Journal for History of Mathematics
Vol. 30 No. 1 (Feb. 2017), 1–15
http://dx.doi.org/10.14477/jhm.2017.30.1.001

On the Riemann mapping theorem and Riemann's original proof-argument

리만 함수정리와 리만의 증명에 관하여

Kim Kang Tae 김강태

The original proof-argument of Riemann in 1851 for the Riemann mapping theorem, one of the most central theorems in Complex analysis, was found faulty and essentially buried underneath the proof by Carathéodory of 1929, now accepted as the "textbook" proof. On the other hand, the original Riemann's "proof" was rediscovered and made correct by R.E. Greene and the author of this article in 2016. In this article, we try to shed lights onto the history related to the Riemann mapping theorem and the surrounding developments of 1850–1930 by reflecting upon the main flow of ideas and methods of the proof by R. E. Greene and K.-T. Kim.

Keywords: Riemann mapping theorem; 리만 함수정리.

MSC: 97A30, 30C35

1 들어가는 말

이 글은 해설 논문이다. 2015년 하반기에 미국 캘리포니아 소재 University of California, Los Angeles의 Robert E. Greene 교수와 필자가 공동 연구를 통해 작성하여 2016년 상반기에 `http://www.arxiv.org`에 초고를 게시하면서 수학계에 배포한 논문 "The Riemann mapping theorem from Riemann's viewpoint."를 기초로 하고 있다. 주요 내용은, 제목이 명확히 시사하는 바와 같이, 1851년 독일 괴팅엔 대학교에서 리만 (G. F. B. Riemann, 1826–1866) 박사가 실시하였던 강연의 일부로서, 오늘날에는 Riemann mapping theorem이라는 이름으로 알려진 위대한 리만 함수정리이다. 하지만 이 정리의 원래 증명인 리만의 논증은, 그 구상과 수학적인 가치가 지대함에도, 지난 160여년이 흐르는 동안 거의 잊혀져버렸다. 이런 점에 관심을 가진 그린 교수의 지적을 시작으로, 그이와

이 논문은 대한민국 미래창조과학부의 선도연구센터 사업 과제 기하학연구센터 (한국연구재단 2011-0030044)의 부분 지원으로 이루어졌음을 알립니다.

Kim Kang Tae: Dept. of Math., POSTECH E-mail: ktkim00@gmail.com

Received on Oct. 31, 2016, revised on Nov. 28, 2016, accepted on Dec. 24, 2016.

필자가 리만의 원고를 다시 찾아 읽어 보니 과연 논증의 정확도에 문제가 없지 않았다. 그래서 그린 교수와 필자는 이를 정확한 증명으로 재조명/재구성해 보려 하였고, 논문 [3] 이 그 노력의 결과물이다. 거기에 모든 논증이 들어 있으나, 수학사적인 내용을 가미하여 우리 말로 확대 설명해 두는 데에 가치가 있다고 생각하신 제현들의 격려에 힘입어 이렇게 다시 또 한 번 풀어 쓰게 되었다.

2 리만의 강연 내용중 해당 부분 재구성

지금은 리만 함수정리 (리만 사상정리, Riemann mapping theorem)로 알려졌고, 대학생들의 복소함수론 교과서에 거의 가장 중요한 정리로 수록된 정리이지만, 1851년 리만의 괴팅엔 대학교 (Göttingen University) 강연에서는 강연 마지막 부분인 제21절에 지나가듯 언급된 한 문장이었을 따름이었다. (독일어로 정리된 이 강연 전문을 인터넷 검색으로 얻을 수 있다 [10]). 내용은 아래와 같다.

> Zwei gegebene einfach zusammenhängende ebene Flächen können stets so auf einander bezogen werden, dass jedem Punkte der einen Ein mit ihm stetig fortrückender Punkt der anderen entspricht und ihre entsprechenden kleinsten Theile ähnlich sind; und zwar kann zu Einem innern Punkte und zu Einem Begrenzungspunkte der entsprechende beliebig gegeben werden; dadurch aber ist für all Punkte die Beziehung bestimmt.

필자와 개인적으로 가까운 독일인 수학 박사들은 이 문장에 대해 평하기를 꺼렸다. 심지어는 리만의 수학적인 능력을 늘 높이 평가했던 위대한 가우스 (Karl Gauss) 교수마저도 리만의 글은 명쾌하지 못하다고 생각했던 것 같다. 수 년 전에 출판되어 도서관에서 쉽게 접할 수 있는 Reinhold Remmert 교수의 저서 “Topics in classical function theory” (Springer GTM) [9]의 제8장에 수록된 여러 역사적인 기록들을 살펴보면 더욱 그렇다. 필자처럼 독일어에 익숙치 않은 독자들의 편의를 위해, 여러 학자들의 노력으로 만들어진 [삽입을 약간 넣은] 영어 번역을 소개한다.

> Two given simply connected planar surfaces can always be related in such a way that each point of one [of the surfaces] corresponds to a point of the other [surface] which continuously moves along with it, and that their corresponding smallest parts [=inifinitesimals? tangent vectors?] are similar; in fact, for one inner point and for one limiting

point [tangent vector?] the respective [point] can be given arbitrarily; but thereby the relation of all points is determined.

필자의 한글 번역도 여기 싣는다.

> **주어진 두 개의 평평한 단순연결 곡면은, 한 곡면의 점이 다른 곡면의 점에 연속적으로 움직이도록 관계지어질 수 있는데, 서로 대응되는 가장 작은 부분끼리 서로 닮게 된다. 실제로, 곡면 내부의 한 점과 극한점이 임의로 주어질 수 있으며, 이에 의해 다른 모든 점들 사이의 대응관계가 모두 결정된다.**

조금 모호한 부분이 몇 군데 있기는 하지만 현대의 리만 함수정리를 잘 이해하고 계실 독자는 그 뜻을 이해하는 데 큰 어려움이 없을 것이라고 생각한다. 하지만 1851년 이런 수학을 상상하지도 못하였던 청중에게는 엄청난 충격과 난해함이 마치 쓰나미처럼 다가왔을지도 모르겠다는 상상이 가능하다.

