East Asian Math. J.
Vol. 33 (2017), No. 2, pp. 199-216
http://dx.doi.org/10.7858/eamj.2017.015

두 조작의 합성으로서의 유리수 곱의 이론적 배경 고찰

A Study on the Theoretical Background of the Multiplication of Rational Numbers as Composition of Operators

최 근 배*

ABSTRACT. A rational number as operator is eventually that it is considered a mapping. Depending on how selecting domain (the target of operation by rational number) and codomain (including the results of operations by rational number), it is possible to see the rational in two aspects. First, rational numbers can be deal with functions if we choose the target of operation by rational number as a number field containing rationals. On the other hand, if we choose the target of operation by rational number as integral domain $\mathbb{Z}$, then rational numbers can be regarded as partial functions on $\mathbb{Z}$. In this paper, we regard the rational numbers with a view of partial functions, we investigate the theoretical background of the relationship between the multiplication of rational numbers and the composition of rational numbers as operators.

Ⅰ. 서론

수학에서 연산자(operator)는 사상(寫像)과 거의 같은 뜻으로 사용된다. 이때 정의역을 명시하지 않고 연산자를 조작의 관점에서 막연히 사용하는 경우도 있다. 예를 들어, 학교수학에서 유리수를 연산자의 관점으로 보는 경우 정의역을 명시하지 않는다. 특히, 유리수를 분수의 관점으로 취급하는 초등학교의 경우에는 연산자의 관점이 조작으로서의 의미를 강하게 드러낸다.

유리수를 연산자의 관점에서 본다는 것은 결국 유리수를 사상 또는 함수의 관

* 교신저자
Received January 16, 2017; Accepted February 19, 2017.
2010 Mathematics Subject Classification: 97D20
Key Words: 연산자 관점에서 유리수, 부분함수, 가역반군
** 이 논문은 2016학년도 제주대학교 학술진흥연구비 지원사업에 의하여 연구되었음

(pISSN 1226-6973, eISSN 2287-2833)

점으로 생각한다는 것이다. 유리수에 의한 조작의 대상인 정의역과 결과를 포함하는 공역을 어떻게 선택하느냐에 따라 유리수를 두 가지 관점으로 볼 수 있다. 먼저, 정의역과 공역을 유리수를 포함하는 수 집합으로 생각하면 유리수는 함수의 관점으로 다루어질 수 있다. 반면, 정의역과 공역을 정수(integer)의 집합으로 한정 선택하는 경우에는 유리수를 부분함수(partial function; Lawson, 1998, p. 4)의 관점으로 다룰 수 있다. 여기서 $f: X \to Y$가 부분함수라 함은 f가 일반적으로 함수가 되지 않지만 정의역 X를 적당히 축소하면 축소된 영역에서 함수가 될 때를 의미한다. 예를 들어, 유리함수

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}\ (c \neq 0)$$

는 부분함수이다. 여기서 $\mathbb{R}$은 실수의 집합을 의미한다. 실제로, 위의 유리함수 f의 정의역은 다음과 같다.

$$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

특히, <그림 I-1>과 같이 초등학교의 경우 ‘6의 $\frac{2}{3}$는 얼마인가?’와 같은 이산량을 다룰 때, 결과가 자연수가 되도록 유리수를 부분함수의 관점으로 다룬다고 할 수 있다. 즉, $\frac{2}{3}$를 3개를 2개로 만드는 연산자(operator)로 취급한다. 이 경우 연산자 $\frac{2}{3}$의 정의역은 3의 배수의 집합 $3\mathbb{Z}$가 된다. 여기서 $\mathbb{Z}$는 정수의 집합을 의미한다. 즉,

$$\mathrm{dom}\left(\frac{2}{3}\right) = \{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2}{3}(x) = \frac{2}{3} \cdot x \in \mathbb{Z}\} = 3\mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{ccc} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \in & 3\mathbb{Z} & \subset \mathbb{Z} \\ & \Big\downarrow {\scriptstyle \frac{2}{3}} & \\ \bullet\bullet\bullet\bullet & \mathbb{Z} & \end{array}$$

<그림 I-1> $\mathbb{Z}$상에서의 부분함수로서 $\frac{2}{3}$

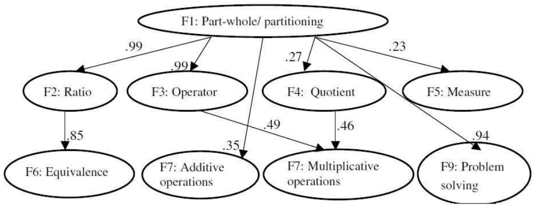
정영우·김부윤(2012)도 이와 유사한 관점으로 유리수를 다루고 있다. 그러나 유리수를 부분함수의 관점으로 다루는 우리의 관점과는 달리, 정수환(integer ring)

상에서 주 아이디얼(principle ideal)에서 정의되는 준동형사상(homomorphism)의 관점으로 다루고 이러한 준동형사상들의 모임에 적당한 동치관계를 도입하여 동치류들의 모임으로 유리수 집합을 구성하고 있다. 한편, 우리의 경우는 유리수를 부분함수(실제로, 부분 전단사함수, partial bijection; Lawson, 1998, pp. 4-5)의 관점으로 다루고 있기 때문에 자연스럽게 대수적인 구조 중 하나인 역반군(inverse semigroup; Howie, 1976, pp.133-135)를 생각해볼 수 있다.

이 논문에서는 위에서 언급한 두 가지의 관점 중에서 유리수를 부분함수의 관점으로 간주하고, '두 유리수의 곱'과 '연산자 의미로서의 두 유리수의 합성(composition)' 사이의 관계를 이어주는 수학적인 이론적 배경을 고찰하고자 한다.

