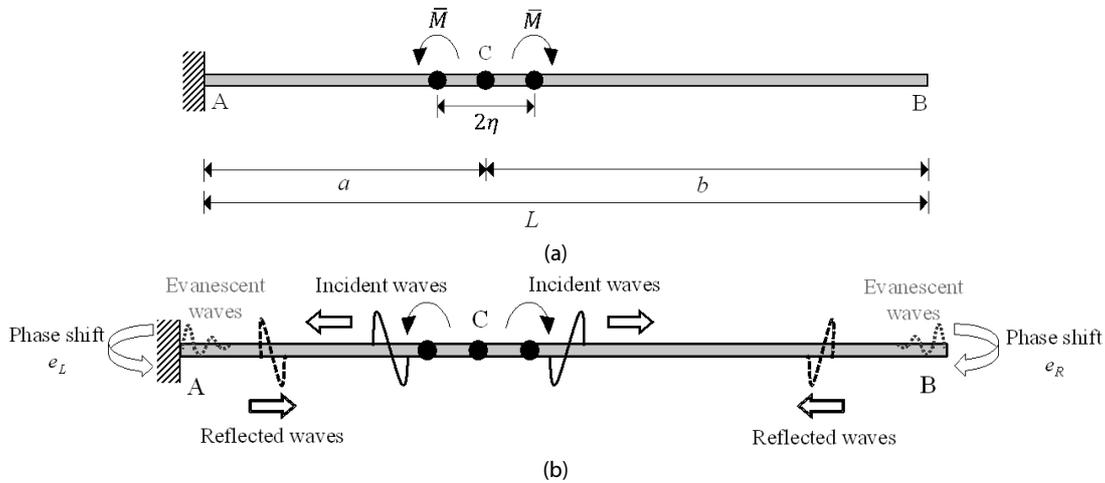


Fig. 2. (a) A Cantilever Beam Under the Moment Doublet Induced by Collocated PZTs; (b) Illustration of Propagating Flexural waves Through wave Reflections at Both Supports

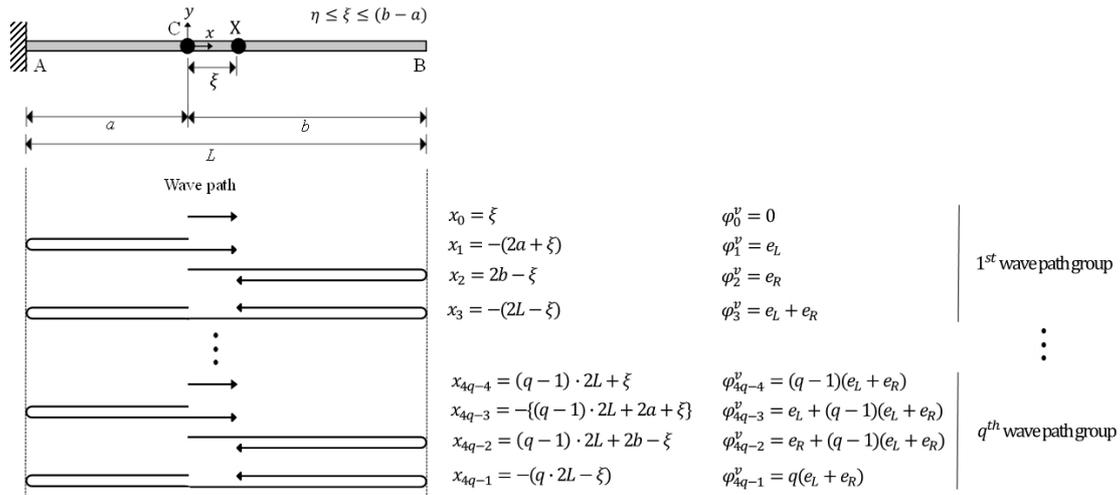


Fig. 3. Illustration of wave Path Groups Which Appear Periodically Due to the Reflections at Both Supports of the Beam in Terms of Traveling Distance and Phase Shift (Park, 2014)

유한한 길이를 가지는 보의 양쪽 지점에서 발생하는 파 반사에 의해서 전달파가 중첩되어 정상파 모드를 형성할 때 보의 진동현상이 발생한다. 설명의 편의를 위해 Fig. 2(a)와 같이 A는 고정단이고 B는 자유단인 캔틸레버 보의 예를 들어보자. Fig. 2(b)에서 보의 C의 위아래에 부착된 PZT에 의해서 입사파가 발생하면 보를 따라서 A와 B를 향해 파가 전달된다. 고정단 A와 자유단 C에 각각 입사파 도달하게 되면 지점에서의 변위 및 힘의 경계조건을 만족시키기 위해 파 반사가 발생한다. 전달파의 경우 파의 진폭은 그대로 유지되는 전반사가 일어나고 입사파의 위상이 달라진다(Graff, 1991). 또한 모드변환이 발생하면서 양쪽 지점에서 소멸파 모드가 발생하게 되는데 고주파 모드에서는 발생한 지점 부근에서 급격하게 소멸하기 때문에 무시할 수 있다.

시간이 지남에 따라 보 내부에는 PZT에 의해 유도된 입사파와 보의 양쪽 지점에서 발생하는 반사파가 지속적으로 중첩된다. Fig. 3은 시간에 따라서 보의 임의의 지점 X에 도달하는 입사파와 반사파의 경로를 순차적으로 도시하였다. x_p 는 X에 p번째로 도달하는 전달파가 진행한 경로의 거리를 나타낸다. e_L 과 e_R 은 각각 A와 B 지점의 파 반사에서 발생하는 위상변화이고, ϕ_p^v 는 X에 p번째 도달하는 전달파가 파 반사를 거치면서 갖는 총 위상변화를 나타낸다. Fig. 3에서 알 수 있듯이 x_p 와 ϕ_p^v 가 4개의 파 경로 묶음(4q-4, 4q-3, 4q-2, 4q-1) 마다 각각 2L과 $e_L + e_R$ 만큼 주기성을 갖게 된다. 이러한 파 경로 거리와 위상변화의 주기성을 갖는 파 경로의 묶음을 q번째 파경로군(wave path group)으로 부르기로 한다. 그리고 q번째 파경로군에 대응되는 파 경로를 따라서 X에

전달된 굽힘파(flexural wave)의 합을 q 번째 굽힘파군(flexural wave group)라고 명명한다(Park, 2014).

q 번째 굽힘파군에 대응되는 수직 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\psi}_q^v = \sum_{m=1}^4 \hat{v}_{4q-m} \approx \sum_{m=1}^4 \hat{v}_{pr}(x_{4q-m}) e^{i\varphi_{4q-m}^v} \quad (7)$$

여기서, 고주파 영역에서는 소멸과 모드를 무시할 수 있기 때문에 Eq. (4)의 전달과 모드만을 이용해서 굽힘파군의 수직변위를 근사할 수 있다.

Eq. (4)를 Eq. (7)에 대입하여 식을 정리하면 굽힘파군의 수직변위를 다음과 같이 나타낼 수 있다(Park, 2016).

$$\hat{\psi}_q^v = -\frac{4i\hat{M}}{EI(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2)} \sin(\bar{k}_1\eta) \cos\left(\bar{k}_1(b-\xi) - \frac{e_R}{2}\right) \cos\left(\bar{k}_1a - \frac{e_L}{2}\right) e^{-i\left\{(2q-1)\bar{k}_1L - \left(q-\frac{1}{2}\right)(e_L+e_R)\right\}} \quad (8)$$

Eq. (7)에서 (8)을 유도하는 과정과 마찬가지로 굽힘파군의 처짐각을 유도하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\psi}_q^\theta = \frac{4i\hat{M}}{EI} \frac{\bar{k}_Q^2 - \bar{k}_1^2}{\bar{k}_1(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2)} \sin(\bar{k}_1\eta) \cos\left(\bar{k}_1(b-\xi) - \frac{e_R}{2}\right) \cos\left(\bar{k}_1a - \frac{e_L}{2}\right) e^{-i\left\{(2q-1)\bar{k}_1L - \left(q-\frac{1}{2}\right)(e_L+e_R)\right\}} \quad (9)$$

2.2 굽힘파군에 의해 유도된 전기역학적 신호

보에 부착된 PZT에 유도되는 전기역학적 신호는 굽힘파군의 수직 처짐과 처짐각으로 표현할 수 있다. 2.1절에서 기술한 PZT의 1차원 선형 압전성(Ikeda, 1990)이 성립하고 Fig. 4와 같이 보의 위면과 아래면에 각각 같은 극성방향으로 PZT가 병치되었을 때 굽힘파군에 의해 각각의 PZT에는 동일한 전기역학적 신호가 유도된다.