3 리만의 "증명"

어쨌든, 이 문장에 이어서 리만은 논증을 시작하였다. 현대적인 기호와 용어로 그 내용을 간략히 정리해 보자.

복소평면 $\mathbb{C}$ 안에 있으면서 적절한 영역 [복소 평면 전체는 아닌, 진부분집합이며 단순연결된 열린 영역, 심지어는 유계?!] Ω가 있다고 하자. 그리고, 한 점 p를 이 영역 안에 고정한 다음, 기호 D가 복소 평면 안에 들어 있는 열린 단위원 영역을 표시하게 하자.

리만은 이제 영역 Ω 위에 정의되며 두 조건

(1) $G(z) - \log|z-p|$이 영역 Ω 전체에 정의되는 매끄러운 조화함수(harmonic function)를 이룬다.

(2) $\lim_{z\to\partial\Omega} G(z) = 0$.

를 만족하는 함수 $G\colon \Omega\setminus\{p\} \to \mathbb{R}$를 생각한다. [이 함수는 오늘날, **영역 Ω에 정의되며 p를 극점(pole)으로 가지는 그린(Green) 함수**인데, 리만의 1851년 강연 (지금 우리의 중심 주제가 되는 이 강연)에 처음 등장하였다고 알려져 있다.]

이 대목에서 리만은 그린 함수 G의 켤레 조화함수 (harmonic conjugate)를 택하여 H라 표시한 다음, 함수

$$F(z) = e^{G(z)+iH(z)}$$

를 정의하였고, 이로부터 $F(p) = 0$가 성립하는 것과 $F\colon \Omega \to D$가 1대 1 대응함수, 즉 전단사함수임이 모두 마치 당연한 듯, 별도의 부연 설명 없이 증명이 마무리되었다고 선언하였다! 독자께서는 이 "증명"을 받아들이시겠는가?

4 비판에서 불신까지

필자와 R. E. Greene 교수는 바로 위에 소개한 리만의 착상이, 당시 수학의 관점에서 볼 때, 참으로 창의적이고도 혁신적이었다고 생각한다. 하지만, 필자는 물론 공저자인 그린 교수가 2016년까지 개발된 수학자들의 지식을 배워 소유한 덕분에 이렇게 판단하고 이런 의견을 피력할 수 있는 것이지, 필자가 1851년 당시 학자들이 가졌던 지식을 바탕으로 1851년 그 자리에서 이 강연을 들었다면, 그저 황당하다고 느꼈을 따름이었을 것이 분명하다. 자신의 수준을 훌쩍 상회하는 착상과 구상을 만나면 보통 어떤 반응을 기대할 수 있는지는 독자들이 모두 짐작하는 바가 아니겠는가.

필자는 리만의 증명을 읽으면서 물론, 리만의 증명이 잘 쓰여졌다고 생각지 않았으며, 그 증명을 읽고 "행복에 젖지도" 않았다. (필자의 독일어 실력이 형편없음도 이런 의견의 형성에 기여했을 것이지만, 감히 말씀드리건대, 구글 등 번역기가 넘치는 현대에서 그건 그리 중요한 요소가 아니었다!) 2016년에 이 증명을 읽을 주요 독자들인 대학 3, 4 학년 수학도들이 읽기에 이해하기 매우 어려운 정도이니, 이대로는 적당한 첨삭만 해서 교과서에 실을 수도 없지 않은가.

39세의 젊은 나이에 이승을 하직해버린 리만의 사후에 해당하는 1870년 경에 바이에르슈트라스 (K. Weierstrass) 박사는 특히, 일반적인 영역에 그린 함수가 존재한다는 주장이 (같은 강연의 조금 앞에 리만이 붙인 설명 부분 관련) 옳지 않다는 점을 보여 주었다. 단위원 영역에서 원점을 제거해 버린 구멍난 단위원반의 경우가 좋은 예다. (물론 이 영역은 단순 연결 영역이 아니므로 리만 함수정리의 증명과는 무관하기는 하다.)

하지만 시대를 너무 앞서 가버린 리만의 착상은 그 위대함을 가우스 교수를 비롯한 여러 유수 학자들이 모두 인정하였어도 그의 문장과 논증의 깔끔하고 정확함 부분에 대하여는 높이 평가하기 어려웠던 모양이다. 실제로 리만의 강연 원고와 몇 안 되는 남은 문장과 유일한 논문을 보면 이런 의견에 찬동할 수밖에 없으리라. 앞에서 인용한 라인홀트 레메르트 교수의 저서 "Topics in classical function theory" 제8장을 보면 [9], 각주에 우리 시대의 위대한 수학자인 L. Ahlfors 교수께서 언급한 바가 실려 있다.

> *Riemann's writings are full of almost cryptic messages to the future. For instance, Riemann's mapping theorem is ultimately formulated in terms which would defy any attempt of proof, even with modern methods.*

> **리만의 문장은 미래를 향한 암호 같은 난해한 메시지로 가득하다. 리만 함수정리를 예로 들자면, 이 특성이 극대화 되어, 현대적인 방법론을 동원한다 하더라도, 증명을 시도하려는 생각마저 아예 불가능하게 해 버릴 정도로 구성되었다.**

각종 가십을 소개하려는 것은 이 글의 목적이 아니다. 그러므로 이런 방향의 정보와 다른 역사적 사실들을 찾으려는 독자께는 레메르트 교수의 저서 8장을 보기를 권해 드림으로 양해를 구하고, 우리는 다음 꼭지로 넘어가서 정규족(normal family)을 이용한, 지금은 가장 정통적인(!) 논증으로 알려져 있는 이론에 대해 토의하려 한다.

5 현대 복소함수론 교과서의 증명

1변수 복소함수론을 다루는 현대 교과서는 거의 대부분이 리만 함수정리의 증명을 소개하고 있지만, 이 증명은 앞서 소개하였던 리만의 증명과는 매우 다르다. ([1, 4] 등 여러 교과서를 참조).