Ⅱ. 분수의 개념

분수는 아동들이 초등학교 교육시기에 경험할 수 있는 가장 복잡한 수학적 개념 중 하나이다. 이러한 복잡성을 주는 주된 원인 중의 하나는 분수가 서로 연관된 다섯 개(전체-부분, 비, 연산자, 몫 그리고 측정)의 구인을 아우르는 다면적인 개념으로 구성되어있기 때문이다(Charalambous, 2005). <그림 II-1>는 분수를 상위의 전체-부분개념과 그 하위의 4개의 구인들과 분수 연산 및 문제해결과의 경로 모델을 보여주고 있다.



<그림 II-1> 분수의 다섯 개 구인과 분수연산 및 문제해결과의 연결 경로 모델(Charalambous, 2005, p.237).

위와 같이 분수의 개념이 복잡한 이유로 미국의 The Rational Number Project는 1979년 이후 National Science Foundation의 지원을 받아 지금까지 계속되고 있다.[1]

1. 전체-부분

1) http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/

전체-부분으로서의 분수는 분수를 이해하는 가장 선행되는 개념으로 분수와 관련된 용어나 개념이 이로부터 파생된다. 전체-부분으로서의 분수개념은 단위화하기(unitizing), 등분할하기(equi-partitioning), 재편하기(disembedding)의 3가지 기본 조작으로 구성된다.

학교수학에서는 일반적으로 연속량에 대한 전체-부분으로서의 분수개념을 지도한 후에 이산량에 대한 전체-부분 분수개념을 지도한다. 그러나 우리나라의 경우 이산량에 대한 전체-부분 개념으로서의 분수 지도내용이 연속량에 비해서 현저히 적다. 특히, 이산량인 경우 '몇 묶음 중의 몇 묶음'을 분수를 나타내는 활동이 초등학교 교과서에 많이 드러나 있지 않으며 오히려 이와 같은 전체-부분의 상태를 분수로 나타내는 활동보다는 '몇 묶음 중의 몇 묶음은 얼마입니까?'라는 양의 의미를 포함하는 관점으로 다루는 경향이 있다.

<그림 II-1>에 따르면 전체-부분 개념의 분수는 비 개념의 분수 및 연산자 개념의 분수와 연관된 요인의 변분(variation of factor)을 98%(회귀계수 0.99의 자승) 정도로 설명할 수 있음을 보여주고 있는 반면 몫으로의 분수와 측정으로서의 분수개념과 연관된 요인의 변분을 설명하는 것에는 훨씬 작은 설명력을 보여주고 있다.

2. 비(율)

비(ratio) 또는 비율로서의 분수 개념은 두 양 사이의 관계를 상대적으로 나타내는 것으로 단위(unit)의 설정에 따라서 다양하게 정의된다. 예를 들어, 학생 7명 중 여학생이 2명인 경우, 여학생은 전체 학생수의 $\frac{2}{7}$이고 이는 비율분수이다. 남학생에 대한 여학생의 비율은 $\frac{2}{5}$이다. 또한 앞의 $\frac{2}{7}$는 전체(7명)과 부분(여학생 2명) 사이의 관계로 볼 수 있으므로 전체-부분 개념으로서의 분수로 해석할 수도 있다.

<그림 II-1>에 따르면 비 분수 개념은 분수의 동치관계에 높은 설명력을 가지고 있음을 알 수 있으며, 동치관계는 정수로부터 유리수를 구성에서 하는데 중요한 역할을 한다.

3. 몫

몫으로서의 분수는 범자연수(whole number) 범위에서의 나눗셈을 유리수 범위까지 확장하여 나타낸 개념이다. 예를 들어, '피자 3판을 4명의 학생이 나누어 먹을 때 각 학생이 먹을 수 있는 피자의 양은?'

실제로, 정수범위에서 의미를 지니는 나눗셈 알고리즘(division algorithm)에서의 몫(quotient)과 나머지(remainder) 개념은 유리수 범위에서는 몫만 있을 뿐 나

머지는 없다.

<그림 II-1>에서 전체-부분으로서의 분수개념은 몫으로서의 분수개념에 설명력이 7%로 비교적 낮다. 이러한 이유 중 하나는 전체(whole)와 단위(unit)가 일치하지 않는 경우가 많기 때문이다. 예를 들어 3÷4를 등분제 개념으로 즉, 등분할 개념(전체-부분)으로 설명할 때 전체는 3이고 단위는 절대단위인 1이다.

4. 측정

자연수 개념은 세는 과정에서 일대일 대응에 대한 불변량의 개념을 추상화한 것인 반면, 분수개념은 양을 측정하는 과정에 그 뿌리를 두고 있다는 것은 널리 받아들여지고 있다(정은실, 2006). 이러한 관점 즉, 역사적 맥락에서 분수를 지도해야 한다고 주장하는 학자들은 분수의 개념이 측정의 과정 속에서 나타난 만큼, 전체-부분의 관점에서의 분수 도입을 비판하면서, 측정의 맥락에서 분수를 도입해야 한다고 한다. 실제로, <그림 II-1>에서 전체-부분으로서의 분수개념은 측정으로서의 부분개념에 설명력이 다른 요인들에 비해서 가장 낮음을 알 수 있다.

Steffe(2002)는 분수 스키마의 구성을 수세기 스키마로부터 재조직된 스키마로 보고 있다. 예를 들어, 3은 1이라는 단위가 3개가 모인 것으로 같은 해석으로 $\frac{3}{5}$은 단위 $\frac{1}{5}$이 3개가 모인 것으로 인식하는 것이다. 이와 같은 관점은 분수를 측정의 관점에서 해석하고 있다고 볼 수 있다.

