

유한요소-전달강성계수법에 의한 2차원 곡선 보 구조물의 정적해석

Static Analysis of Two Dimensional Curbed Beam Structure by Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method

최명수**

Myung-Soo Choi**

(Received 04 September 2017, Revision received 24 November 2017, Accepted 28 November 2017)

Abstract: The objective of this study is the finite element-transfer stiffness coefficient method, which is the combination of the modeling technique of finite element method and the transfer technique of transfer stiffness coefficient method, is applied in the static analyses of two dimensional curved beam structures. To confirm the effectiveness of the applied method, two computational models are selected and analyzed by using finite element method, finite element-transfer stiffness coefficient method and exact solution. The computational results of the static analyses for two computational models using finite element-transfer stiffness coefficient method are equal to those using finite element method. When the element partition number of curved beam structure is increased, the computational results of the static analyses using both methods approach the exact solution. We confirmed that the finite element-transfer stiffness coefficient method is superior to finite element method when the number of the curved beam elements is increased from the viewpoints of the computational speed and the utility of computer memory.

Key Words : Static Analysis, Curbed Beam, Finite Element Method, Transfer Stiffness Coefficient Method

1. 서 론

기계나 구조물의 초기 설계단계에서 시스템의 거동을 가능한 한 정확히 예측하는 일은 매우 중요하다. 곡선 보는 기계 분야뿐만 아니라 건설, 토목 등 다양한 분야에서 직선 보와 함께 널리 사용되는 기본 요소이다. 따라서 앞선 연구자들에 의해 곡선 보의 해석을 위한 많은 연구가 진행된 바 있다.¹⁾⁻⁴⁾

단순한 형태의 2차원 곡선 보에 대한 정적해석

은 해석적인 방법에 의해 정확한 결과를 어렵지 않게 예측할 수 있다. 그러나 곡선 보 구조물의 모양이나 재료의 성질 등이 복잡해지면 해석적인 방법으로 정확한 결과를 얻는 것은 불가능할 경우가 많다. 따라서 현재 설계자나 연구자의 대부분은 나스트란(Nastran), 앤시스(Ansys), 마이다스(Midas) 등과 같은 CAE 소프트웨어를 이용하여 구조해석을 수행하고 필요한 결과를 얻고 있다.

CAE 소프트웨어들은 대부분 유한요소법(finite element method)³⁾을 해석 알고리즘으로 채택하고

** 최명수(교신저자) : 전남대학교 해양경찰학과
E-mail : engine@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7183

** Myung-Soo Choi(corresponding author) : Department of Maritime Police Science, Chonnam National University.
E-mail : engine@jnu.ac.kr, Tel : 061-659-7183

있다. 유한요소법은 단순한 요소들의 조합으로 복잡한 형상의 구조물을 해석할 수 있는 장점을 가지고 있지만, 모델링에 사용되는 요소의 개수에 따라 계산 결과에 큰 영향을 미치게 된다. 일반적으로 모델링에 사용되는 요소의 개수가 작으면 계산 결과의 정확성이 떨어지고, 반면에 요소의 개수가 많으면 계산 결과의 정확성은 올라가지만, 계산 시간이 급격히 증가하는 취약점이 있다.

상기 유한요소법의 취약점을 극복하기 위한 방안으로 저자 등은 유한요소-전달강성계수법(finite element-transfer stiffness coefficient method)⁴⁾⁵⁾을 개발하여 제안한 바 있다. 이 방법은 유한요소법의 모델링 과정과 전달강성계수법(transfer stiffness coefficient method)⁶⁾의 전달 과정을 결합하여 구조물의 해석을 빠르게 수행하는 해석 기법이다.

이 연구에서는 유한요소-전달강성계수법을 이용하여 2차원 곡선 보 구조물에 대한 정적해석 알고리즘을 정식화하고 이를 토대로 전산 프로그램을 개발하여 해석을 수행한다. 그리고 제시된 방법의 해석 결과의 유효성을 확인하기 위해 기존의 유한요소법 및 엄밀해에 의한 결과와 비교 검토한다.