이 증명은 1912년에 Mathematische Annalen에 실린 콘스탄틴 카라테오도리 (C. Carathéodory) 교수의 논문 [2]에 근원을 두고 있는 것으로, 간단히 추리면 다음과 같다.

제1 단계: 만일 Ω가 복소평면의 진부분 집합이며 단순연결 영역이면 이 영역은 단순연결이며 유계인 영역과 전단사 해석함수를 통해 1대 1 대응된다. 따라서 영역 Ω를 유계영역이라고 가정하여도 증명의 일반성을 잃지 아니한다. 이 단계의 증명은 뒤에 리만의 원래 증명을 정확한 논증으로 증명하는 법을 설명할 때에 다시 보여 줄 것이므로 지금은 그냥 받아들이기로 하자.

제2 단계: 이제 영역 Ω 안에 있는 점을 하나 골라 p라 쓴 다음, 단위구 영역 D에 대하여 단사 해석함수 $f \colon \Omega \to D$ 중에서 두 조건 $f(p) = 0, f'(p) > 0$를 만족하는 것을 모은 집합을 $\mathcal{F}_p$라고 둔다. 이제 $r := \sup\{f'(p) \colon f \in \mathcal{F}_p\}$이라 두면, 정규족 논증 방법으로부터 $f'(p) = r$을 만족하는 함수 $f \in \mathcal{F}_p$가 존재하게 된다는 결론에 도달하게 된다. (함수 f가 단사함수임을 보이는 데에는 조금 노력이 필요하지만, 고른수렴 (uniform convergence) 성질과 후르비츠 정리 (Hurwitz theorem) 등을 이용하면 된다. [슈바르츠 보조정리를 적절히 사용하면, 이 함수 f가 유일하게 결정된다는 것도 알 수 있다.]

제3 단계: 증명을 완결하기 위해 남은 단계는 위에서 선택한 특별한 함수 f가 전사함수 (surjection)임을 보이는 것이다. 귀류법을 사용하기 위하여, f가 전사함수가 아니라고, 즉 어떤 점 $q \in D \setminus f(\Omega)$가 존재한다고 가정하자. 그러면 조건 $\mu(q) = 0$를 만족하는 뫼비우스 변환 $\mu \colon D \to D$를 택할 수 있고, 계속해서, 조건 $(g(z))^2 = \mu \circ f$를 만족하는 해석함수

g가 존재하게 된다. 이렇게 g가 존재하는 이유는, Ω가 단순연결 영역이므로 로그함수 및 그 결과로 얻어지는 제곱근을 택할 수 있다는 특성 때문에 성립하는데, 특히 이렇게 얻어진 g는 단사함수이며 Ω를 단위구 영역으로 보낸다. 이 결과를 다시 적절한 뫼비우스 변환과 합성하여 $\mathcal{F}_p$에 속하는 함수를 만들고 나면 신기하게도(!) 이렇게 얻은 함수의 p점에서의 미분이 $f'(p)$ 값보다 확실히 더 크게 된다. 이것은 f의 선택과 모순이고 이로써 증명이 완결된다.

논증으로서 완벽한 이 증명은 카라테오도리 교수가 1929년 Mathematische Annalen에 발표한 논문에 실려 있는 것이다. 다만, 제3 단계의 증명에 쓰인 절묘한 논증은 헝가리의 Riesz와 Féjér 두 수학자들에 의해 발견되었다고 한다. Riesz-Féjér 결과도 같은 해인 1929년에 인쇄 발표되었으나, 그들의 발견이 먼저였다고 정직하게 명시하며, 이들의 결과를 사용한 점을, 자신의 1929년 논문에 카라테오도리 교수가 확실히 모두 명시하였다.

6 리만의 착상과 증명 재정리

한편, 전술한 바와 같이 리만 함수정리의 증명을 둘러싼 수학 연구의 역사를 돌아보고 내용을 검토해 보며 로버트 그린 교수와 필자는, 리만의 "증명"이 방금 소개한 카라테오도리의 증명보다, 이후의 수학의 발전에 대한 공헌을 따질 때에는, 훨씬 더 의미심장하다고 느끼게 되었다. 미분방정식을 이용하여 기하학적인 사실을 예측하고 증명하는 방법론은 현대에 와서 수학 연구에 엄청난 공헌을 하게 되었는데, 그 근원을 따져 보면 결국 리만의 혁신적이고 창의적인 이 증명이 효시로 보이기 때문이다.

그러므로 이 시점에서, 좀 심하게 말하자면, 리만의 논증이 세밀하지 않았던 것은 크게 중요하지 않았으며, 이런 새로운 아이디어를 통해 전인미답의 정글에 첫 발을 내디디며 "도끼와 낫으로 나무를 찍으며 덤불을 베어 길을 내기 시작했던" 사실이 더 중요했다고 본다. 수학은 한 사람이 다 개발할 수 있는 대상이 아니므로, 이렇게 리만이 발견하고 처음 길을 연 미지의 정글에 새 길을 내고 마을을 건설하고 개발해 나가는 것은 후인들이 해야 하고, 하게 될 일이었으리라.

이런 관점에서 2015-16년을 사는 우리가 리만의 원래 착상을 검토하고 다시금 보다 정확한 증명을 제시하려는 것은 어쩌면 당연한 노력이 아닐까. 이제 그린 교수와 필자가 다듬어 본 리만의 증명을 간단히 소개한다.

6.1 증명으로 들어가기 위한 준비; 제1 단계

정의 6.1 (단순연결성): 지금부터는 복소함수론의 전통을 따라, 연결되어 있는 열린 집합을 **영역 *(domain)***이라 부르기로 한다. 그리고 복소평면 $\mathbb{C}$ 안에 있는 영역 Ω가, 그 안에 있는

폐곡선은 어느 것이든 항상 그 영역 안에서 연속적으로 변형되어 한 점으로 퇴화될 수 있다는 성질을 가지면, 이 영역 Ω가 **단순연결 *(simply-connected)*** 되어 있다고 정의하고, 기호 $\pi_1(\Omega) = 0$로 표현한다.