5. 연산자

유리수를 연산자로 해석한다는 것은 유리수를 함수로 생각한다는 것이다. 이와 같은 역할에 있어, 유리수는 어떤 집합이나 영역을 택해서 이것을 또 다른 집합이나 영역으로의 사상으로서 작용한다는 것이다. 좀 더 단순화하면, 유리수의 연산자 개념은 줄이거나 늘이거나, 축소하거나 확장하거나, 곱하거나 나누거나와 같은 작용에 관한 것이다(Lamon, 2008). 연산자는 다음과 같은 트랜스포머(transformer)이다(Lamon, 2008, p. 151).

· 선분을 길게 하거나 짧게 하거나
· 이산 대상들의 집합에 있는 항목의 수를 증가시키거나 감소시키거나
· 삼각형이나 직사각형 같은 기하평면에 있는 도형을 택해서 그 것을 같은 모양의 크거나 작은 도형으로 사상

유리수의 연산자적인 해석은 전체-부분의 관점 또는 몫의 관점의 해석과는 매우 다르다. 예를 들어, 원을 ‘4등분한 후 그 중 3개’, ‘3개의 빵을 4명이 나누어 먹

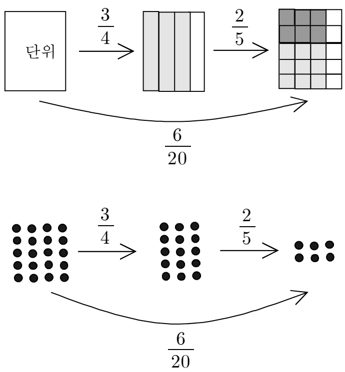
을 때 1명이 먹을 수 있는 양'을 $\frac{3}{4}$이라고 할 때는 $\frac{3}{4}$을 연산자 분수라고 부르지 않지만, $\frac{3}{4}$을 '4개를 3개로 만든다.'라는 관점의 해석은 이를 연산자로 인식하고 있다고 볼 수 있다. 실제로, 연산자는 다음과 같은 간단한 관계로 정의할 수 있다(Lamon, 2008, p. 151):

$$\frac{\text{배출 양(quantity out)}}{\text{유입 양(quantity in)}}$$

Ⅲ. 연구의 실제

1. 교과서 분석

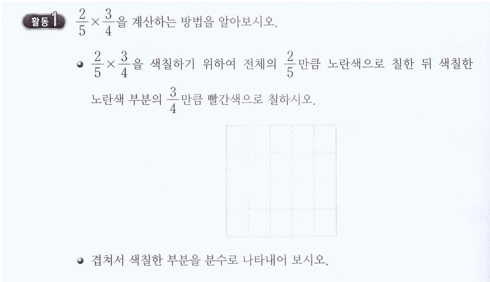
유리수의 연산자적인 해석은 분수들의 동치나 곱의 연산을 이해하는데 특별히 유용한다(<그림 II-1> 참조). 그 이유는 주어진 분수와 동치인 분수를 찾는 문제는 같은 유입-배출 변환을 수행하는 함수기계를 찾는 것이고, 분수끼리의 곱은 두 함수의 합성(composition)과 관련된 것이기 때문이다(Behr, Lesh & Silver, 1983). 실제로, 두 연산자 분수의 합성은 매우 자연스럽게 분수 곱을 이끈다. 예를 들어, $\frac{2}{5} \circ \frac{3}{4}$는 '단위의 $\frac{3}{4}$의 $\frac{2}{5}$을 택한다.'를 의미하고 이것은 '단위의 $\frac{6}{20}$ 또는 $\frac{3}{10}$을 택하는 것'과 동등한 것이다. 두 연산자 분수의 합성을 그림으로 나타내면 <그림 III-1>과 같다.



<그림 III-1> 연산자의 합성

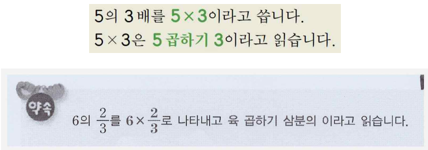
한편, <그림 III-2>는 초등학교 수학교과서에 포함된 '두 분수의 곱'과 '두 조

작의 합성' 사이의 관계를 나타내는 활동이다. 실제로, 여기에서의 두 조작행위[2]는 다음과 같다. 첫 번째 행위: 단위의 $\frac{2}{5}$만큼 노란색으로 색칠하기, 두 번째 행위: 색칠한 노란부분의 $\frac{3}{4}$만큼 빨간색으로 색칠하기

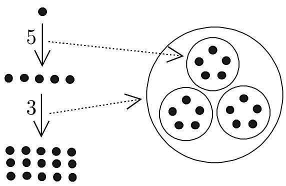


<그림 III-2> 연산자의 합성과 곱(교육부, 2013)

이제, <그림 III-3>의 활동을 살펴보자. 5의 3배와 관련된 교과서 활동은 다음과 같다: 먼저 '5개씩 묶어 보시오.' 그 후 '사탕의 수는 5의 몇 배입니까?' 즉, <그림 III-4>와 같이 연산자의 관점에서 설명할 수 있다.



<그림 III-3> 연산자와 곱

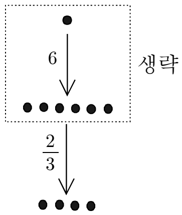


<그림 III-4> 5×3의 연산자적인 해석과 두 조작활동

반면, 6의 $\frac{2}{3}$와 관련된 교과서 활동은 이전학년에서 배운 이산양의 분수의 개

2) 우리나라에서는 미국의 경우와는 달리 합성($\circ$)과 곱은 역순이다. 예를 들어, $g\circ f$는 f가 먼저, 그 후 g가 적용되지만 $n\times m$는 'n의 m(배)'와 같이 먼저 n이 만들어 지고, 그 후 m이 적용된다. 그러나 미국의 경우는 $n\times m$는 'n of m' 즉, 'm의 n(배)'와 같이 사용하기 때문에 합성과 곱은 조작의 순서가 같다.