2. 정적해석 알고리즘

2.1 2차원 곡선 보 구조물의 모델링

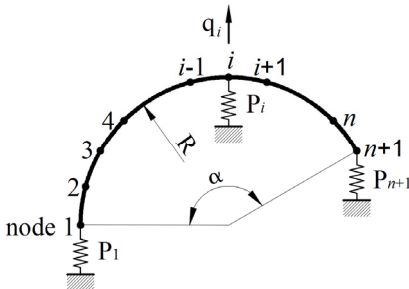


Fig. 1 Analytical model

2차원 곡선 보 구조물의 정적해석 알고리즘을

정식화하기 위하여 Fig. 1과 같은 2차원 곡선 보 구조물을 해석 모델로 설정한다. 2차원 곡선 보 구조물은 Fig. 1과 같이 다수의 곡선 보요소와 경계조건 및 지지조건을 모델링한 기초지지 스프링으로 구성된다. Fig. 1에서 R과 α 는 각각 곡선 보의 반경과 열림각이고, P 및 q는 임의의 위치에 존재하는 기초지지 스프링 및 외력을 의미한다.

전체 곡선 보를 n 개의 곡선 보요소로 분할하면, 인접 곡선 보요소 사이의 결합점 및 양 단을 절점(node)이라 정의하고, 좌단에서 우단까지 각 절점을 순서대로 절점 1, 절점 2, ..., 절점 $n+1$ 이라 부른다.

2차원 곡선 보 구조물의 면내 정적해석을 수행할 경우, 각 절점의 변위벡터는 $\mathbf{d} = \{u, w, \theta\}^T$ 가 되고, 여기서 u 는 절점의 접선 방향의 변위, w 는 반경 방향의 변위, 그리고 θ 는 각변위이다. 그리고 각 절점의 힘벡터는 $\mathbf{f} = \{f_u, f_w, M_\theta\}^T$ 와 같고, 여기서 f_u 는 접선 방향의 힘, f_w 는 반경 방향의 힘, 그리고 M_θ 는 모멘트이다.

이 논문에서 하첨자 i 는 변수에 따라 i 번째 절점 또는 i 번째 곡선 보요소를 의미하고, 힘벡터와 절점강성계수행렬을 나타내는 기호(\mathbf{f} , \mathbf{S}) 위에 “ \wedge ”가 붙은 것은 절점 좌측을 의미하고, “ \vee ”가 붙은 것은 절점 우측을 의미한다.

2.2 곡선 보 요소의 강성행렬

절점 i 와 절점 $i+1$ 사이에 존재하는 i 번째 2차원 곡선 보요소의 강성행렬($\mathbf{K}_i^{(e)}$)은 기존의 유한요소해석을 통해 제안된 다양한 형태가 존재하며, 그 중 하나는 식 (1)과 같다.³⁾

$$\mathbf{K}_i^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_i & \mathbf{B}_i \\ \mathbf{C}_i & \mathbf{D}_i \end{bmatrix} = a\mathbf{k}_1 + b\mathbf{k}_2, \quad (1)$$