이 정의는 위상수학에서 온 것이므로, 이 논문에서는 가끔 "위상적 단순연결"이라는 용어를 사용하기도 할 것이다. 이제 또 다른 단순연결 개념을 소개한다.

정의 6.2 (해석적 단순연결성): 복소평면 $\mathbb{C}$ 안의 영역 Ω가, 그 위에 정의된 임의의 해석함수 $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$에 대하여 그 원시함수, 즉 조건 $F' = f$를 만족하는 함수 $F\colon \Omega \to \mathbb{C}$를 가지면, 이 영역 Ω를 **해석적으로 단순연결 *(holomorphically simply-connected)*** 되어 있다고 정의하고, 기호로 $\mathfrak{h}_1(\Omega) = 0$로 표현한다.

잘 알려진 바와 같이 이중적분과 선적분을 잇는 그린 정리 (Green's theorem)가 두 개념 사이를 정리해 준다.

도움정리 6.1: 복소평면 안의 영역 Ω이 위상수학적으로 단순연결되어 있으면, 해석적으로도 단순연결되어 있다.

증명. 그린 정리로부터 도출되는, 구분적으로 직선인 폐곡선에 관한 코시 정리가 이 도움정리를 증명한다. 자세한 논증은 생략한다. □

그린/김강태 논문은 리만 함수정리를 아래와 같이 제시한다. 형식논리로만 따진다면, 일단은 원래 리만 함수정리보다 강한 결과처럼 보일 것이다.

정리 6.2 (리만, Riemann)**: 영역 Ω가 복소 평면 $\mathbb{C}$의 진부분집합이라 하자. 만일 이 영역이 해석적으로 단순연결되어 있으면, 영역 Ω로부터 단위원 영역 $D = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$로 가는 전단사 해석함수가 존재한다.**

이 정리가 증명되고 나면, 결과적으로 추론 관계

$$\begin{aligned}\pi_1(\Omega) = 0 &\Rightarrow \mathfrak{h}_1(\Omega) = 0 \\ &\Rightarrow \text{리만함수정리}(RMT) \Rightarrow \pi_1(\Omega) = \pi_1(D) = 0\end{aligned}$$

가 성립함을 바로 알 수 있고, 따라서 방금 소개한 정리가 원래 리만 함수정리와 논리적으로 동치임이 분명해진다.

6.2 해석적 단순연결성으로부터 도출되는 결과들; 제2 단계

이 마디에서는 처음부터 끝까지 기호 Ω가 복소평면 $\mathbb{C}$ 안에 있는 영역, 즉 연결된 열린 집합을 나타내기로 한다. 그리고 널리 쓰이는 기호 $\mathcal{O}(\Omega)$가 영역 Ω 위에 정의되는 모든 해석함수의 집합을 나타내도록 할 것이다.

도움정리 6.3: 만일 조건 $\mathfrak{h}_1(\Omega) = 0$가 성립하고 또 열린 집합 $U \subset \mathbb{C}$와 해석적 전단사함수 $\varphi\colon \Omega \to U$가 존재하면, 조건 $\mathfrak{h}_1(U) = 0$도 성립한다.

이 도움정리는 당연해 보이지만, 위에서 소개했던 해석적 단순연결성의 정의가 좌표의 선택에 의존하도록 구성되었기 때문에, 실제로 해석적 단순연결성이 좌표의 선택에 무관하다는 사실을 입증하는 의미가 있다.

증명. 기호 $\psi = \varphi^{-1}$와 전통적인 국소좌표 표현인 $\zeta = \varphi(z)$와 $z = \psi(\zeta)$를 쓰기로 하자.

$g \in \mathcal{O}(U)$를 하나 임의로 선택하면, 복소 연쇄미분공식에 의하여 $g \circ \varphi \in \mathcal{O}(\Omega)$가 성립한다. 뿐만 아니라 곱의 미분공식에 의해서

$$(g \circ \varphi(z)) \cdot \varphi'(z) \in \mathcal{O}(\Omega)$$

도 얻는다.

조건 $\mathfrak{h}_1(\Omega) = 0$로부터, 이 함수의 원시함수 즉, 조건

$$F'(z) = (g \circ \varphi(z)) \cdot \varphi'(z)$$

를 만족하는 $F \in \mathcal{O}(\Omega)$가 존재하게 된다. 따라서 등식 $F'(z) \cdot \frac{1}{\varphi'(z)} = g \circ \varphi(z)$이 성립하고, 계속해서,

$$g(\zeta) = F'(\psi(\zeta)) \cdot \psi'(\zeta) = (F \circ \psi)'(\zeta)$$

를 얻는다. 이것으로 $\mathfrak{h}_1(U) = 0$의 증명이 완결되었다. □

이번에는 복소평면의 영역이 복소 평면 전체가 아닌 진부분집합이면서 동시에 해석적으로 단순연결되어 있으면, 항상 유계 영역과 해석적으로 동등한 즉, 유계 영역과의 사이에 해석적 전단사함수가 존재하는 성질을 가진다는 사실을 보이려고 한다.

도움정리 6.4: 만일 영역 Ω가 두 조건 $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$와 $\mathfrak{h}_1(\Omega) = 0$를 만족하면, 치역 $h(\Omega)$가 유계 영역이 되게 하는 해석적 단사함수 $h\colon \Omega \to \mathbb{C}$가 존재한다.

증명. 복소평면 안에서 평행이동 변환 $z \to z - p$를 사용하여 주어진 영역 Ω가 원점을 포함하지 아니한다고 가정하여도 논증의 일반성을 잃지 않으므로, 조건 $0 \notin \Omega$를 가정하기로 한다. 그러면 당장 $\frac{1}{z} \in \mathcal{O}(\Omega)$가 성립하고, 이어서 조건 $\mathfrak{h}_1(\Omega) = 0$으로부터 조건 $L'(z) = \frac{1}{z}$를 만족하는 함수 $L \in \mathcal{O}(\Omega)$이 존재한다는 사실을 도출해 낼 수 있다. 그러면 관계식 $(L(e^z))' = 1$도 얻을 수 있고, 적분상수를 조정하여 관계식 $L(e^z) = z, \forall z \in \Omega$도 얻을 수 있다. [이것이 진부분 단순연결 영역에 복소 로그함수를 정의하는 방법 중 하나이다.] 이로부터 관계식 $\exp L(z) = z$도 얻는데, 이는 독자를 위한 연습문제로 남겨 둔다.