굽힘파군에 의해서 PZT에 유도된 전기역학적 신호 중 하나인

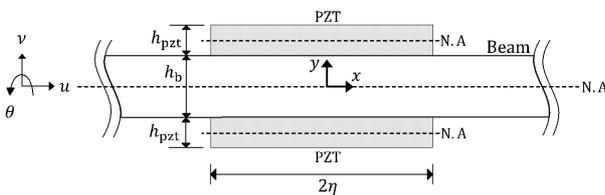


Fig. 4. The Geometric Configuration of PZTs and Beam System

전기역학적 전하량은 다음과 같이 표현된다(Park, 2014).

$$\hat{\psi}_q^Q = -\frac{h_{31}b_{pzt}}{B_{33}^S} \left\{ \hat{\psi}_q^{u_{pzt}} \Big|_{\xi=\eta} - \hat{\psi}_q^{u_{pzt}} \Big|_{\xi=-\eta} \right\} \quad (10)$$

여기서, h_{31} , b_{PZT} 그리고 B_{33}^S 는 각각 PZT의 압전상수, 폭, 그리고 유전상수를 나타낸다. Eq. (10)에서 $\hat{\psi}_q^{u_{pzt}}$ 는 각각 q 번째 굽힘파군에 의해 발생하는 PZT의 증립축 축방향 변위를 나타내고 보와 PZT 부착면의 변위적합조건으로부터 PZT의 우측 끝단($\xi = \eta$)과 좌측 끝단($\xi = -\eta$)에서 다음과 같이 나타낼 수 있다(Park et al., 2010).

$$\hat{\psi}_q^{u_{pzt}} \Big|_{\xi=\eta} = -\frac{h_b}{2} \hat{\psi}_q^\theta \Big|_{\xi=\eta} - \frac{h_{pzt}}{2} \frac{d\hat{\psi}_q^v}{d\xi} \Big|_{\xi=\eta} \quad (11a)$$

$$\hat{\psi}_q^{u_{pzt}} \Big|_{\xi=-\eta} = -\frac{h_b}{2} \hat{\psi}_q^\theta \Big|_{\xi=-\eta} - \frac{h_{pzt}}{2} \frac{d\hat{\psi}_q^v}{d\xi} \Big|_{\xi=-\eta} \quad (11b)$$

Eq. (11a)에는 Eq. (8)의 미분결과와 Eq. (9)를 대입하고 그 결과식을 다시 Eq. (10)에 대입한다. Eq. (11b)의 경우는 $\xi = -\eta$ 일 때 Fig. 3의 굽힘파군의 파전달 경로 순서에 변화가 발생하므로 이를 반영하여 수정한 아래 Eq. (12a)의 미분결과와 Eq. (12b)를 Eq. (11b)에 대입하고 그 결과식을 Eq. (10)에 대입한다.

$$\hat{\psi}_q^v \Big|_{\xi=-\eta} = -\frac{4i\hat{M}}{EI} \frac{1}{(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2)} \sin(\bar{k}_1\eta) \cos\left(\bar{k}_1b - \frac{e_R}{2}\right) \cos\left(\bar{k}_1(a-\eta) - \frac{e_L}{2}\right) e^{-i(2q-1)\bar{k}_1L - \left(q-\frac{1}{2}\right)(e_L+e_R)} \quad (12a)$$

$$\hat{\psi}_q^\theta \Big|_{\xi=-\eta} = -\frac{4i\hat{M}}{EI} \frac{\bar{k}_Q^2 - \bar{k}_1^2}{\bar{k}_1(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2)} \sin(\bar{k}_1\eta) \cos\left(\bar{k}_1b - \frac{e_R}{2}\right) \sin\left(\bar{k}_1(a-\eta) - \frac{e_L}{2}\right) e^{-i(2q-1)\bar{k}_1L - \left(q-\frac{1}{2}\right)(e_L+e_R)} \quad (12b)$$

이 과정을 통해서 Eq. (10)은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\psi}_q^Q = -\frac{2ih_{31}}{B_{33}^S} \left(\frac{\hat{M}b_{pzt}}{EI} \right) \frac{\bar{h}\bar{k}_1^2 - h_b\bar{k}_Q^2}{\bar{k}_1(\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2)} \sin(\bar{k}_1\eta) \left\{ \cos(\bar{k}_1\eta) \sin\left(\bar{k}_1L - \frac{e_L+e_R}{2}\right) - 2\sin(\bar{k}_1\eta) \cos\left(\bar{k}_1a - \frac{e_L}{2}\right) \right\} e^{-i\left\{(2q-1)\bar{k}_1L - \left(q-\frac{1}{2}\right)(e_L+e_R)\right\}} \quad (13)$$

Eq. (13)을 이용하면 굽힘파의 중첩이 발생함에 따라 전기역학적

신호가 어떻게 점진적으로 주파수 응답함수로 진화되는지 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\Psi}_n^Q = \sum_{q=1}^n \hat{\psi}_q^Q \quad (14)$$

특히, Eq. (13)을 살펴보면 전기역학적 신호의 크기는 Fig. 3의 q 와 무관하고 전기역학적신호의 위상이 q 에 따라 달라짐을 알 수 있다. 따라서 시간이 지남에 따라서 q 가 증가할 때 보에 전달되는 굽힘파군이 보의 공진을 일으키는 정상파 조건 이루기 위해서는 q 번째 굽힘파군과 $q-1$ 번째의 굽힘파군의 위상이 아래와 같이 2π 의 정수배가 되어 함을 유추할 수 있다.

$$\left\{ \bar{k}_1(2n-1)L - \left(q - \frac{1}{2}\right)(e_L + e_R) \right\} \left\{ \bar{k}_1(2n-3)L - \left(q - \frac{3}{2}\right)(e_L + e_R) \right\} = 2\bar{k}_1L - (e_L + e_R) = 2c\pi \Leftrightarrow \bar{k}_c = \frac{\tilde{c}\pi}{L} \quad (15)$$

여기서, $\tilde{c} = c + \frac{e_L + e_R}{2\pi}$ 이고 c 는 임의의 양의 정수이다. Eq. (15)를 만족시키는 \bar{k}_c 는 보의 c 번째 공진모드에 대응되는 파수가 된다. e_L 과 e_R 은 \bar{k}_c 에 대한 함수로서 보의 지점 조건에 따라서 각각 달리 표현된다(Mei and Mace, 2005). 뉴턴-랩슨법을 통해 Eq. (15)를 \bar{k}_c 에 대해 풀면 e_L 과 e_R 를 계산할 수 있다.