여기서 $a = EA/(420R\beta)$, $b = EI/(R\beta)^3$ 이고, E 는 곡선 보요소의 탄성계수, A 는 단면적, R 은 반경, β 는 열림각, I 는 단면2차모멘트이다. 6×6 행렬 \mathbf{k}_1 및 \mathbf{k}_2 는 대칭행렬로서 다음 식과 같다.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_{1(1,1)} &= 4\beta^4 - 70\beta^2 + 420, \quad \mathbf{k}_{1(1,2)} = -2\beta(11\beta^2 - 105), \\
 \mathbf{k}_{1(1,3)} &= -R\beta^2(4\beta^2 - 35), \quad \mathbf{k}_{1(1,4)} = -3\beta^4 + 70\beta^2 - 420, \\
 \mathbf{k}_{1(1,5)} &= -\beta(13\beta^2 - 210), \quad \mathbf{k}_{1(1,6)} = R\beta^2(3\beta^2 - 35), \\
 \mathbf{k}_{1(2,2)} &= 156\beta^2, \quad \mathbf{k}_{1(2,3)} = 22R\beta^3, \\
 \mathbf{k}_{1(2,4)} &= \beta(13\beta^2 - 210), \quad \mathbf{k}_{1(2,5)} = 54\beta^2, \\
 \mathbf{k}_{1(2,6)} &= -13R\beta^3, \quad \mathbf{k}_{1(3,3)} = 4R^2\beta^4, \\
 \mathbf{k}_{1(3,4)} &= R\beta^2(3\beta^2 - 35), \quad \mathbf{k}_{1(3,5)} = 13R\beta^3, \\
 \mathbf{k}_{1(3,6)} &= -3R^2\beta^4, \quad \mathbf{k}_{1(4,4)} = 4\beta^4 - 70\beta^2 + 420, \\
 \mathbf{k}_{1(4,5)} &= 2\beta(11\beta^2 - 105), \quad \mathbf{k}_{1(4,6)} = -R\beta^2(4\beta^2 - 35), \\
 \mathbf{k}_{1(5,5)} &= 156\beta^2, \quad \mathbf{k}_{1(5,6)} = -22R\beta^3, \\
 \mathbf{k}_{1(6,6)} &= 4R^2\beta^4,
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} 3\beta^2 - 6\beta - 3R\beta^2 & 3\beta^2 & 6\beta & -3R\beta^2 \\ 12 & 6R\beta & -6\beta & -12 & 6R\beta \\ & 4R\beta^2 & -3R\beta^2 & -6R\beta & 2(R\beta)^2 \\ & & 3\beta^2 & 6\beta & -3R\beta^2 \\ S & Y & M & 12 & -6R\beta \\ & & & & 4R\beta^2 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

2.3 전달식

전달강성계수법⁶⁾의 전달 과정을 일반화하여 간단히 정리하면 다음과 같다.

2차원 곡선 보 구조물은 다수의 곡선 보요소와 기초지지 스프링으로 구성되므로, 이들 요소들에 대한 전달식을 먼저 유도한다. 기초지지 스프링 (\mathbf{P}_i)으로 지지된 절점 i 에 외력(\mathbf{q}_i)이 작용할 경우, 절점 i 의 좌측에서 절점 i 의 우측으로 절점강성계수행렬 및 힘보정벡터의 전달식을 구하면

$$\check{\mathbf{S}}_i = \hat{\mathbf{S}}_i + \mathbf{P}_i, \quad \check{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{e}}_i - \mathbf{q}_i, \quad (3)$$

이고, 여기서

$$\mathbf{P}_i = \begin{bmatrix} k_u & 0 & 0 \\ 0 & k_w & 0 \\ 0 & 0 & K_\theta \end{bmatrix}_i, \quad \mathbf{q}_i = \begin{Bmatrix} q_u \\ q_w \\ Q_\theta \end{Bmatrix}_i. \quad (4)$$

그리고 k_u 와 k_w 는 각각 접선 방향 및 반경 방향 기초지지 스프링의 스프링상수이고, K_θ 는 회전 방향의 스프링상수이다. q_u 와 q_w 는 접선 방향 및 반경 방향의 외력이고, Q_θ 는 회전 방향으로 외부에서 작용하는 모멘트다.

절점 i 의 우측과 절점 $i+1$ 의 좌측 사이에 존

재하는 i 번째 곡선 보요소에서, 절점 i 의 우측에서 절점 $i+1$ 의 좌측으로 절점강성계수행렬 및 힘보정벡터의 전달식을 구하면

$$\hat{\mathbf{S}}_{i+1} = \mathbf{D}_i + \mathbf{C}_i \mathbf{V}_i, \quad \hat{\mathbf{e}}_{i+1} = \mathbf{C}_i \mathbf{h}_i, \quad (5)$$

이고, 여기서

$$\mathbf{V}_i = -\mathbf{G}_i^{-1} \mathbf{B}_i, \quad \mathbf{G}_i = \check{\mathbf{S}}_i + \mathbf{A}_i, \quad \mathbf{h}_i = -\mathbf{G}_i^{-1} \check{\mathbf{e}}_i. \quad (6)$$

식 (5)와 (6)에서 행렬 \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i , \mathbf{C}_i , \mathbf{D}_i 는 식 (1)에 나타낸 요소 강성행렬의 부분행렬들이다.