념을 사용해서 설명하고 있다. 이는 '6개의 3묶음 중 2묶음은 얼마인가?'라는 전체-부분의 관념으로 결과를 만들고 있다. 이와 같은 활동은 $6\times\frac{2}{3}$를 연산자로서의 6의 의미를 생략한 체 연산자 $\frac{2}{3}$의 활동으로만 국한시켜서 설명하는 것으로, $\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}$와 5×3을 두 연산자의 합성으로 설명하는 것과는 다르다(<그림 III-2>, <그림 III-4>와 <그림 III-5> 비교). 따라서 $6\times\frac{2}{3}$도 '두 연산자의 합성'으로 설명하는 것이, '관계적 이해'의 측면에서, 보다 효율적일 수 있다. 즉, 두 수 6과 $\frac{2}{3}$ 모두를 연산자로 취급하고 그 결과(4) 또한 하나의 연산자로 보는 것이 일관성의 측면에서 좋다.



<그림 III-5> $6\times\frac{2}{3}$와 관련된 교과서 활동

일반적으로 곱셈은 동수누가의 관점으로 도입된다. 자연수에서는 이것이 잘 적용되지만 유리수나 실수끼리의 곱셈에서는 효율적으로 적용되지 못한다. 그러나 수를 연산자로 보고 두 수끼리의 곱셈을 두 연산자의 합성, 즉 두 조작의 결합(Skemp(김판수·박성택 역), 1996, p. 157)으로 해석하면 관계적 이해의 측면에서 유리할 수 있다.

2. 두 조작의 합성으로서의 유리수 곱

1) 유리수 군의 부분 작용과 부분함수

곱셈에 관한 유리수 군(group) $\mathbb{Q}^*$는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}\setminus\{0\} = \left\{\frac{b}{a} \mid a, b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\},\ \gcd(a,b)=1\right\}$$

여기서 $\gcd(a,b)$는 두 정수 a와 b의 최대공약수를 나타낸다.

이제, 군 $\mathbb{Q}^*$의 $\mathbb{Z}$상의 곱(multiplication)으로서 작용(action)을 생각해보자. 일반적으로, 주어진 두 수 $g\in\mathbb{Q}^*$, $x\in\mathbb{Z}$에 대한 곱 $g\cdot x$이 항상 $\mathbb{Z}$의 원소인 것이

아니기 때문에, 군 $\mathbb{Q}^*$는 $\mathbb{Z}(\subset\mathbb{Q})$에 부분적으로 작용(partially act)한다. 즉,

$$\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (g,x) \mapsto g\cdot x \text{ (두 유리수의 곱)}$$

는 군 $\mathbb{Q}^*$의 부분작용(partial action; 최근배, 임용도, 2000, 2002, 2008; Kellendonk & Lawson, 2004)이고, 따라서 각 원소 $g\in\mathbb{Q}^*$는 $\mathbb{Z}$의 부분집합에서 정의되는 부분단사(partial one to one)함수를 유도한다. 혼돈이 없다면 원소 $g\in\mathbb{Q}^*$에 의해서 유도된 부분단사 함수도 g로 표기한다. 즉,

$$g : \mathrm{dom}(g)=\{x\in\mathbb{Z} \mid g\cdot x\in\mathbb{Z}\} \to \mathbb{Z}$$

여기서, dom(g)는 부분함수 g의 정의역을 의미한다. 일반적으로, $g=\frac{b}{a}\in\mathbb{Q}^*$를 부분 단사함수로 간주하면 실제로 g는 다음과 같이 정의되는 전단사함수이다.

$$g: a\mathbb{Z} \to b\mathbb{Z},\ ax \mapsto bx \ (\gcd(a,b)=1)$$

여기서, $n\mathbb{Z}=\{nx: x\in\mathbb{Z}\}$로 n의 배수들의 집합을 나타낸다.

이제, 집합 Part$(\mathbb{Q}^*, \mathbb{Z})$를 $\mathbb{Z}$상에 군 $\mathbb{Q}^*$에 의해서 유도된 부분 단사함수들의 집합이라고 두자. 즉,

$$\mathrm{Part}(\mathbb{Q}^*, \mathbb{Z}):=\{g: \mathrm{dom}(g) \to \mathbb{Z} \mid g\in\mathbb{Q}^*\}$$

집합 $\mathbb{Z}$의 모든 부분 단사함수들의 집합을 $I(\mathbb{Z})$라고 두자. 그러면 $I(\mathbb{Z})$는 부분함수의 합성연산($\circ$; <그림 III-5> 참고)하에 역 반군(inverse semigroup)의 구조[3]를 가지며 또한 Part$(\mathbb{Q}^*, \mathbb{Z})\subset I(\mathbb{Z})$이다. Part$(\mathbb{Q}^*, \mathbb{Z})$의 두 원소 g,h에 대해서,

$$g\odot h=gh: \mathrm{dom}(gh) \to \mathbb{Z}$$

로 정의하자. 여기서 gh는 군 $\mathbb{Q}^*$에서 g와 h의 곱을 의미한다. 예를 들어, $g=\frac{2}{5},\ h=\frac{1}{2}\in$Part$(\mathbb{Q}^*, \mathbb{Z})$일 때, dom$(g\odot h)$=dom$(gh)$=$5\mathbb{Z}$이고,

$$g\odot h : 5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ 5x \mapsto x$$

인 전단사 함수이다. 위와 같은 구성으로부터 다음 사실을 알 수 있다.