Eq. (15)를 Eq. (13)에 대입하면 c 번째 공진모드에서 q 번째 굽힘파군에 의해 유도되는 전기역학적 전하량이 아래와 같이 계산 된다.

$$\hat{\psi}_{q|\bar{k}=\bar{k}_c}^Q = (-1)^c \frac{4ih_{31}}{B_{33}^S} \left(\frac{\hat{M}b_{pzt}}{EI} \right) \frac{\bar{h}\bar{k}_c^2 - h_b\bar{k}_Q^2}{\bar{k}_c(\bar{k}_c^2 + \bar{k}_Q^2)} \cos\left(\frac{\tilde{c}\pi a}{L} - \frac{e_L}{2}\right) \cos\left(\frac{\tilde{c}\pi b}{L} - \frac{e_R}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\tilde{c}\pi\eta}{L}\right) \quad (16)$$

여기서, $\bar{h} = h_b + h_{pzt}$ 이고 \bar{k}_Q 는 \bar{k}_c 에 대응되는 \bar{k}_2 를 나타낸다. Eq. (14)와 마찬가지로 시간이 지남에 따라서 보에 중첩되는 굽힘파군이 c 번째 공진모드를 생성하는 과정에서 전기역학적 신호 값은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{\Psi}_n^Q|_{\bar{k}=\bar{k}_c} = \sum_{q=1}^n \hat{\psi}_{q|\bar{k}=\bar{k}_c}^Q = (-1)^c n \frac{4ih_{31}}{B_{33}^S} \left(\frac{\hat{M}b_{pzt}}{EI} \right) \frac{\bar{h}\bar{k}_c^2 - h_b\bar{k}_Q^2}{\bar{k}_c(\bar{k}_c^2 + \bar{k}_Q^2)} \cos\left(\frac{\tilde{c}\pi a}{L} - \frac{e_L}{2}\right) \cos\left(\frac{\tilde{c}\pi b}{L} - \frac{e_R}{2}\right) \sin^2\left(\frac{\tilde{c}\pi\eta}{L}\right) \quad (17)$$

Eq. (17)은 보의 감쇠가 고려되지 않는 경우 공진모드가 생성되는 과정에서의 전기역학적 신호값으로서, 굽힘파군의 개수가 증가

함에 따라 선형적으로 증가함을 알 수 있다. 보의 감쇠를 고려할 때 전달과 경로의 거리가 증가함에 따라 굽힘파군이 감쇠를 일으키므로 Eq. (13)의 전기역학적 전하량의 크기도 q 가 증가함에 따라 감소하게 된다. 3장에서는 보의 감쇠가 고려된 경우에 대해 보의 감쇠가 전기역학적 신호에 미치는 영향을 정식화 한다.

3. 전기역학적 신호를 이용한 보의 감쇠추정

3.1 보의 감쇠를 고려한 전기역학적 신호 정식화

보의 감쇠가 PZT의 전기역학적 신호에 미치는 영향을 정량화하기 위해 보의 탄성계수의 허수부에 재료 감쇠를 대입한다.

$$\tilde{E} = (1 + i\zeta)E \quad (18)$$

여기서, \tilde{E} 는 재료감쇠비 ζ 가 포함된 복소 탄성계수이다.

Eq. (18)을 Eq. (3)에 대응되는 티모셴코 보의 분산 특성방정식에 대입하면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\tilde{k}^4 - \omega_c^2 \left(\frac{1}{\tilde{c}_0^2} + \frac{1}{\tilde{c}_Q^2} \right) \tilde{k}^2 + \left(\frac{\omega^4}{\tilde{c}_0^2 \tilde{c}_Q^2} - \frac{\omega^2}{\tilde{c}_0^2 R^2} \right) = 0 \quad (19a)$$

여기서, \tilde{c}_0^2 과 \tilde{c}_Q^2 은 Eq. (18)과 같은 방식으로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{c}_0^2 = \frac{\tilde{E}}{\rho} = \frac{(1 + i\zeta)E}{\rho} = (1 + i\zeta)c_0^2 \quad (19b)$$

$$\tilde{c}_Q^2 = \frac{\kappa \tilde{G}}{\rho} = \frac{\kappa(1 + i\zeta)G}{\rho} = (1 + i\zeta)c_Q^2 \quad (19c)$$

Eq. (19a)를 만족시키는 파수 \tilde{k} 도 복소수 형태를 가지기 때문에 다음과 같이 표시할 수 있다(Fahy and Gardonio, 2007).

$$\tilde{k} = (1 + i\chi)k \quad (20)$$

Eqs. (19b), (19c) and (20)을 Eq. (19a)에 대입하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$(1 + i\zeta)^2(1 + i\chi)^4 k^4 - (1 + i\zeta)(1 + i\chi)^2 \omega_c^2 \left(\frac{1}{\tilde{c}_0^2} + \frac{1}{\tilde{c}_Q^2} \right) k^2 + \left\{ \frac{\omega^4}{\tilde{c}_0^2 \tilde{c}_Q^2} - \frac{(1 + i\zeta)\omega^2}{\tilde{c}_0^2 R^2} \right\} = 0 \quad (21)$$

여기서, ζ 와 χ 가 매우 작은 값을 갖는다고 가정하면 이들에 대한 고차항을 무시하고 Eq. (21)은 다음과 같이 실수부와 허수부로 나타낼 수 있다.

$$k^4 - \omega_c^2 \left(\frac{1}{c_0^2} + \frac{1}{c_Q^2} \right) k^2 + \left(\frac{\omega^4}{c_0^2 c_Q^2} - \frac{\omega^2}{c_0^2 R^2} \right) + i \left[\chi \left\{ 4k^4 - 2\omega_c^2 \left(\frac{1}{c_0^2} + \frac{1}{c_Q^2} \right) k^2 \right\} + \zeta \left\{ 2k^4 - \omega_c^2 \left(\frac{1}{c_0^2} + \frac{1}{c_Q^2} \right) k^2 - \frac{\omega^2}{c_0^2 R^2} \right\} \right] = 0 \quad (22)$$

Eq. (22)가 만족되기 위해서는 실수부와 허수부가 모두 0이 되어 한다. 실수부의 경우 감쇠가 없는 경우 티모셴코 보의 분산 특성방정식이므로 Eq. (3)을 해로 갖게 되고 허수부가 0이 되기 위해서는 다음의 조건이 만족되어야 한다.

$$\chi = \zeta \frac{2\bar{k}_1^4 c_0^2 c_Q^2 - \omega_c^2 (c_0^2 + c_Q^2) \bar{k}_1^2 - \frac{\omega^2 c_Q^2}{R^2}}{2\omega_c^2 (c_0^2 + c_Q^2) \bar{k}_1^2 - 4\bar{k}_1^4 c_0^2 c_Q^2} \quad (23)$$

여기서, 전달과 성분에 대응되는 Eq. (3)의 \bar{k}_1 만 고려하기 때문에 Eq. (23)는 \bar{k}_1 에 대해서 나타냈다.

Eq. (23)을 Eq. (20)에 대입하여 보의 감쇠가 고려될 때의 복소 파수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\tilde{k}_1 = (1 + i\chi) \bar{k}_1 \quad (24)$$

Eq. (24)를 Eqs. (4)와 (6)의 지수항에 포함되어 있는 파수 \bar{k}_1 대신 대입한 후 2장에서 기술한 절차에 따라서 q 번째 굽힘파군에 의해 발생하는 PZT의 전기역학적 전하량을 유도할 있다.

$$\hat{\psi}_q^Q = -\frac{2ih_{31}}{B_{33}^S} \left(\frac{\hat{M}b_{pzt}}{EI} \right) \frac{\bar{h} \bar{k}_1^2 - h_b \bar{k}_Q^2}{\bar{k}_1 (\bar{k}_1^2 + \bar{k}_2^2)} \sin(\bar{k}_1 \eta) \left\{ \cos(\bar{k}_1 \eta) \sin \left(\bar{k}_1 L - \frac{e_L + e_R}{2} \right) - 2 \sin(\bar{k}_1 \eta) \cos \left(\bar{k}_1 a - \frac{e_L}{2} \right) \cos(\bar{k}_1 b) - \frac{e_R}{2} \right\} e^{-\chi(2q-1)\bar{k}_1 L - i \left\{ (2q-1)\bar{k}_1 L - \left(q - \frac{1}{2} \right) (e_L + e_R) \right\}} \quad (25)$$

Eq. (25)는 Eq. (13)에 $e^{-\chi(2q-1)\bar{k}_1 L}$ 항이 곱해진 형태로 q 가 증가할수록 그 크기가 지수함수형태로 감소함을 알 수 있다. 흥미로운 것은 Eqs. (13)과 (25)의 위상은 같기 때문에 Eq. (15)에서 기술된 공진조건은 감쇠와 무관하게 Eq. (25)에도 동일하게 적용된다는 점이다. 따라서 Eq. (15)를 Eq. (25)에 대입하면 c 번째 공진모드에서 q 번째 굽힘파군에 의해 유도되는 전기역학적 전하량을 구할 수 있다.