2.4 변위 계산

좌단의 경계조건을 절점 1의 기초지지 스프링 (\mathbf{P}_1)으로 모델링하고, 절점 1에 외력 \mathbf{q}_1 이 작용한다면, 절점 1의 힘의 평형관계로부터 절점 1 우측의 절점강성계수행렬($\check{\mathbf{S}}_1$) 및 힘보정벡터($\check{\mathbf{e}}_1$)를 다음 식과 같이 쉽게 구할 수 있다.

$$\check{\mathbf{S}}_1 = \mathbf{P}_1, \quad \check{\mathbf{e}}_1 = -\mathbf{q}_1, \quad (7)$$

절점 2부터 마지막 절점인 절점 $n+1$ 의 절점강성계수행렬 및 힘보정벡터는 상기 식 (3)과 식 (5)를 연속적으로 적용하면 모두 구할 수 있다.

우단인 절점 $n+1$ 의 변위벡터는 다음 식과 같이 절점 $n+1$ 의 절점강성계수행렬 및 힘보정벡터로부터 구할 수 있다.

$$\mathbf{d}_{n+1} = -(\check{\mathbf{S}}_{n+1})^{-1} \check{\mathbf{e}}_{n+1}, \quad (8)$$

절점 $n+1$ 을 제외한 나머지 절점의 변위벡터는 다음 식을 이용하여 순차적으로 계산한다.

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{V}_i \mathbf{d}_{i+1} + \mathbf{h}_i \quad (i = n, n-1, \dots, 1). \quad (9)$$

3. 수치 계산 결과 및 고찰

2개의 2차원 곡선 보 구조물을 계산 모델로 선정하여 기존의 유한요소법과 이 연구에서 제시한 유한요소-전달강성계수법으로 정적해석을 수행한

후, 계산 결과와 계산 시간 등을 비교한다.

3.1 한단 고정인 1/4 링 구조물

Fig. 2에 나타낸 계산 모델 I은 사각단면을 갖는 2차원 곡선 보 구조물이고, 단면의 폭은 0.254 cm, 높이는 0.508 cm이다. 곡선 보의 열림각은 90°, 반경은 10.719 cm, 탄성계수는 6.894×10^6 N/cm²이다. 경계조건은 고정-자유이고, 자유단에 양의 x축 방향으로 4.448 N의 외력이 작용한다.

곡선 보를 100개, 200개, 500개, 1,000개의 곡선 보요소로 분할하여 모델링한 후, 유한요소법과 유한요소-전달강성계수법으로 정적해석을 수행하였다. Table 1은 구조물의 자유단에서 x축 방향의 변위를 계산한 결과이다. Table 1에서 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법의 결과는 일치하였고 곡선 보요소의 분할 수가 증가할수록 계산 결과가 엄밀해⁷⁾에 수렴해 감을 확인할 수 있었다.

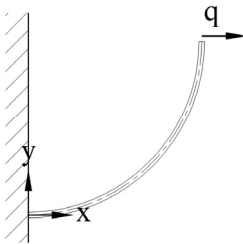


Fig. 2 Computational model I

Table 1 Displacements of x-axis direction at free end of computational model I [unit : cm]

Number of Elements	FEM	FE-TSCM	Exact Solution
100	0.2114	0.2114	0.2249
200	0.2214	0.2214	
500	0.2244	0.2244	
1000	0.2248	0.2248	

Fig. 3에서 실선은 계산 모델 I을 1,000개의 곡선 보요소로 모델링하여 유한요소-전달강성계수법으로 변형된 형상을 구한 결과이다. 변형된 부분의 형상을 드러내기 위해 변위를 10배 확대하였다.