이제, 함수 $\rho(z) := \exp(\frac{1}{2}L(z))$를 정의한다. 이 함수는 단사함수이며 해석함수이고 영역 Ω 전체에서 잘 정의된다. [독자께서 이미 인식한 바와 같이 ρ는 물론 복소 제곱근 함수이다.]

이어서, q가 치역 $\rho(\Omega)$의 원소인 경우에는, 점 $-q$는 치역 $\rho(\Omega)$의 원소가 될 수 없다는 사실을 확인하기로 하자. 이유는 이렇다. 만일 $-q = \rho(w)$와 $q = \rho(z)$가 동시에 성립하게 해 주는 적절한 값 $w, z \in \Omega$이 존재하였다면,

$$z = q^2 = (-q)^2 = w$$

가 성립할 것이고, 따라서 $q = \rho(z) = \rho(w) = -q$도 성립하게 될 텐데, 이것은 불가능한 일이기 때문이다.

이제 이 논증을 마무리할 수 있게 되었다. 점 $p \in \rho(\Omega)$를 하나 선택하자. 그러면 열린함수정리 (Open mapping theorem)에 의하여 조건 $B(p,r) := \{z \in \mathbb{C} \colon |z-p| < r\} \subset \Omega$가 성립하게 해 주는 적절한 양수 r이 존재하게 된다. 이와 동시에, 바로 위의 논증에 의해 $B(-p,r) \subset \mathbb{C} - \Omega$가 성립하게 된다. 이제 변환 ρ와 변환 $z \to \frac{1}{z+p}$를 차례대로 영역 Ω에 적용하면 원하는 결론에 도달하게 되어 증명이 완결된다. □

이 증명은 로그함수와 제곱근함수가 해석적으로 단순연결된 영역이 원점을 포함하지 않기만 한다면 잘 정의된 단사 해석함수가 된다는 점을 교묘하게 잘 이용한 것이다. 카라테오도리 증명의 제1 단계 역시 같은 증명을 사용하는 것이 보통이므로, 5절 제1단계에서 미뤄 두었던 증명이 이것으로 채워졌다.

이번에는 켤레 조화함수의 존재성을 규명하려고 한다.

도움정리 6.5 (**켤레 조화함수** Harmonic conjugate)**: 복소평면 $\mathbb{C}$ 안에 있는 영역 Ω이 해석적으로 단순연결되어있다고 하고, 조화함수 $u \colon \Omega \to \mathbb{R}$가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면, 조건 $u + iv \in \mathcal{O}(\Omega)$ 가 성립하게 하는 함수 $v \colon \Omega \to \mathbb{R}$가 존재한다.**

증명. 우선 u가 조화함수이면

$$\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \in \mathcal{O}(\Omega)$$

가 성립하는 것은 코시-리만 미분작용소 $\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$를 이 함수에 적용하면 0이 되기 때문이다. 이제 $G \in \mathcal{O}(\Omega)$가 조건 $G' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$를 만족하는 함수라 하고, 실수부와 허수부를 나누어 $G = \alpha + i\tilde{\alpha}$로 쓰면,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \alpha}{\partial x} &= \mathrm{Re}\ \frac{\partial G}{\partial x} = \mathrm{Re}\ G'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} \\
\frac{\partial \alpha}{\partial y} &= -\frac{\partial \tilde{\alpha}}{\partial x} = -\mathrm{Im}\ \frac{\partial G}{\partial x} = -\mathrm{Im}\ G'(z) = -\Big(-\frac{\partial u}{\partial y}\Big) = \frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}$$

가 성립하게 된다. 이로써, u와 α의 모든 축 방향 편미분이 일치하는 것이 확인되었고, 따라서 $\tilde{\alpha}$가 u의 켤레 조화함수로서 전혀 손색이 없음을 알게 되었다. 동시에 증명도 완결되었다. □

7 디리클레 문제의 해결

리만이 당연시했던 디리클레 문제를 정확히 해결해 보자. 대학생의 눈높이에 맞는 디리클레 문제의 해결 방법은 포아송 적분공식(Poisson integral formula)과 하낙 부등식(Harnack inequality)에 기반을 둔 페론 방법론(Perron method)을 사용하는 것이다. 이 방법론은 1923년 Mathematische Zeitschrift에 출판된 Oskar Perron 교수의 논문 [8]에 실린 것이며 거의 즉시 Bouligand에 의해 개선된 것인데, 이 방법론이 적용되기 위한 충분조건은 단순하다. 복소 평면 위에 주어진 유계 영역의 임의의 경계점에 국소적으로 정의되는 버금조화 봉우리함수 (subharmonic barrier function)만 존재하면 된다. (이 사실은 조금 더 후대에 Tsuji에 의해 알려졌다.)

따라서 이 방법론을 사용하려면 국소적 버금조화 봉우리함수를 구성해야 한다. 이 방법론은 국소적으로만 성립하면 충분하지만 1900년 Transactions of American Mathematical Society 제1권에 수록된 윌리엄 오스굿 (William Osgood) 교수의 방법론을 따르면 대역적으로도 조화 봉우리함수를 구성할 수 있다 [7]. 이를 소개하기로 하자.

정의 7.1 (조화 봉우리함수): 영역 Ω의 경계점 q가 주어졌을 때, 이 영역의 폐포*(closure)*에서 연속인 함수 h_q가 이 영역 안에서 조화함수이고, 아래 세 조건

(0) $\Delta h_q(z) = 0,\ \forall z \in \Omega.$

(1) $h_q(q) = 0.$

(2) $h_q(z) < 0\ \forall z \in cl\,(\Omega) - \{q\}.$

를 만족하면, 이 함수 h_q를 영역 Ω의 경계점 q에서 정의된 **봉우리 조화함수 *(harmonic peak function, harmonic barrier function)***라 부른다.