$$\hat{\psi}_q^Q|_{\bar{k}=\bar{k}_c} = (-1)^c \frac{4ih_{31}}{B_{33}^S} \left(\frac{\hat{M}b_{pzt}}{\tilde{E}I} \right) \frac{\bar{h} \bar{k}_c^2 - h_b \bar{k}_Q^2}{\bar{k}_c (\bar{k}_c^2 + \bar{k}_2^2)} \cos \left(\frac{\tilde{c}\pi a}{L} - \frac{e_L}{2} \right) \cos \left(\frac{\tilde{c}\pi b}{L} - \frac{e_R}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\tilde{c}\pi \eta}{L} \right) e^{-\chi(2q-1)\tilde{c}\pi} \quad (26)$$

감쇠가 있는 보에 중첩되는 굽힘파군이 c 번째 공진모드를 생성시키는 과정에서 유도되는 전기역학적 신호값을 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\hat{\Psi}_n^Q|_{\bar{k}=\bar{k}_c} = \sum_{q=1}^n (-1)^c \frac{4ih_{31}}{B_{33}^S} \left(\frac{\hat{M}b_{pzt}}{\tilde{E}I} \right) \frac{\bar{h} \bar{k}_c^2 - h_b \bar{k}_Q^2}{\bar{k}_c (\bar{k}_c^2 + \bar{k}_2^2)} \cos \left(\frac{\tilde{c}\pi a}{L} - \frac{e_L}{2} \right) \cos \left(\frac{\tilde{c}\pi b}{L} - \frac{e_R}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\tilde{c}\pi \eta}{L} \right) e^{-\chi(2q-1)\tilde{c}\pi} \quad (27)$$

3.2 보의 감쇠 추정 기법

감쇠가 있는 보에서 c 번째 공진모드가 생성되는 과정에서 유도되는 전기역학적 신호를 이용하여 보의 감쇠를 구하기 위해 다음과 같이 감쇠비 함수 $f_{n,c}$ 를 정의한다.

$$f_{n,c} = \ln \left(1 - \frac{\Psi_n^Q}{\Psi_\infty^Q} \Big|_{\bar{k}=\bar{k}_c} \right) \quad (28)$$

여기서, Ψ_n^Q 와 Ψ_∞^Q 는 Eq. (27)을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\Psi}_n^Q|_{\bar{k}=\bar{k}_c} = (-1)^c \frac{4ih_{31}}{B_{33}^S} \left(\frac{\hat{M}b_{pzt}}{EI} \right) \frac{\bar{h} \bar{k}_c^2 - h_b \bar{k}_Q^2}{\bar{k}_c (\bar{k}_c^2 + \bar{k}_2^2)} \cos \left(\frac{\tilde{c}\pi a}{L} - \frac{e_L}{2} \right) \cos \left(\frac{\tilde{c}\pi b}{L} - \frac{e_R}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\tilde{c}\pi \eta}{L} \right) \frac{e^{-\chi \tilde{c}\pi} \{ 1 - e^{-2n\chi \tilde{c}\pi} \}}{1 - e^{-2\chi \tilde{c}\pi}} \quad (29a)$$

$$\hat{\Psi}_\infty^Q|_{\bar{k}=\bar{k}_c} = (-1)^c \frac{4ih_{31}}{B_{33}^S} \left(\frac{\hat{M}b_{pzt}}{\tilde{E}I} \right) \frac{\bar{h} \bar{k}_c^2 - h_b \bar{k}_Q^2}{\bar{k}_c (\bar{k}_c^2 + \bar{k}_2^2)} \cos \left(\frac{\tilde{c}\pi a}{L} - \frac{e_L}{2} \right) \cos \left(\frac{\tilde{c}\pi b}{L} - \frac{e_R}{2} \right) \sin^2 \left(\frac{\tilde{c}\pi \eta}{L} \right) \frac{e^{-\chi \tilde{c}\pi}}{1 - e^{-2\chi \tilde{c}\pi}} \quad (29b)$$

Eqs. (29a)와 (29b)를 Eq. (28)에 대입하면 Ψ_n^Q 와 Ψ_∞^Q 에 존재하는 공통항이 나눠져 없어지면서 감쇠비 함수를 다음과 같이 간단하게 나타낼 수 있다.

$$f_{n,c} = -2n\chi \tilde{c}\pi \quad (30)$$

Eq. (23)에서 보의 재료감쇠비 ζ 와 Eq. (30)의 χ 와의 관계가

주어져 있으므로 χ 를 알면 ζ 를 구할 수 있다. c 번째 공진모드 생성과정에서 측정된 전기역학적 신호를 Eq. (28)에 대입하면 측정 감쇠비 함수 $\bar{f}_{n,c}$ 를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\bar{f}_{n,c} = \ln \left(1 - \frac{\bar{\psi}_n^Q}{\bar{\psi}_\infty^Q} \Big|_{k=\bar{k}_c} \right) \quad (31)$$

여기서, $\bar{\psi}_n^Q|_{k=\bar{k}_c}$ 는 첫번째부터 n 번째 굽힘파군까지 중첩되면서 c 번째 공진모드가 점진적으로 만들어질 때, c 번째 공진모드에 대응되는 피크주파수에서 측정된 전기역학적 신호를 나타낸다. 실제상황에서 측정되는 전기역학적 신호는 시간영역에서 수집되므로 n 에 대응되는 신호까지 잘라내어 적절한 신호처리를 거친 후 고속 푸리에 변환을 통해 주파수 영역으로 변환시킨다.

c 번째 공진모드 생성과정에서 Eq. (30)에서 계산된 감쇠비 함수 $f_{n,c}$ 와 Eq. (31)의 측정 감쇠비 함수간의 차이를 최소화함으로써 보의 감쇠에 대응되는 χ 를 추정할 수 있다. χ 를 추정하기 위한 최소자승법에 사용되는 목적함수를 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\min_{\chi} \Pi = \frac{1}{2} \sum_{n=n_0}^{n_1} (f_{n,c} - \bar{f}_{n,c})^2 \quad (32)$$

여기서, n_0 와 n_1 은 보의 감쇠의 추정에 고려할 굽힘파군에 대응되는 파 경로의 시작값과 끝값을 나타낸다.

Eq. (30)을 Eq. (32)에 대입하고 χ 에 대해 Eq. (32)를 최소화시키는 조건을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{d\Pi}{d\chi} = \frac{1}{2} \sum_{n=n_0}^{n_1} \frac{d}{d\chi} (2n\chi \tilde{c}\pi + \bar{f}_{n,c})^2 = 0 \quad (33)$$

Eq. (33)로부터 χ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\chi = -\frac{1}{\tilde{c}\pi} \frac{\sum_{n=n_0}^{n_1} n \bar{f}_{n,c}}{\sum_{n=n_0}^{n_1} 2n^2} \quad (34)$$

Eq. (34)을 Eq. (23)에 대입하면 c 번째 공진모드에 대응되는

재료감쇠비 ζ 를 구할 수 있다.

4. 수치 및 실험 예제

4.1 수치예제

제안된 방법을 Fig. 5와 같이 PZT (L10×B10×H0.191 mm)가 병치되어 있는 양쪽 자유단 알루미늄 보(L1200×B10×H3 mm)의 감쇠추정에 적용하였다. PZT의 중심은 왼쪽 자유단에서 400 mm 인 지점에 위치하였고 PZT와 보의 물성치는 Table 1에 나타났다. 추정하고자 하는 재료 감쇠값의 정해를 일반적인 알루미늄의 경우 0.1%임을 감안하여 각각 0.05, 0.1, 0.3%로 3가지로 가정하였다.

보의 공진에 대한 전기역학적 신호의 측정치는 주어진 보와 PZT 제원을 Eq. (25)에 대입하여 모사하였다. 보의 감쇠를 추정하고자 하는 주파수 대역은 70에서 77 kHz로 설정하였고 이 대역에 존재하는 굽힘 모드들을 가진하기 위해서 Fig. 6(a)의 톤버스트 입력 가진 신호를 병치된 PZT에 가하였다. Fig. 6(b)는 6(a)의 톤버스트 입력 가진 신호에 대한 파워스펙트럼을 dB 스케일로 나타낸 것으로 감쇠를 추정하고자 하는 70~77 kHz 대역에서 적절한 신호대 잡음비를 가지고 있다.