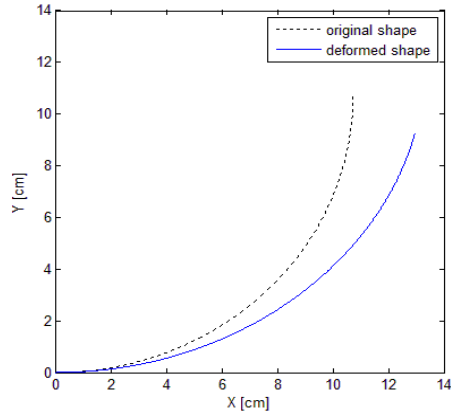


Fig. 3 Shape of computational model I

Table 2 CPU times for computational model I

Number of Elements	FEM [sec]	FE-TSCM [sec]
100	0.024	0.021
200	0.052	0.030
500	0.330	0.058
1000	1.872	0.103

유한요소법과 유한요소-전달강성계수법으로 계산 모델 I의 정적해석을 수행하는데 소요된 시간을 Table 2에 제시하였다. 두 방법 모두 계산 시간의 크지는 않았지만, 계산 속도의 측면에서 유한요소-전달강성계수법이 유한요소법보다 우수하다는 것을 알 수 있었다. 특히, 모델링에 사용된 곡선 보요소의 수가 증가할수록 그 차이는 더욱 커짐을 확인할 수 있었다.

곡선 보 구조물의 구조해석에서 모델링에 사용된 곡선 보 요소의 분할 수가 증가할수록 정적해석의 결과는 우수하였다. 유한요소법은 곡선 보요소의 수가 증가하면, 계산 시간이 급증함을 알 수 있었다. 반면에, 이 연구에서 제시한 유한요소-전달강성계수법은 곡선 보요소의 증가에도 불구하고 계산 시간이 급증하지 않으면서도 계산 정도는 우수하였다.

3.2 양단 고정인 반원

Fig. 4에 나타낸 계산 모델 II는 사각단면을 갖

는 2차원 반원형 곡선 보이고, 단면의 폭과 두께는 2.54 cm이다. 곡선 보의 열림각은 180°, 반경은 43.18 cm, 탄성계수는 6.8944×10^6 N/cm²이다. 경계 조건은 양단 고정이고, 구조물의 중앙에 음의 x축 방향으로 8,896 N의 외력이 작용한다.

계산 모델 II를 100개, 200개, 500개, 1,000개의 곡선 보요소로 분할한 후, 유한요소법과 유한요소-전달강성계수법으로 정적해석을 수행하였다. Table 3은 구조물의 중앙에서 x축 방향의 변위를 계산한 결과이다. Table 3에서 유한요소-전달강성계수법과 유한요소법의 결과는 일치하였다. 그리고 곡선 보요소의 분할 수가 증가할수록 계산 결과가 엄밀해³⁾에 수렴해감을 확인할 수 있었다.

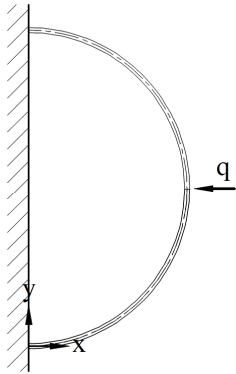


Fig. 4 Computational model II

Table 3 Displacements of x-axis direction at center of computational model II [unit : cm]

Number of Elements	FEM	FE-TSCM	Exact Solution
100	-0.3513	-0.3513	-0.3595
200	-0.3574	-0.3574	
500	-0.3591	-0.3591	
1000	-0.3594	-0.3594	

Fig. 5에서 실선은 계산 모델 II를 1,000개의 곡선 보요소로 모델링하여 유한요소-전달강성계수법으로 구한 변형된 형상이다. 변형된 부분의 형상을 드러내기 위해 변위를 10배 확대하였다.

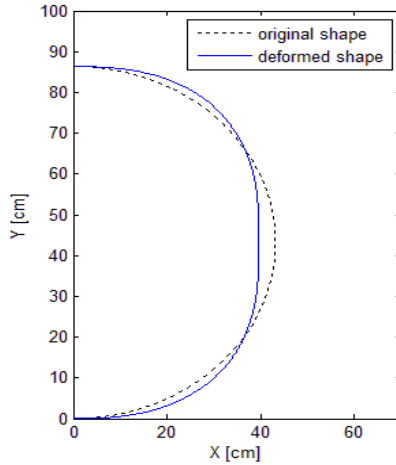


Fig. 5 Shape of computational model II

Table 4 CPU times for computational model II

Number of Elements	FEM [sec]	FE-TSCM [sec]
100	0.024	0.021
200	0.052	0.030
500	0.325	0.057
1000	1.853	0.101

계산 모델 II의 정적해석을 유한요소법과 유한요소-전달강성계수법으로 수행하는데 소요된 시간을 Table 4에 제시하였다. 여기서도 계산 속도의 측면에서 유한요소-전달강성계수법이 유한요소법보다 우수하다는 것을 알 수 있었다.