3) $I(\mathbb{Z})$는 이항연산 $\circ$에 대해 닫혀있고 또한 다음이 성립한다. 임의의 $\alpha,\beta,\gamma\in I(\mathbb{Z})$에 대해서, (1) $\alpha\circ(\beta\circ\gamma)=(\alpha\circ\beta)\circ\gamma$, (2) $\alpha\circ\alpha^{-1}\circ\alpha=\alpha$, $\alpha^{-1}\circ\alpha\circ\alpha^{-1}=\alpha^{-1}$

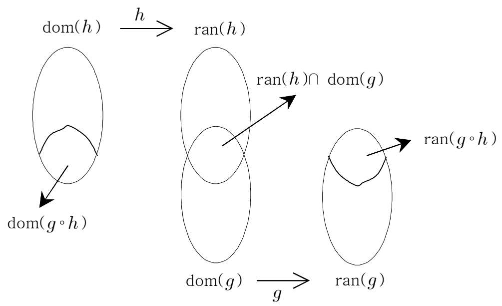
(1) Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)의 원소 $g=\frac{b}{a}$에 대해서, dom(g)=$a\mathbb{Z}$이다.

(2) (Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$), $\odot$)는 곱에 관한 유리수 군 $\mathbb{Q}^*$와 군 동형(isomorphic)이다.

Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)$\subset I(\mathbb{Z})$이기 때문에 Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)의 모든 유한 합성들(finite compositions)의 집합 $\langle$Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)$\rangle$ 은 $I(\mathbb{Z})$의 역 부분 반군(inverse subsemigroup)이 됨을 쉽게 알 수 있다(Howie, 1976, p. 정리 1.2 참조).

(3) Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)의 두 원소 g,h에 대해서, $g\circ h\in$ $\langle$Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)$\rangle$ 이고 <그림 III-5>로부터 다음을 얻는다.

$$\mathrm{dom}(g\circ h)=h^{-1}(\mathrm{ran}(h)\cap\mathrm{dom}(g))$$



<그림 III-5> $g\circ h$: 두 부분 함수 g과 h의 합성

예를 들어, $g=\frac{1}{2}$, $h=\frac{2}{3}\in$Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)인 경우, dom($g\circ h$)=$3\mathbb{Z}$이고 dom($h\circ g$)=$6\mathbb{Z}$이다. 그리고 다음의 사실을 알 수 있다.

$$h\circ g:\ 6\mathbb{Z}\ \rightarrow\ 2\mathbb{Z}\text{이고, } \gcd(6,2)=2\neq 1$$

이기 때문에 $h\circ g\notin$ Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)이다. 이러한 사실로부터 Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)는 이항 연산$\circ$에 관해서 닫혀있지 않음을 알 수 있다.

역 반군 $I(\mathbb{Z})$상의 자연스런 부분순서 $\subseteq$를 고려하자. 즉, $\alpha\subseteq\beta$는 'dom(α)$\subseteq$dom(β)이고 dom(α)상에서 두 부분함수가 같음'을 의미한다.

(4) 역 부분 반군 $\langle$Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)$\rangle$ 의 임의의 원소는 Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)의 어떤 원소에 의해 위로 유계(bounded above)이다. 실제로, 다음이 성립한다.

$$\alpha=g_1\circ g_2\circ\cdots\circ g_n\ \in\ \langle\mathrm{Part}(\mathbb{Q}^*,\ \mathbb{Z})\rangle\text{ 이면, }\alpha\subseteq g_1\odot g_2\odot\cdots\odot g_n$$

예를 들어, 만일 $g=\frac{2}{5}$, $h=\frac{1}{2}\in$ Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)일 때,

$$g \circ h : 10\mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z},\ 10x \mapsto 5x \mapsto 2x,$$
$$g \odot h : 5\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z},\ 5x \mapsto x$$

이다. 여기서 dom($g \circ h$)=$10\mathbb{Z} \subseteq 5\mathbb{Z}$ = dom($g \odot h$)이고 $g \odot h|10\mathbb{Z} = g \circ h$이다. 따라서 $g \circ h \subseteq g \odot h$ 이다.

(5) ⟨Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)⟩ 의 원소 α가 $\alpha \subseteq g, h$이면, $g=h$이다. 여기서 g, h는 Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)의 원소이다. 왜냐하면,

$$\alpha = g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_n,\ g_i = \frac{b_i}{a_i}(i=1, \ldots, n)$$

이면 $a_1 a_2 \cdots a_n\mathbb{Z} \subseteq$ dom(α)이고, $k=a_1 a_2 \cdots a_n$는 0이 아닌 dom(α)의 원소이다. 한편, $\alpha \subseteq g, h$이기 때문에, $g|_{\mathrm{dom}(\alpha)} = \alpha = h|_{\mathrm{dom}(\alpha)}$이고 따라서 $g \cdot k = h \cdot k$이다. 따라서 $g=h$이다.

(6) ⟨Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)⟩ $/\sigma$는 군 (Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$), $\odot$)와 동형이다. 따라서 군 $\mathbb{Q}^*$와도 동형임을 알 수 있다. 여기서 σ는 ⟨Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)⟩ 에서의 최소 군 합동(minimum group congruence; Lawson, 1998, pp. 62-63)이다.

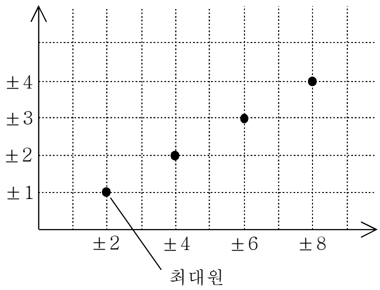
실제로, (4)과 (5)에 의해서 Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)의 각 원소는 ⟨Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)⟩ 의 최대원이고 또한 ⟨Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)⟩ 의 모든 원소는 Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)의 유일한 최대원에 의해 위로 유계이다. 이러한 사실과 최소 군 합동의 정의를 이용하면, 각각의 σ-류(σ-class)는 유일한 최대원을 가진다는 사실을 유도할 수 있다. 그러므로 상집합 ⟨Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)⟩ $/\sigma$는 σ-류의 최대원들의 집합과 일대일 대응이 된다. 만일 $\alpha, \beta \in$Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)이면 $\alpha \circ \beta \subseteq \alpha \odot \beta$, $\alpha \odot \beta$는 최대원이고, 따라서 이 대응은 군 준동형 사상이다.