Fig. 7(a)은 재료감쇠가 0.1%이고 입력 전압신호의 피크 대 피크(peak-to-peak) 값이 12 V일 때 주파수 영역에서 Eq. (25)에 의해 모사된 전기역학적 신호를 역고속 푸리에 변환을 이용해서 시간영역에서 나타냈다. 역고속 푸리에 변환에 사용된 주파수 영역의 이산화된 전기역학적 신호는 총 500,000개로 주파수 분해능 20 Hz이고 나이퀴스트(Nyquist) 주파수는 2.5 MHz이다. 시간영역으로 변환된 전기역학적 신호는 시간증분 0.2μs이고 총시간은 50 ms이다. 표현상의 편의를 위해 전기역학적 신호는 PZT의 커패시턴스(capacitance)인 7.1 nF으로 기준화 하여 전압으로 나타낸다. Fig. 7(a)에 표시된 $n = 1, 2, 4, 8, 16$ 은 각각의 파경로군 번호에 대응되는 시간 지점을 나타내고 있다. 이들 시간 지점 t_n 은 각각의

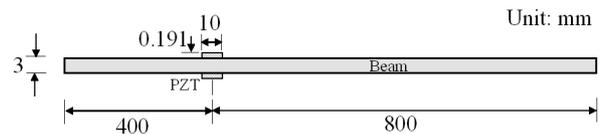


Fig. 5. A Free-Free Beam with Collocated PZTs (Not to Scale)

Table 1. Material Properties of An Aluminum Beam and Collocated PZTs

Aluminum beam				PZT (PSI-5A4E of PIEZO SYSTEMS INC.) (Piezo 2016)		
Elastic modulus (GPa)	Poisson ratio	Density (kg/m ³)	Loss factor (%)	Elastic modulus (GPa)	Relative dielectric constant	Piezoelectric constant (m/V)
70	0.33	2700	0.05, 0.1, 0.3	66	1800	-190×10 ⁻¹²

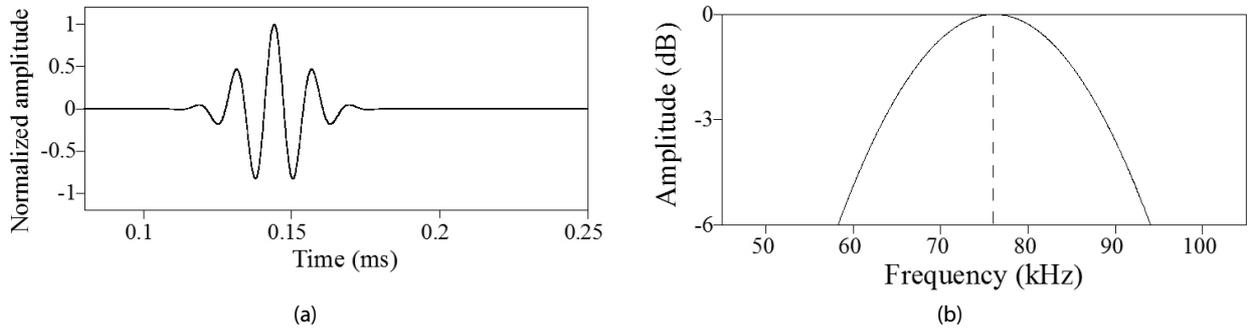


Fig. 6. (a) 76 kHz Toneburst Input Signal; (b) Power Spectrum of (a) (dB Scale)

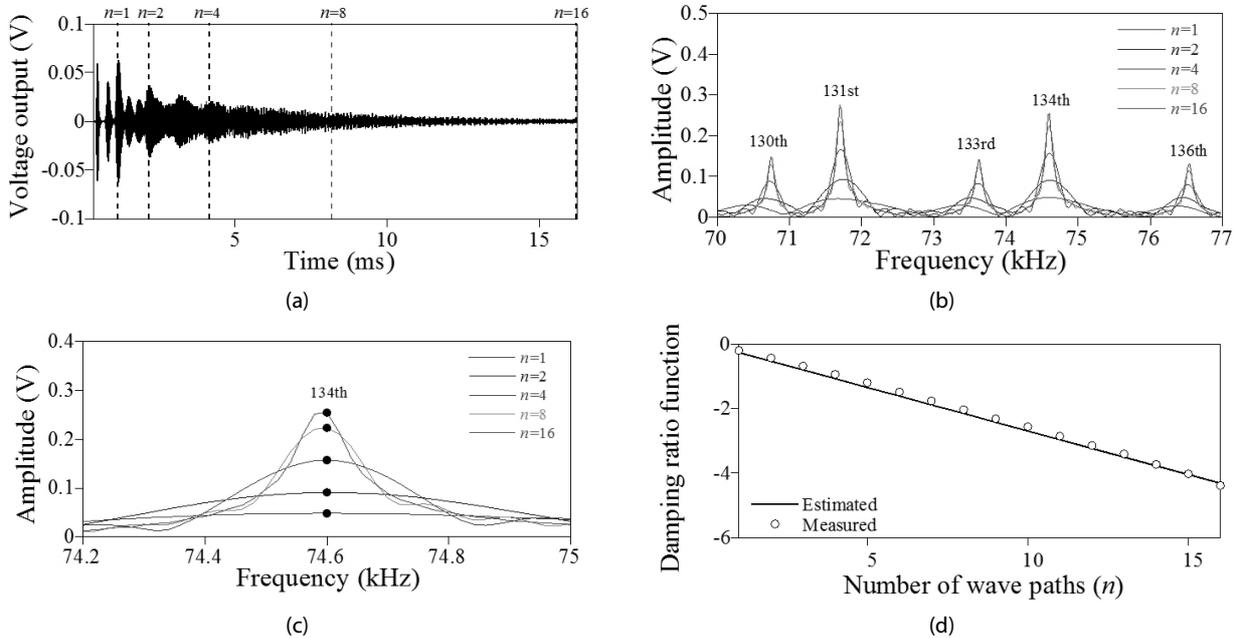


Fig. 7. (a) Electromechanical Signals Measured at PZTs Collocated on a Beam for Material Damping 0.1%; (b) Temporal Spectrums of (a) with Respect to Wave Path Number n between 70 and 77 kHz; (c) Temporal Spectrum Values at 74.6 kHz Corresponding to 134th Mode; (d) Comparison of Calculated and Measured Damping Ratio Function Values for 134th Mode with Respect to n After Damping Estimation Through Eq. (34).

굽힘파군의 파 경로의 거리를 전달파의 군속도(group velocity)로 나눈 값에 입력 톤버스트 신호의 최대 피크값에 대응하는 시간을 더하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$t_n = \frac{2nL}{v_g} + t_{TB} \quad (35)$$

여기서, L 은 보의 길이를 나타내고 76 kHz 톤버스트 입력신호의 주파수에 대응되는 굽힘파 군속도는 티모셴코 보의 분산방정식에서 $v_g = 2390.5$ m/s이며 입력 톤버스트 신호의 피크 시간 $t_{TB} = 0.1438$ ms이다. Eq. (35)에 의해 계산한 t_1, t_2, t_4, t_8 그리고 t_{16} 은 각각 1.148, 2.158, 4.160, 8.176 그리고 16.204 ms이다.

Fig. 7(a)에서 각각의 파경로군의 번호에 대응되는 시간지점까지의 전기역학적 신호를 잘라내었다. 주파수 분해능을 20 Hz로 통일 시키기 위해 잘라낸 전기역학적 신호들을 50 ms까지 제로패딩(zero padding)으로 처리하였다. 다음 단계로 이들 신호들에 고속 푸리에 변환을 적용하여 파워스펙트럼들을 계산하고 입력 톤버스트 신호의 파워스펙트럼으로 기준화하여 Fig. 7(b)에 도시하였다. 이렇게 도시된 Fig. 7(b)의 파워스펙트럼들을 설명의 편의를 위해 템포럴 스펙트럼(temporal spectrum)으로 명명한다.