계산 메모리의 운용 측면에서 고찰해보면, 2차원 곡선 보 구조물의 계산 모델을 최대 1,000개의 보요소로 모델링할 경우, 절점의 수가 1,001개가 되고, 절점당 자유도가 3이므로 유한요소법에서 사용되는 전체 강성계수행렬의 크기는 최대 $3,003 \times 3,003$ 이나 된다. 그러나 유한요소-전달강성계수법은 요소가 아무리 많아도 전달 과정을 사용하므로 절점강성계수행렬의 크기는 3×3 을 유지한다. 따라서 컴퓨터 메모리의 운용적인 측면에서도 유한요소-전달강성계수법의 우수성을 확인할 수 있다.

4. 결 론

이 연구에서는 유한요소법의 장점인 모델링의 편리성과 체인과 같이 연속적으로 구성된 구조물의 해석에서 빠른 속도로 계산할 수 있는 전달강성계수법을 조합한 알고리즘인 유한요소-전달강성계수법을 2차원 곡선 보 구조물의 정적해석에 도입하였다.

해석 결과의 유효성을 확인하기 위하여, 두 가지 2차원 곡선 보 구조물을 대상으로 이 연구에서 제시된 유한요소-전달강성계수법 뿐만 아니라 엄밀해와 기존의 유한요소법에 의한 정적해석 결과를 서로 비교하였다. 그 결과, 유한요소-전달강성계수법의 정적해석 결과는 유한요소법의 결과와 완전히 일치하였다. 따라서 유한요소-전달강성계수법의 계산 결과의 신뢰성을 확인할 수 있었다. 그리고 양 방법의 계산 결과는 2차원 곡선 보 구조물의 모델링에 사용된 곡선 보요소의 분할수를 증가할수록 엄밀해에 접근함을 알 수 있었다. 그런데 유한요소법은 곡선 보요소의 분할수를 증가할수록 계산 시간이 급증하는 취약점을 보여준 반면에 유한요소-전달강성계수법은 계산 시간이 완만히 증가하여 유한요소법보다는 훨씬 적은 계산 시간이 소요되었다. 그리고 계산 메모리의 운용적인 측면에서도 유한요소-전달강성계수법이 우수함을 확인할 수 있었다.

후 기

이 논문은 전남대학교 학술연구비(과제번호: 2016-2723) 지원에 의하여 연구되었음.

References

1. F. B. Seely and J. O. Smith, 2012, "Introduction to Finite Elements in Engineering (2nd Edition)", John Wiley & Sons, New York, pp. 137-187.
2. H. Ryu and H. Sin, 1996, "A 2-Node Strain Based Curved Beam Element", Transactions of the Korean Society of Mechanical Engineers (A), Vol. 18, No. 8, pp. 2540-2545.
3. T. Y. Yang, 1985, "Finite Element Structural Analysis", Prentice-Hall, New York.
4. M. Choi and D. Yeo, 2017, "Free Vibration of Curved Beams Regarded as Discrete System Using Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method", Journal of the Korean Society for Power System Engineering, Vol. 21, No. 1, pp. 37-42.
5. M. Choi, J. Byun and D. Yeo, 2015, "Structural Analysis of Axisymmetric Conical Shells Using Finite Element-Transfer Stiffness Coefficient Method", Journal of the Korean Society for Power System Engineering, Vol. 19, No. 1, pp. 38-44.
6. D. H. Moon and M. S. Choi, 2000, "Vibration Analysis for Frame Structures Using Transfer of Dynamic Stiffness Coefficient", Journal of Sound and Vibration, Vol. 234, No. 5, pp. 725-736.
7. R. J. Roark and W. C. Young, 1975, "Formulas for Stress and Strain (5th Edition)", McGraw-Hill, Tokyo, pp. 214-215.