실제로, Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)의 원소 $\alpha: a\mathbb{Z} \rightarrow b\mathbb{Z}$의 ⟨Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)⟩ 에서 σ-류 $[\alpha]$는 다음과 같다.

$$[\alpha] = \{\alpha_k : ka\mathbb{Z} \rightarrow kb\mathbb{Z} \mid k(\neq 0) \in \mathbb{Z}\}$$

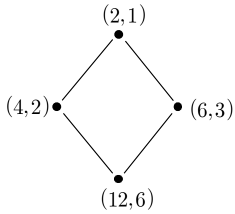
여기서 α는 ⟨Part($\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{Z}$)⟩ 에서 최대원, 실제로 $[\alpha]$의 유일한 최대원이다.

한편, $\alpha: a\mathbb{Z} \rightarrow b\mathbb{Z}$를 (a, b)로 동일시하면 α의 σ-류 $[\alpha]$는 <그림 III-6>과 같이 표현할 수 있다.



<그림 III-6> $[\alpha:\ 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}]$와 이 동치류의 최대원

또한 $\langle \mathrm{Part}(\mathbb{Q}^*,\ \mathbb{Z}) \rangle$ 는 전순서집합(totally ordered set)은 아니다. 예를 들어, $(2,1):\ 2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $(4,2):\ 4\mathbb{Z} \to 2\mathbb{Z}$, $(6,3):\ 6\mathbb{Z} \to 3\mathbb{Z}$, $(12,6):\ 12\mathbb{Z} \to 6\mathbb{Z}$일 때 이들 사이의 순서관계는 <그림 III-7>과 같다. 실제로, $(4,2)$와 $(6,3)$는 순서관계가 없다.



<그림 III-7> $\langle \mathrm{Part}(\mathbb{Q}^*,\ \mathbb{Z}) \rangle$ 에서 부분순서

(6)에 의해서 <그림 III-8>과 같이 두 영이 아닌 유리수의 곱은 결국 두 부분 함수의 합성으로 생각할 수 있다.

$$\begin{tikzcd}
ac\mathbb{Z} \arrow[d, "{\left[\frac{d}{c}\right] \in \langle \mathrm{Part}(\mathbb{Q}^*,\ \mathbb{Z}) \rangle /\sigma}"] \arrow[dd, bend right=60, "{\langle \mathrm{Part}(\mathbb{Q}^*,\ \mathbb{Z}) \rangle /\sigma \ni \left[\frac{bd}{ac}\right]}"'] \\
ad\mathbb{Z} \arrow[d, "{\left[\frac{b}{a}\right] \in \langle \mathrm{Part}(\mathbb{Q}^*,\ \mathbb{Z}) \rangle /\sigma}"] \\
bd\mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

<그림 III-8> 두 조작의 연속(합성)과 유리수 곱 $\frac{b}{a} \times \frac{d}{c} = \frac{bd}{ac}$

2) 부분 함수의 확장

정수의 집합 $\mathbb{Z}$상에서 정의된 부분 함수의 확장(globalization)을 생각해보자.

이를 테면, $g=\frac{b}{a}\in \mathrm{Part}(\mathbb{Q}^*,\ \mathbb{Z})$는 정의역이 $a\mathbb{Z}$인 함수이다. 즉, $g:\ a\mathbb{Z}\ \rightarrow\ b\mathbb{Z}$ 함수로 $\mathbb{Z}$상에서는 부분함수이다. 여기서 $\mathbb{Z}$를 X로 확장하여, 이 확장된 집합 X상에서 정의되는, g의 확장함수(extension of g), $\bar{g}$를 구성하자. 구체적으로, i: $\mathbb{Z}\ \rightarrow\ X$는 일대일 함수이고 <그림 III-9>는 교환가능 다이아그램이다.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\bar{g}"] & X \\ a\mathbb{Z} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "g"'] & b\mathbb{Z} \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

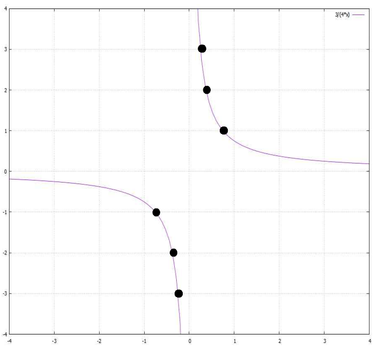
<그림 III-9> 부분함수의 확장

먼저, 곱집합 $\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Z}$를 고려하고 이 집합에서의 다음과 같은 관계 $\sim$를 생각해보자. 실제는 $\sim$는 동치관계가 됨을 알 수 있다.

$$(g,x)\sim(h,y)\ \Leftrightarrow\ (h^{-1}g)\cdot x\in\mathbb{Z}\text{이고}$$
$$(h^{-1}g)\cdot x=y$$

여기서 $\cdot$ 는 수 집합에서의 곱을 의미한다. 예를 들어, $\left(\frac{1}{4},3\right)\sim\left(\frac{3}{4},1\right)$이다(<그림 III-10>참조). 편의상 $\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Z}$의 원소 (g,x)의 동치류 집합을 $[(g,x)]$ 라고 두자. 즉,

$$[(g,x)]:=\{(h,y)\,|\,(g,x)\sim(h,y)\}$$



<그림 III-10> $\left[(\frac{3}{4},1)\right]$: $(\frac{3}{4},1)$의 동치류

이제, 동치관계 $\sim$에 의한 동치류들의 집합을 $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*}$라고 하자.

$$\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*} := \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Z}/\sim := \{ [(g,x)] \mid (g,x) \in \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Z} \}$$

이로부터 다음을 알 수 있다.