파경로군 번호가 증가함에 따라 70~77 kHz 주파수 대역에서 점진적으로 5개의 피크들이 70.74, 71.7, 73.62, 74.6 그리고 76.54 kHz로 수렴해 가는 것을 확인할 수 있다. Eq. (15)에서 계산한 보의 공진주파수와 비교한 결과 이들 5개의 피크값들은 각각 보의 130,

131, 133, 134 그리고 136차 굽힘모드에 대응되는 공진주파수임을 확인하였다. 132와 135차 굽힘모드의 경우 PZT가 해당모드의 노드(node)에 위치하여 전기역학적 신호로 거의 감지 되지 않고 있다.

Fig. 7(c)는 134차 모드인 74.6 kHz 인근의 템포랄 스펙트럼을 확대하여 도시하였다. 74.6 kHz에 대응되는 템포랄 스펙트럼의 값들을 점으로 나타냈다. 이들 템포랄 스펙트럼의 값들이 Eq. (31)의 $\bar{\psi}_n^Q$ 에 대응된다. 74.6 kHz에 대응되는 템포랄 스펙트럼의 값들을 이용하여 얻은 측정 감쇠비 함수값들을 Eq. (34)을 대입하여 χ 를 구하였다. 이 때, Eq. (34)에서 $n_0 = 1, n_1 = 16$ 이고 Eq. (31)에서 $\bar{\psi}_0^Q = \bar{\psi}_{32}^Q$ 를 적용하였다. 여기서 $n \geq 32$ 부터 감쇠에 의해 굽힘 파권이 소멸되어 더 이상 템포랄 스펙트럼 값이 증가하지 않기 때문에 $\bar{\psi}_0^Q$ 를 $\bar{\psi}_{32}^Q$ 로 간주할 수 있다. Fig. 7(d)는 추정된 χ 을

Eq. (30)에 대입하여 계산한 감쇠비 함수와 측정 감쇠비 함수를 비교한 결과이다. 추정된 χ 로부터 계산된 감쇠비 함수와 측정 감쇠비 함수가 잘 일치하고 있음을 알 수 있다.

Fig. 8(a)에서는 재료 감쇠비 0.05, 0.1, 0.3%의 경우들에 대해서 제안된 방법으로 추정된 χ 로부터 계산된 감쇠비 함수와 측정 감쇠비 함수를 134차 모드에 대해 비교하였다. 세가지 경우 모두 추정 감쇠비 함수와 측정 감쇠비 함수가 잘 일치함을 확인할 수 있다. 위와 마찬가지로 방법으로 나머지 공진 모드들에 대해서 Eq. (34)을 통해 χ 를 추정하고 Eq. (23)를 통해 재료 감쇠비를 구한 결과를 Fig. 8(b)에 도시하고 각 모드별로 추정된 재료 감쇠비의 평균값을 표시하였다. 재료 감쇠비의 평균값은 정해로 주어진 0.05%, 0.1%, 0.3% 대비 14%, 4.4% 그리고 0.24%의 상대오차를 보여준다. 전반적으로 재료 감쇠비가 매우 작음에도 불구하고 제안된 방법이

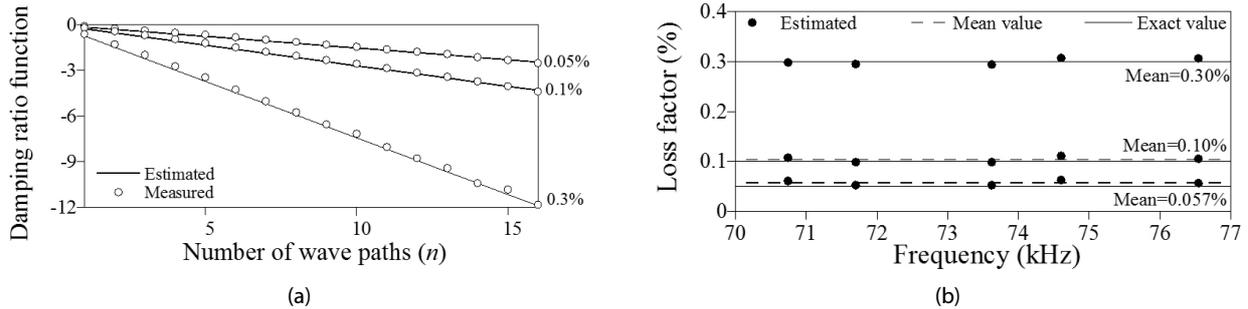


Fig. 8. (a) Comparison of Calculated and Measured Damping Ratio Function Values for 134th Mode with Respect to n After Damping Estimation Through Eq. (34); (b) Loss Factors Estimated by Proposed Method for 0.05%, 0.1% and 0.3% Material Damping

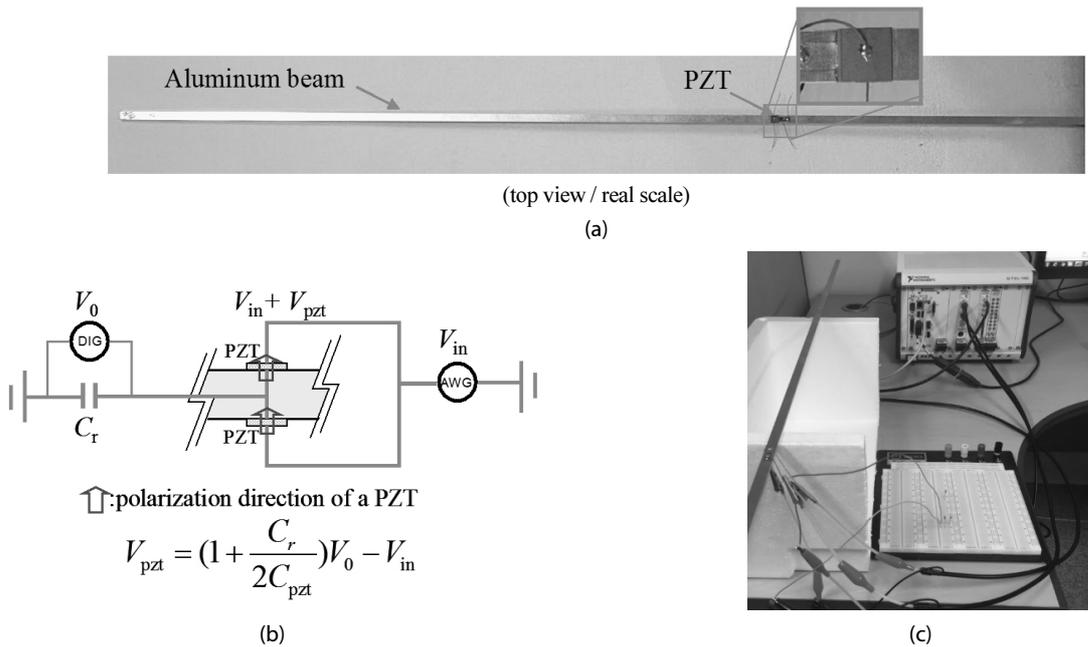


Fig. 9. Experimental Setup: (a) An Aluminum with Collocated PZTs; (b) A Schematic of Sensing Circuit; (c) Data Acquisition System

고주파수 대역에서 보의 감쇠를 PZT에서 측정된 전기역학적 신호만을 이용하여 정확하게 추정할 수 있음을 확인하였다.

4.2 실험예제

제안된 방법의 실효성을 검증하기 위한 개념 검증용 실험을 수행하였다. 실험에 사용된 알루미늄 보의 탄성계수와 밀도가 수치예제 모델과 비교하여 각각 -1.4% (69 GPa)와 +1.9% (2,750 kg/m³)의 차이가 있는 것만 제외하고 나머지 보와 PZT의 물성치와 재료는 수치예제에서 사용한 모델과 동일하다(Fig. 9(a)).