도움정리 7.1 (오스굿, Osgood)**: Ω가 복소평면 안에 있는 해석적으로 단순연결된 유계 영역이면, 임의의 경계점에 봉우리 조화함수가 존재한다.**

증명. 경계점 $q \in \partial\Omega$가 임의로 주어졌다고 하자. 그러면 $g(z) := \ln(z-q)$가 영역 Ω 전체에서 잘 정의된 해석함수로서 q를 $-\infty$에 대응시킨다. 폐포 $\mathrm{cl}\,(\Omega)$가 콤팩트이고 로그함수 g가 q를 제외한 모든 점에서 잘 정의된 까닭에, 모든 $z \in \mathrm{cl}\,(\Omega)$에 대하여 조건 $\mathrm{Re}\, g(z) < A$가 성립하게 하는 상수 A가 존재한다. 이제 변환 $B(z) = \frac{g(z)-A+1}{g(z)-A-1} - 1$를 정의하고 이어서 $h_q(z) := \mathrm{Re}\ B(z)$로 두면 원하던 봉우리 조화함수를 얻는다. □

이제 준비가 끝났으므로 페론 방법론을 적용할 수 있게 되었다. 이 부분은 거의 모든 복소함수론 교과서에 실려 있는 바와 완전히 같으므로 여기에서는 페론 방법론 소개를

생략하지만, 잘 알려진 이론이므로, 현 시점에서 이를 그대로 사용하고 페론 방법론에 대한 설명을 생략하여도 현 대학생 수준의 지식을 크게 상회하지 아니한다고 생각한다. (이 논문 마지막의 '후기' 참조 바람).

8 리만 함수의 구성; 제3 단계

이제 Ω를 원점을 포함하는 해석적으로 단순연결되어있는 복소 평면 안에 있는 유계 영역이라고 하고 $u\colon \mathrm{cl}\,(\Omega) \to \mathbb{R}$를 영역 Ω 위에서 매끄러우며 폐포(closure) $\mathrm{cl}\,(\Omega)$ 위에서는 연속이고 또, 두 조건

- $\Delta u(z) = 0$, $\forall z \in \Omega$.
- $u(z) = -\ln|z|$, $\forall z \in \partial\Omega$.

를 모두 만족하는 함수라 하자. 이 함수가 존재하는 것은 앞에서 말한 바와 같이 페론 방법론이 작동하기 때문이다. 원점이 영역 Ω의 내부에 있으므로, 함수 $-\ln|z|$가 경계 위에서 연속함수임을 부언해 둔다.

이제 u의 켤레 조화함수 $v\colon \Omega \to \mathbb{R}$을 택하고 함수

$$F(z) := ze^{u(z)+iv(z)} \tag{1}$$

를 정의하자. 그러면 $|F(z)| = |z|e^{u(z)}$가 Ω의 폐포 $\mathrm{cl}\,(\Omega)$ 위에서 연속함수이면서 경계점 위에서는 값이 1인 것을 쉽게 확인할 수 있다. $F \in \mathcal{O}(\Omega)$인 까닭에 최대절대값정리 (Maximum modulus principle)로부터 $|F(z)| < 1\ \forall z \in \Omega$를 얻고, 조건 $F(0) = 0$와 $F(z) \neq 0\ \forall z \in \Omega - \{0\}$도 쉽게 얻는다.

그러므로 리만 함수정리의 증명은 방금 정의한 함수 $F\colon \Omega \to D := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$ 가 전단사함수임을 증명하면 모두 완결되게 된다. 다음 마디에서 필자와 그린 교수가 제시한 ([3]) 이 부분의 증명을 점검해 보기로 하자.

9 F의 전단사성 증명; 최종 제4 단계

이 증명의 기본 틀은 19세기 수학자들에게 이미 잘 알려져 있었던 모양이다. Ω가 단순연결된 유계 영역이고 그 경계가 비교적 좋은 곡선으로 이루어져 있다면, 위에 구성한 함수 F가 전단사라는 주장의 증명이 직관적으로는(!) 비교적 이해하기 쉽다. 우선 단위원 영역 D의 내부점을 하나 선택하여 w라 두자. 그러면 $F(z) = w$를 만족하는 $z \in \Omega$는 어느 것도 Ω의 경계점에 있을 수 없다. $|F(z)| = |w| < 1$이 성립해야 하기 때문이다. (경계점에서는 $|F| = 1$이 성립하는 것을 이미 관찰했다.)

그러면 영역 Ω의 경계를 조금 안쪽으로 밀어넣어(!) 만들어지는 반시계 방향으로 도는 곡선 γ 안에 $F(z) = w$를 만족하는 $z \in \Omega$들이 (존재한다면!) 위치해야 한다. 그러므로 편각원리(Argument principle)를 적용하면 적절하겠다. 즉, 선적분으로 정의되는 함수

$$n_\gamma(w) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{F'(z)}{F(z) - w} dz$$

의 값이 $F(z) = w$를 만족하는 $z \in \Omega$들의 개수와 같다는 사실을 적용하자는 생각이다. 한편, 원점이 영역 Ω 안에 있으며 $F(0) = 0$가 성립하도록 배려했던 것을 기억하는가? 이 경우 원점이 폐곡선 γ의 내부에 있고, $F(z) = 0$의 근이 단순근 $z = 0$ 뿐임이 명확하므로 $n_\gamma(0) = 1$은 당연하다. 함수 $n_\gamma(w)$가 w에 관한 연속함수이고 정수값만을 취하는 탓에 $n_\gamma(w) = 1$이 폐곡선 γ가 $F^{-1}(w)$를 포함하는 한 모든 w에 대해 성립하게 될 것이다. 이 말은, $F^{-1}(w)$의 원소의 개수가 정확히 1이라는 말이고, 따라서 F가 전단사함수라는 주장의 증명이 완결되게 될 것이다.