(1) 군 $\mathbb{Q}^*$는 집합 $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*}$에 곱으로 작용(act)한다. 즉,

$$\delta : \mathbb{Q}^* \times \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*} \to \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*},\ (g, [(h,x)]) \mapsto g \cdot [(h,x)] = [(gh,x)]$$

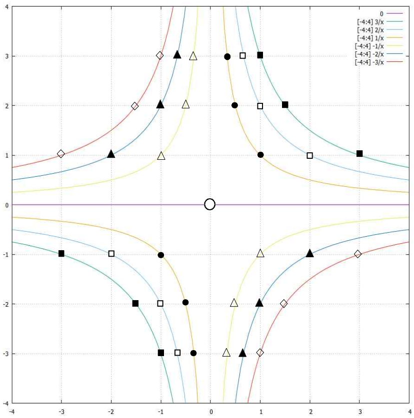
구체적으로, 작용 δ는 부분작용 $\mathbb{Q}^* \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ (g,x) \mapsto g \cdot x$ 의 최소 확장(minimum globalization; Choi & Lim, 2008)이 된다. 따라서 각 원 $g \in \mathbb{Q}^*$는 $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*}$에서 정의된 함수 $\bar{g}$를 유도한다. 즉,

$$\bar{g} : \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*} \to \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*},\ [(h,x)] \mapsto g \cdot [(h,x)] = [(gh,x)]$$

(2) 집합 $\mathbb{Z}$와 $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*}$의 부분집합 $\{[(1,x)] : x \in \mathbb{Z}\}$을 동일시할 수 있다. 실제로, 함수

$$i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*},\ x \mapsto [(1,x)]$$

는 일대일 함수이다.



<그림 III-11> $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*}$; $[(1,0)]$, $[(1,1)]$, $[(1,2)]$, $[(1,3)]$, $[(1,-1)]$, $[(1,-2)]$, $[(1,-3)]$

따라서 (1)과 (2)에 의해서, 정수 $\mathbb{Z}$상의 부분함수 $g = \frac{b}{a} \in \mathrm{Part}(\mathbb{Q}^*, \mathbb{Z})$, $g : a\mathbb{Z} \to b\mathbb{Z}$는 확장함수 $\bar{g} : \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*} \to \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*}$를 가진다. 즉, $g : i(a\mathbb{Z}) \to i(b\mathbb{Z})$로 동일시

할 수 있고, $\bar{g}|_{i(a\mathbb{Z})} = g$이다 (<그림 III-12> 참조).

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*} \arrow[r, "\bar{g}"] & \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*} \\ a\mathbb{Z} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "g"'] & b\mathbb{Z} \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

<그림 III-12> 함수 g의 최소 확장

(3) 집합 $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*}$는 유리수의 집합 $\mathbb{Q}$와 일대일 대응이 있다. 실제로, 두 집합 사의의 대응 ϕ를 다음과 같이 정의하자.

$$\phi: \ \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*} \to \mathbb{Q}, \ [(g,x)] \mapsto g\cdot x \ \text{(두 수의 곱)}$$

만일 $(g,x)\sim(h,y)$이면 $(h^{-1}g)\cdot x = y$이다. 양변에 h를 곱하면 $g\cdot x = h\cdot x$이고, 따라서 ϕ는 잘 정의된 사상이다. 한편, 만일 $\phi([(g,x)])=\phi([(h,x)])$이면, $g\cdot x = h\cdot x$이고 양변에 h^{-1}를 곱해서 정리하면 $(h^{-1}g)\cdot x = y$이고 따라서 $(g,x)\sim(h,y)$이다. 즉 $[(g,x)]=[(h,x)]$이고, 사상 ϕ는 일대일이다. 끝으로 임의의 $g=\frac{b}{a}\in\mathbb{Q}$에 대해서,

$$\left[\left(\frac{1}{a},b\right)\right]\in\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*}\text{이고} \quad \phi\left(\left[\left(\frac{1}{a},b\right)\right]\right)=\frac{b}{a}$$

이다. 따라서 사상 ϕ는 전사이다.

(4) 작용 $\theta: \mathbb{Q}^*\times\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \ (g,x) \mapsto g\cdot x$ (두 수의 곱)는 부분작용 $\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, \ (g,x) \mapsto g\cdot x$ (두 수의 곱)의 최소 확장(minimum globalization)이다. 실제로, <그림 III-13>는 교환가능 다이아그램이고 따라서 두 작용 θ와 δ는 동등(equivalence)이다.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q}^*\times\mathbb{Q} \arrow[r, "\theta"] & \mathbb{Q} \\ \mathbb{Q}^*\times\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*} \arrow[u, "1\times\phi"] \arrow[r, "\delta"'] & \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}^*} \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

<그림 III-13> 동등인 두 작용

따라서 유리수 군 $\mathbb{Q}^*$의 곱에 의한 유리수 $\mathbb{Q}$로의 작용은 $\mathbb{Q}^*$의 곱에 의한 정수 집합 $\mathbb{Z}$상에서의 부분 작용의 최소 확장 작용임을 알 수 있다. 다시 말해서,

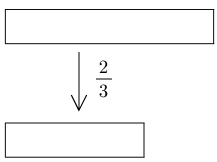
$g: a\mathbb{Z} \to b\mathbb{Z}$의 최소 확장함수 $\bar{g}$는 결국 다음과 같다.

$$\bar{g}: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ \bar{g}(x) = g \cdot x = \frac{b}{a} \cdot x \text{ (두 수의 곱)}$$

이다.