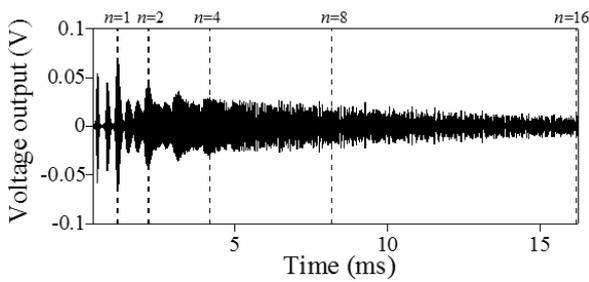
PZT에서 전기역학적 신호(V_{pzt})를 전압으로 측정하기 위해 Fig. 9(b)와 같이 자기탐지 회로를 적용하였다(An and Sohn, 2012). 회로에서 V_{in} , V_0 , C_{pzt} 와 C_r 각각 입력전압 신호, 출력전압 신호, 부착 후의 PZT의 커패시턴스 그리고 기준 커패시턴스를 나타낸다. 실험에서 사용된 C_{pzt} 와 C_r 는 디지털 멀티미터로 측정된 결과 각각 4.7 nF과 4.5 nF였다.

입력전압은 수치예제와 동일한 Fig. 6(a)의 톤버스트 입력신호를 사용하였고 입력전압의 피크 대 피크 크기는 12 V이다. 보에 병치된 PZT에 입력신호 생성은 Fig. 9(c)와 같이 16비트 임의신호 생성기(NI PXI-5422)를 사용하고 출력신호는 14비트 고속 디지털(NI PXIe-5122)를 사용하였다. 수치예제와 마찬가지로 샘플링비는 5 MHz이고 측정시간은 50 ms로서 총 250,000개의 측정데이터를 수집하였다. 순차적으로 20회 반복 실험을 통해 수집된 출력전압을 평균값을 취하여 무작위 오차를 저감시켰다.

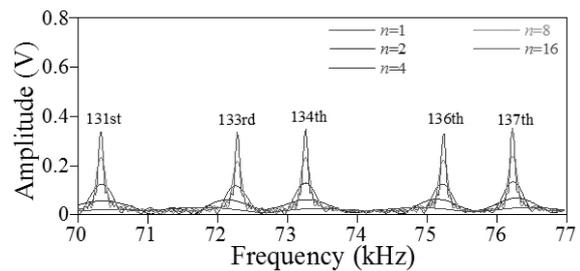
Fig. 10(a)는 자기탐지 회로를 통해 수집된 V_{pzt} 를 신호처리하여 시간영역에 대해 나타냈다. 입력전압의 가진 주파수 대역을 고려해 Hamming window를 이용한 대역 통과 FIR 필터를 통해 신호처리를 수행하였고, 대역 통과 주파수는 50와 100 kHz 사이로 설정하였다. Fig. 7(a)와 마찬가지로 굵힘파군의 번호에 대응되는 시간 지점을 $n = 1, 2, 4, 8, 16$ 으로 표시하였고 이들 지점에 대응되는 t_n 은 Fig. 7(a)와 동일한 값을 사용하였다.

Fig. 10(b)는 Fig. 10(a)에서 n 에 대응되는 전기역학적 신호의 템포럴 스펙트럼을 70~77 kHz 주파수 대역에서 도시하였다. 각 n 에 대응되는 템포럴 스펙트럼의 주파수 분해능은 수치예제와 마찬가지로 20 Hz이다. n 이 증가함에 따라 70~77 kHz 주파수 대역에서 점진적으로 5개의 피크들이 70.34, 72.28, 73.26, 75.24 그리고 76.22 kHz로 수렴해 가는 것을 확인할 수 있다. 이들 5개의 피크 주파수들을 Eq. (15)에서 계산한 보의 공진주파수와 비교한 결과 131, 133, 134, 136 그리고 137차 굵힘모드에 대응됨을 확인하였다.

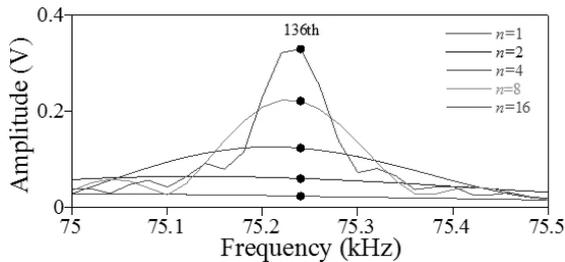
Fig. 10(c)는 136차 모드인 75.24 kHz 인근의 템포럴 스펙트럼을 확대 도시하였고 75.24 kHz에 대응되는 템포럴 스펙트럼의 값들을 점으로 표시하였다. 이들 템포럴 스펙트럼의 값들을 이용하여 Eq. (34)으로부터 추정된 χ 으로 구한 감쇠비 함수와 측정 감쇠비 함수를 비교한 결과를 Fig. 10(d)에 나타냈다. 수치예제와 마찬가지로 Eq. (34)에서 $n_0 = 1$, $n_1 = 16$ 이고 Eq. (31)의 측정 감쇠비의 $\bar{\psi}_{\infty}^Q = \bar{\psi}_{32}^Q$ 를 적용하였다. 추정된 χ 로부터 계산된 감쇠비



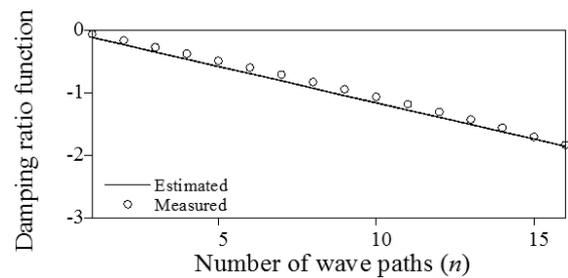
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 10. (a) Electromechanical Signals Measured at PZTs Collocated on a Beam; (b) Temporal Spectrums of (a) with Respect to Wave Path Number n between 70 and 77 kHz; (c) Temporal Spectrum Values at 75.24 kHz Corresponding to 136th Mode; (d) Comparison of Calculated and Measured Damping Ratio Function Values for 136th Mode with Respect to n After Damping Estimation Through Eq. (33).

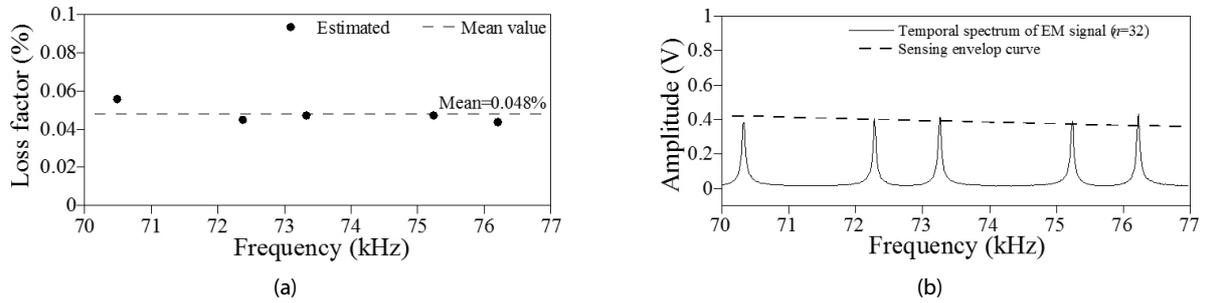


Fig. 11. (a) Loss Factors Estimated by Proposed Method; (b) Sensing Envelope Curve Computed by the Work of Park (2016) using the Mean Value of Estimated Loss Factors

함수와 측정 감쇠비 함수가 잘 일치함을 확인할 수 있다.

나머지 공진 모드들에 대해서 Eq. (34)을 통해 χ 를 추정하고 Eq. (23)를 통해 재료 감쇠비를 구한 결과를 Fig. 11(a)에 도시하였다. 실험예제의 경우 재료 감쇠비의 정해가 존재하지 않기 때문에 5개의 공진주파수에서 추정된 감쇠비의 평균을 계산하였고 그 값이 0.048%이다. 추정된 재료 감쇠비 값들이 평균값을 기준으로 큰 변동성 없이 안정적으로 분포하고 있다.