하지만, 오스굿 교수는 논문 [7]에서 단순연결 유계 영역의 경계가 그리 단순하지만은 않다는 것을 인식하였다. 복소평면의 실수 축에 포함되는 폐구간 선분 $I = \{x + iy\colon 0 \le x \le 1, y = 0\}$를 생각하면, 이 집합 안에 칸토르 1/3-집합을 만들어내는 기법을 독자들이 기억하실 것이다. 이렇게 하면 칸토르 집합은 닫힌 집합이면서 완전집합 (외톨이 점이 없다는 점에서)이고 1차원 측도가 0이 된다. 하지만 파내는 부분 구간의 길이를 $\alpha/3, \alpha/3^2, \cdots$로 하면서 α를 0과 1사이의 실수로 조정하면, 이 과정의 결과로 얻게 되는 집합은, 여전히 닫힌 완전집합이며 완전히 분산된 (양수 길이의 선분이 포함되지 않는다는 의미에서) 집합이라는 등의 성질은 여전히 보유하지만 1차원 측도는 양수가 된다. 이 집합을 C_α라 두고, 집합

$$W := \{x + iy \in \mathbb{C}\colon -1 < x < 2, 0 < y < 2\} \setminus \{x + iy \in \mathbb{C}\colon x \in C_\alpha, 0 \le y \le 1\}$$

를 정의하자. 그러면 W는 복소 평면 안에 있는 단순연결된 유계영역이지만 그 경계는 2차원 측도 값이 C_α의 1차원 측도 값과 같은, 즉 양수인 영역이다! 이 영역에서는 경계를 "영역 안쪽으로 살짝 밀어 넣어" 폐곡선을 얻을 수 없다.

그래서 오스굿 교수는 당신의 논문에서 구분적으로 실 해석가능한 곡선을 경계로 가지는 유계 영역의 경우로 한정하고, 위의 편각원리를 이용한 증명은 "너무 당연하므로" 아무 설명 없이 그냥 모두 다 생략해 버린 모양이다. 오스굿 교수의 논문에 이 부분 언급이 아무것도 없으므로 사실을 알 수 없으나, 카라테오도리 교수가 당신의 논문 [2]에서 리만함수정리 증명에 대한 오스굿 교수의 논문 [7]의 공헌도를 확실히 인정하는 것으로 (비록 각주에 썼을지라도) 보아, 필자가 이와 같이 유추하는 데 일리가 있다고 본다. (후기 참조).

그래서, 그린 교수와 필자는 논문 [3]에서 일반적인 유계 단순연결 영역에 적용할 수 있도록 방법론을 바꾸었다. 전과 마찬가지로 점 $w \in D$를 단위원 영역 내부에 임의로

선택한다. (선택한 후 고정한다.) 그러면 역시 조건 dist $(F^{-1}(w), \partial\Omega) > \delta$가 만족되도록 적절한 양수 $\delta > 0$를 잡을 수 있다. 임의의 $z \in \partial\Omega$에서 $|F(z)| = 1$이 성립하며, 또 집합 $F^{-1}(w)$가 유한집합이므로 닫힌 부분집합이기 때문이다. 이제 점 $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$를 중심으로 하는 "정사각형 그물"을 정의한다. 이 그물은 양의 정수 N과 정수 n_1, n_2에 대하여 정의되는 집합

$$S_N^{n_1 n_2}(\lambda) := \{x + iy\colon \frac{n_1}{2^N} \leq x + \lambda_1 \leq \frac{n_1+1}{2^N}, \frac{n_2}{2^N} \leq y + \lambda_2 \leq \frac{n_2+1}{2^N}\}$$

들로 이루어진다. 그리고 동시에 집합

$$T_N(\lambda) = \{(N, n_1, n_2)\colon S_N^{n_1 n_2}(\lambda) \subset \Omega\}$$
$$S_N(\lambda) = \bigcup_{(N,n_1,n_2) \in T_N(\lambda)} S_N^{n_1 n_2}(\lambda)$$

들을, $|\lambda|$가 충분히 작은 경우에 생각하기로 하자. 그런 다음 자연수 N을 충분히 크게 잡으면, $F^{-1}(w) \in$ int $(S_N(0))$가 성립하게 된다. 이 N 값을 고정하자. 그리고 양수 r을 충분히 작게 잡아, 조건 $|\lambda| < r$을 만족하는 임의의 복소수 $\lambda \in \mathbb{C}$에 대하여 포함관계 $S_N(\lambda) \subset \Omega$이 성립하게 해 두자.

이 과정을 모두 처리한 후,

$$\nu(w, \lambda) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_N(\lambda)} \frac{F'(z)}{F(z) - w} dz$$
$$:= \sum_{T_N(\lambda)} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_N^{n_1 n_2}(\lambda)} \frac{F'(z)}{F(z) - w} dz$$

를 생각하기로 하자. (지나가는 길에 $T_N(\lambda) = T_N(0)$가 성립한다는 점을 지적해 둔다.) 선적분으로 정의된 이 함수 $\nu(w, \lambda)$는 정수값을 가지지만 최악의 경우에도 유한개의 λ 값을 제외하고는 잘 정의된 연속함수가 된다. 따라서 이 경우 $\nu(0, \lambda) = 1$이 성립하고, $\nu(w, \lambda)$도 잘 정의된다. 결론적으로 $\nu(w, 0) = 1$을 얻으며, 이는 곧 $F\colon \Omega \to D$가 전단사 함수라는 것을 의미한다. 이로써 리만 함수정리의 증명이 완결된다. □

10 후기

수학적인 내용에 밀려 못 다한 말을 몇 마디 붙인다.