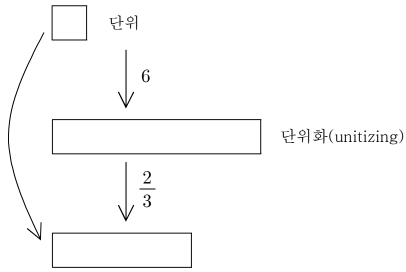
IV. 결론 및 논의

학교수학에서 분수 또는 유리수를 연산자 관점으로 해석하는 경우는 어떤 대상을 축소하거나 확장하는 상황에서 주로 도입되며, 이는 곱셈과 깊은 연관을 가진다. <그림 III-2>와 <그림 III-4>와 같이 두 분수의 곱셈이나 두 자연수의 곱셈의 경우에는 두 수 각각을 연산자로 취급하여 두 수의 곱을 두 연산자의 합성으로 인식하지만, <그림 III-5>와 같이 '자연수×분수'를 다룰 때는 '분수'만 연산자로 취급하는 경향이 많다. 이러한 경우 이산량을 다루는 상황에서는 개수라는 절대단위가 있어 결과가 자연수인 경우 단위혼돈을 크게 겪지 않지만, 연속량의 경우에는 학생들이 결과를 해석할 때 무엇을 단위로 해야 하는지 혼란스러워 하는 경우가 많다(<그림 IV-1> 참조). 실제로, <그림 IV-1>에서 단위(unit)와 전체(whole)를 착각하는 경우가 있다. 즉, 결과의 해석에 사용되는 단위를 무엇으로 할 것인가? 주어진 막대를 단위로 착각하는 오류를 일으킬 수 있다. <그림 IV-1>에서 결과를 $6m$의 막대를 단위로 착각하여 결과를 $\frac{2}{3}m$로 답하는 경우가 많다(함혜림, 2014 참고).



<그림 IV-1> 연속량에서 정의된 연산자

따라서 <그림 IV-2>와 같이 '자연수×분수'도 <그림 III-1>, <그림 III-2> 그리고 <그림 III-4>와 같은 맥락에서 해석하는 것이 좀 더 일관성이 있으며 또한 단위개념을 명확히 하는데 유용하다.



<그림 IV-2> 두 연산자의 합성

연산자로서의 분수의 핵심은 단위의 재개념화이다(이지영, 방정숙, 2014; 함혜림, 2014). 따라서 단위를 잘 드러나게 할 수 있게 ‘두 수의 곱’을 두 수 모두를 연산자로 보고 ‘두 연산자의 합성’으로 다루는 것이 보다 일관성이 있다. 즉, ‘유리수×유리수’의 상황을 ‘(유리수)의 (유리수배)’가 아니라 ‘(단위)의 (유리수배)의 (유리수배)’로 해석하는 것이다.

이 논문에서는 유리수를 연산자의 관점으로 보고, ‘두 수의 곱이 어떻게 두 연산자의 합성으로 될 수 있는가?’의 수학적인 이론적 배경을 살펴보았다. 실제로, <그림 III-8>을 참조하면 두 영이 아닌 유리수의 곱은, 두 유리수 각각을 정수의 집합상에서 부분 함수로 보고, 부분함수의 합성으로 취급할 수 있음을 보여준다.

3장의 2절 2단원은 유리수를 정수의 집합상에서 부분 함수로 볼 때 이 부분함수가 함수가 될 수 있는 수집합의 최소 확장은 유리수의 집합임을 보여주고 있다. 이것과 관련하여 정영우·김부윤(2012)의 유리수의 구성(p. 146)

$$\mathbb{Q}=\{\bar{f}\ \mid \bar{f}:\ \mathbb{Z}\ \rightarrow\ \mathbb{Z},\ f:n\mathbb{Z}\ \rightarrow\ \mathbb{Z}\}$$

은 오류를 보여주고 있다. 실제로, 3장 2절의 2단원에 의하면 $\bar{f}:\ \mathbb{Q}\ \rightarrow\ \mathbb{Q}$가 되어야한다.

참고문헌

[1] 이지영, 방정숙 (2014). 분수의 다양한 의미에서 단위에 대한 초등학교 6학년 학생들의 이해 실태 조사, 대한수학교육학회지 수학교육학연구, 24(1), 83-102.

[2] 정영우, 김부윤 (2012). 연산자로서의 유리수 체계의 구성에 관한 연구, East Asian Mathematical Journal, Vol. 28, pp. 135-158.

[3] 정은실 (2006). 분수 개념의 의미 분석과 교육적 시사점 탐구, 대한수학교육학회지 학교수학, 8(2), 123-138.

[4] 함혜림 (2014). 연산자 분수에 대한 고찰, 교육학 석사학위 논문, 경인교육대학교 교육전문대학원.

[5] Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). *Rational Number Concepts*. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, (pp. 91-125). New York: Academic Press.

[6] Choi, K. & Lim, Y. (2000). Inverse monoids of Möbius type, *J. Algebra, 223,* 283-294.

[7] Choi, K. & Lim, Y. (2002). Birget-Rhodes expansion of groups and inverse monoids of Möbius, *Internat. J. Algebra Comput. 12*, no. 4, 525-533.

[8] Choi, K. & Lim, Y. (2008). Transitive Partial Actions of Groups, *Periodica Mathematica Hungarica, Vol. 56*(2), 169-181.

[9] Charalambous, C.Y. (2005) Revisiting theoritical model of fractions: Implications for teaching and research. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2*, pp. 233-240. Melbourne: PME.

[10] Howie, J. M. (1976). *An Introduction to Semigroup Theory,* Academic Press Inc.

[11] Kellendonk, J. and Lawson, Mark V. (2004). Partial Actions of Groups, *Int. J. Algebra Comput. 14,* 87.

[12] Lamon, Susan J. (2008). *Teaching Fractions and Ratios for understanding,* Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

[13] Lawson, Mark V. (1998). *Inverse Semigroups: The Theory of Partial Symmetries,* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

[14] Skemp R. R. (김판수 · 박성택 역) (1996). 초등수학교육, 서울: 교우사.

[15] Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge, *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 267-307.

Keunbae Choi
Department of Mathematics Education, Teachers College
Jeju National University
Jeju 690-781, Korea
E-mail: kbchoe@jejunu.ac.kr