마지막으로 5개의 공진주파수에서 추정된 χ 의 평균값을 다음 식에 대입하여 보에 부착된 PZT의 탐지 역량을 나타내는 탐지포락 곡선(sensing envelope curve)을 구하였다(Park, 2016).

$$\Xi = 2i \frac{E_{pzt}}{Eh} \frac{d_{31} h_{31} b_{pzt} h_b h_{pzt}}{k_c (k_c^2 + k_c^2)} (\bar{h} \bar{k}_c^2 - h_b \bar{k}_Q^2) \sin^2 \left(\frac{\tilde{c} \pi \eta}{L} \right) \frac{e^{-\chi \tilde{c} \pi}}{1 - e^{-2\chi \tilde{c} \pi}} \quad (36)$$

여기서, E_{PZT} 와 d_{31} 는 각각 PZT의 탄성계수와 압전상수를 나타낸다.

압전소자의 전기역학적 신호를 수집하여 주파수 영역에서 파워스펙트럼 형태로 나타내주는 임피던스 분석기와 같은 신호수집 장치의 경우 통상적으로 단위 입력전압 대비 1/100정도인 0.01 V를 탐지 가능 전압으로 간주한다(Hu and Yang, 2007). 만약 탐지포락 곡선이 탐지 가능 전압보다 크다면 전기역학적 신호를 이용해서 보의 이상 유무 감지가 가능함을 의미한다.

서론에서 언급한 바와 같이 압전소자의 탐지 역량을 지배하는 가장 큰 요인은 바로 보의 감쇠 특성이다. 추정된 감쇠 특성이 직접 반영되는 탐지포락곡선과 실험에서 얻은 전기역학적 신호의 파워스펙트럼을 비교해 보면 실험을 통해 추정된 보의 감쇠 특성의 신뢰성을 확인할 수 있다. Fig. 11(b)은 Eq. (36)에서 계산된 탐지포락곡선과 전기역학적 신호의 파워스펙트럼을 비교하였다. 계산된 탐지포락곡선이 각 모드 주파수의 피크값들의 크기와 매우 잘 일치함을 확인할 수 있다. 실험검증을 통해 제안된 감쇠추정 기법이 전기역학적 신호를 이용하여 고주파수 대역에서 보의 감쇠를 정확

하게 추정함으로써 보에 부착된 압전소자의 탐지역량을 정확하게 예측할 수 있음을 확인하였다.

5. 결론

보에 부착된 압전웨이퍼의 전기역학적 신호를 이용하여 고주파수 대역의 보의 감쇠 추정 기법을 제시하였다. 보의 지점에서 발생하는 파 반사에 의한 파 전달 경로의 주기성을 통해 표현되는 굽힘파군과 굽힘파군에 의해 유도되는 압전웨이퍼의 전기역학적 신호를 이용하여 감쇠비 함수를 정의하였다. 실제 계측된 전기역학적 신호로부터 구한 측정 감쇠비 함수값과 정식화된 전기역학적 신호로부터 계산된 감쇠비 함수값을 최소화하는 최소자승법을 통해 보의 감쇠비를 추정하는 방법을 제시하였다.

압전웨이퍼가 병치된 알루미늄 보 예제를 통해 제안된 방법을 검증하였다. 먼저 수치예제에서는 일반적인 알루미늄의 재료 감쇠비를 감안하여 0.05%, 0.1% 그리고 0.3% 재료 감쇠를 가정하고 수치적으로 모사된 전기역학적 신호를 계측치로 사용하였다. 관심 고주파수 대역(70~77 kHz)에서 관찰된 5개의 공진모드별로 추정된 감쇠비의 평균값은 감쇠비가 작아질수록 추정 상대오차가 다소 증가하는 경향을 보였다. 전반적으로 보의 감쇠비가 매우 작음에도 불구하고 제안된 방법이 고주파수 대역의 보의 감쇠를 전기역학적 신호만을 이용하여 정확하게 추정하였다.

개념검증 실험예제에서는 제안된 감쇠 추정 기법의 실효성을 검증하였다. 수치예제모델과 동일한 구성으로 실험을 수행하였고 임의신호생성기와 고속디지털타이저로 구성된 신호수집시스템과 자가 탐지 회로를 이용하여 압전웨이퍼의 전기역학적 신호를 측정하였다. 대역통과필터를 이용해서 신호처리한 전기역학적 신호로부터 구한 측정 감쇠비 함수값을 이용하여 감쇠비를 추정하였다. 그 결과 관심 고주파수 대역(70~77 kHz)에서 5개의 공진 주파수에 대해 큰 변동성 없이 안정적으로 추정되었다. 추정한 평균값을 이용하여 계산된 탐지포락곡선을 실험에서 얻은 전기역학적 신호의 파워스펙트럼과 비교하였다. 탐지포락곡선은 파워스펙트럼에

나타난 각 공진 주파수의 피크값들과 잘 일치함을 확인하였고 제안된 방법이 압전웨이퍼의 탐지역량을 정확하게 예측할 수 있음을 확인하였다.

감사의 글

이 연구는 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업입니다(NRF-2012R1A1A2039044).

References

- Alleyne, D. and Cawley, P. (1992). "The interaction of Lamb waves with defects." *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, Vol. 39, pp. 381-397.
- An, Y. K. and Sohn, H. (2012). "Integrated impedance and guided wave based damage detection." *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 28, pp. 50-62.
- Annanddas, V. G. M. and Soh, C. K. (2010). "Application of electromechanical impedance technique for engineering structures: review and future issues." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 21, No. 1, pp. 41-59.
- Chopra, A. K. (2001). *Dynamics of structures 2nd edition*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- Crawley, E. F. and De Luis, J. (1987). "Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures." *AIAA Journal* Vol. 25, pp. 1373-1385.
- Fahy, F. J. and Gardonio, P. (2007). *Sound and structural vibration: radiation, transmission and response*. Academic press.
- Fung, Y. C. (1965). *Foundation of solid mechanics*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Graff, K. F. (1991). *Wave motion in elastic solids*. Dover Publications, New York, NY.
- Hu, Y. and Yang, Y. (2007). "Wave propagation modeling of the PZT sensing region for structural health monitoring." *Smart Materials and Structures*, Vol. 16, No. 3, pp. 706-716.
- Ikeda, T. (1990). *Fundamentals of Piezoelectricity*. Oxford University Press, New York, NY.
- Lim, Y. Y. and Soh, C. K. (2014). "Towards more accurate numerical modeling of impedance based high frequency harmonic vibration." *Smart Materials and Structures*, Vol. 23, No. 3.
- Mei, C. and Mace, B. R. (2005). "Wave reflection and transmission in Timoshenko beams and wave analysis of Timoshenko beam structures." *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 127, pp. 382-394.
- Park, G., Sohn, H., Farrar, C. R. and Inman, D. J. (2003). "Overview of piezoelectric impedance-based health monitoring and path forward." *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 35, pp. 451-463.
- Park, H. W. (2014). "Understanding the electromechanical admittance of piezoelectric transducers collocated on a finite beam from the perspective of wave propagation." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 25, No. 17, pp. 2122-2140.
- Park, H. W. (2016). "Evolution of electromechanical admittance of piezoelectric transducers on a Timoshenko beam from wave propagation perspective." *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, in press.
- Park, H. W., Lim, K. L., Kim, E. J. and Sohn, H. (2010). "Spectral element formulation for dynamic analysis of a coupled piezoelectric wafer and beam system." *Computers & Structures*, Vol. 88, No. 9-10, pp. 567-580.
- Piezo Systems, Inc. (2016). *PSI-5A4E piezoelectric sheets and their properties*. Available at: <http://www.piezo.com/prodsheet1sq5A.html> (accessed 25 November 2016).
- Raghavan, A. and Cesnik, C. E. S. (2007). "Review of guided-wave structural health monitoring." *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 39, pp. 91-114.
- Rose, J. L. (1999). *Ultrasonic Waves in Solid Media*. Cambridge University Press, New York, NY.