1. 끝부분에 와서 글쓰기를 서두른 감이 짙다. 증명 마지막 부분의 기술에 크게 만족하지 못한 독자는 원 논문 [3]을 보면 그림도 있고, 조금 더 잘 설명된 점도 있으므로,그것을 참조하기를 권한다. 그러나 한 가지는 따로 짚고 지나가고 싶다. 위의 정사각형 그물이 주어진 영역을 내부에서부터 영역을 근사적으로 접근하는 부분 영역이라는 의견이 있는데, 그건 성급한 것이고, 일반적으로 옳지도 않다. 아무리 그물코를 작고, 많게 하여도 (수학적으로는 N값을 크게 하여도) 그물이 이루는 부분집합이 연결되지 않게 되는 단순연결 영

역이 존재하기 때문이다. 이런 영역은 자기 닮음형 프랙탈 도형을 만드는 기법을 원용하면 쉽게 구성할 수 있다. ([5] 참조하실 것.)

2. 페론 방법론 (Perron method)으로 디리클레 문제를 푸는 부분은 완전히 생략해버렸다. 이 부분은 원 논문에서도 생략했는데, 이 글에서도 또 생략했다. 그러나 저자가 무슨 의도가 있어서 마치 고의로 그랬거나, 아니면 중요하지 않다고 생각하는 듯한 인상을 주었다면 저자의 잘못이다. 페론 방법론은 저자가 아주 좋아하고 존중하는 중요하고도 멋진 이론이다. 다만 이미 여러 교과서는 물론 1923년 페론 교수의 논문 [8]에 모두들 너무 완벽하게 쓰여졌기에 이를 또 "베끼는" 것이 싫어 생략하였을 따름이다.(페론 이후 이루어진 개선에 관하여는 [3]의 해당 부분 내용을 참조해 주시기 바란다.) 포아송 적분정리와 응용, 하낙 부등식과 하낙의 정리를 이용한 방법론, 그리고 국소 봉우리 버금조화함수(local subharmonic barrier function)를 이용하여 경계값을 성취하는 방법론 등 모두가 리만함수정리의 증명에 본질적인 역할을 한다는 점을 다시금 강조해 둔다.

3. 마지막 정사각형 그물 논증 방법을 적용하지 않은 점을 제외하면, 전체적인 증명으로서는 오스굿 교수의 증명이 옳다는 점을 필자와 그린 교수 [3]의 논증이 보여 주고 있다. 카라테오도리 교수도 당신의 1912년 논문 각주에 오스굿 교수의 증명을 인정하였다. 그러나 오스굿 교수가 경계 조건을 너무 제한한 나머지, 이 경우에는 H. A. Schwarz [11]의 증명 (오늘날에는 Schwarz-Christoffel 변환을 통해 알려진 이 방법론은, 1890년 경에 거의 완성된 결과였던 것 같다)의 결과로 이 경우의 리만함수정리가 따라오기 때문에, 오스굿 교수의 논증 방법이 퇴색되고 말았던 것은 아쉬운 점이었다 [12].

4. 그린 함수를 이용하는 리만의 증명과 착상은 리만 곡면의 표준화 정리를 증명하는데, 그리고 관련된 다른 연구에 큰 역할을 해오고 있다. 그런 의미에서 리만의 착상이 완전히 잊혀졌다고 할 수는 없다는 지적이 있다. 대부분의 복소함수론 교과서에서 잊혀졌을 뿐이라는 것이 정당한 의견이다. 그린 교수와 필자도 이 점을 인지하고 있었으며, 논문 [3]에서 이에 대하여 간단히 언급하였다.

5. 평면 위의 임의의 열린 단순연결 영역이 모두 서로 위상동형이라는 결과는 순전히 위상수학적 명제이지만 최고의 증명은 리만함수정리가 제공한다. 위상적인 증명을 보려면 [6]을 추천한다.

6. 논문 [3]을 작성하고 arxiv.org에 게시한 후 여러 저명 수학자들로부터 이와 같은 시도가 다른 학자들에 의해 이루어졌음을 지적하는 전자 메일을 받았다. 하지만 로버트 그린 교수와 필자는 놀라지 않았다. 지금은 리만의 처음 증명으로부터 160년이 훌쩍 넘은 시점이기 때문이다. 다른 한 편, 이런 좋은 증명은 또다시 재발견하고 재해석할 가치가 충분하다는 생각에 특별히 다른 학자들의 문헌을 (찾기도 어려웠거니와) 찾을 필요를 느끼지

못하였다. 이 정리와 증명은 리만 이후 지금에 와서 누가 뭘 어떻게 했느냐에 무관하게 영원히 리만의 정리이고 리만의 증명일 것이기 때문이다.

References

1. L. V. Ahlfors, *An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, Second edition, International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill Book Co, 1966. xiii+317 pp.
2. C. Carathéodory, Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten, *Math. Ann.* 72(1) (1912), 107–144.
3. R. E. Greene, Kim K.-T., *The Riemann mapping theorem from Riemann's viewpoint*, http://www.arxiv.org., (2016); To appear in Complex Analysis and its Synergies.
4. R. E. Greene, S. G. Krantz, *Function theory of one complex variable*, Third edition, Graduate Studies in Mathematics 40, American Mathematical Society, 2006. x+504 pp.
5. H. von Koch, Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes, *Acta Math.* 30(1) (1906), 145–174.
6. M. H. A. Newman, *Elements of the topology of plane sets of points*, 2nd ed, Cambridge University Press, 1951. vii+214 pp.
7. W. Osgood, On the existence of the Green's function for the most general simply connected plane region, *Trans. Amer. Math. Soc.* 1(3) (1900), 310–314.
8. O. Perron, Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für Δu=0, *Math. Z.* 18(1) (1923), 42–54.
9. R. Remmert, *Classical topics in complex function theory*, Translated from the German by Leslie Kay, Graduate Texts in Mathematics 172, Springer-Verlag, New York, 1998. xx+349 pp.
10. G. F. B. Riemann, *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse*, Inaugraldissertation, Göttingen, 1851. Zweiter unveränderter Abdruck, Göttinger 1867.
11. H. A. Schwarz, Conforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel, *J. Reine Angew. Math.* 70 (1869), 121–136.
12. J. Walsh, History of the Riemann mapping theorem, *Amer. Math. Monthly* 80 (1973), 270–276.