대한수학교육학회지 <학교수학> 제 19 권 제 1 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 19, No. 1, 1 ~ 18. Mar 2017

초등 예비교사의 수학적 문제제기 사례 분석[1)]

이 동 환*

본 연구는 초등 예비교사의 수학적 문제제기 활동을 관찰하여 그 특징을 파악하고 문제제기 과정이 예비교사에게 제공하는 학습 기회를 분석하였다. 예비교사들의 문제제기 과정은 문제 조건 변형, 문제 성립 조건 탐구, 문제 구조 이해, 문제에서 생성된 개념 탐구로 구성되었고, 각 단계에서 문제제기와 수학적 탐구가 결합하면서 다음 단계로 이어졌다. 탐구와 결합된 문제제기를 통해 예비교사들은 기존 개념을 재해석하고 새로운 수학적 대상을 발견하면서 수학적 개념들 사이의 연결성을 이해할 수 있었다. 예비교사들은 수학교육에서 문제제기의 중요성을 인식하였으며, 문제제기는 예비교사들에게 토론과 협력의 기회를 제공하였다.

I. 서 론

최근 수학교육에서 문제해결 못지않게 문제제기의 중요성이 강조되고 있다. UNESCO(2012)는 수학교육에서 길러야 하는 8가지 기본 역량 가운데 하나로 문제제기 역량을 제시하였다. 우리나라 역시 21세기 정보화 사회를 고려하여 수많은 정보들을 수동적으로 받아들이기만 할 것이 아니라 보다 능동적으로 의문이나 문제를 제기하여 이를 해결하고 다른 상황에 응용할 수 있는 역량을 강조하고 있다(김슬비, 황혜정, 2015).

이처럼 수학적 문제제기의 중요성이 강조되고 있지만 수업시간에 이를 경험한 학생들은 많지 않다(Singer, Ellerton, & Cai. 2013). 그 이유 중의 하나는 교사들이 문제제기 경험이 부족하여 문제제기 활동의 효과를 인식하지 못하고 그 결과 이를 실천하는 데 소극적이라는 것이다(Osana & Pelczer, 2015). 이는 교사교육에서 문제제기 활동이 강조되어야 함을 시사한다. 특히, 문제제기는 수학교사의 중요한 활동 가운데 하나이다. 교사가 어떤 문제를 선택하고 어떻게 변형하는가에 따라 수업의 모습이 달라질 수 있다. 그러나 초등교사의 상당수는 문제는 외부에서 주어지는 것이라는 인식이 강하다(Hošpesová & Tichá, 2015). 이미 수많은 문제가 존재하므로, 새로운 문제를 직접 만들 필요가 없다고 생각하는 경향이 있는데, 이는 문제제기가 수학적 개념을 이해하고 발전시키는 중요한 방법이라는 점을 간과한 것이다(전영배, 노은환, 김대의, 강정기, 2013; Ellerton, 2013, 100).

수학적 문제제기 연구는 주로 학습자가 만든 문제의 유형을 분류하고 특징을 분석하여 이들이 가진 수학적 지식의 특징이나 결함을 파악하는 형태로 이루어졌는데(Stickles, 2016; 이유진, 2013), 최근의 연구는 문제제기의 교육적 효과에 주목한다. 예를 들어, 인지적 측면에서 문제제기는 학습자의 문제해결 능력, 수학적 창의성을 향

---

* 부산교육대학교, dhdhdh@bnue.ac.kr
1) 이 논문은 2016년도 부산교육대학교 교내 연구과제로 지원을 받아 수행된 연구임

상시키고 또한 수학적 개념이나 수학적 사고에 도움이 되는 것으로 나타났다.(김경옥, 류성림, 2009; Singer & Moscovici, 2008). 정의적 측면에서 문제제기는 학습자의 수학에 대한 흥미와 관심을 자극하고, 수학적 가치를 인식하고 수학에 대한 태도와 자신감을 향상시키는 것으로 나타났다(김슬비, 황혜정, 2015; Cifarelli & Ca, 2005). 그러나 문제제기의 효과를 강조한 연구는 주로 문제제기 활동 이후 학습자의 설문이나 면담을 분석하거나 제기된 문제를 분석하는 데 초점을 두고 있다. 다시 말해, 문제제기의 과정을 세밀하게 분석하여 각 단계가 어떻게 관련되어 있고, 이러한 특징이 어떠한 학습 기회를 제공하는지는 구체적으로 밝혀지지 않았다. 따라서 문제제기 과정을 구체적으로 관찰하여 문제제기 활동이 어떻게 수학학습 기회와 관련되는지를 구체적으로 분석할 필요가 있다.

이와 관련하여, Hošpesová & Tichá는 수학교사의 문제제기 과정을 분석하여 문제제기와 수학적 탐구의 밀접한 관련을 파악하였다. 예를 들어, 문제를 변형하는 과정에서 수학적 탐구를 경험하고 이를 통해 교사는 자신의 부족한 점을 인식하거나 수학적 개념을 다른 관점에서 이해할 수 있다는 것이다. 그러나 이러한 연구는 문제제기가 어떻게 수학적 탐구와 관련되는지를 구체적으로 탐색하지 않았다. 한편, 전영배 외 (2013)은 문제제기에서 자주 사용되는 What If Not 전략에 따는 문제제기 과정을 세밀하게 관찰하여 '의미 분석' 활동이 필요함을 주장하고, 이러한 활동이 문제제기의 교육적 효과를 높일 수 있음을 주장하였다. '의미 분석' 활동은 문제제기 과정에서 문제의 속성 간의 관련성에 대한 고려 없이 속성을 변형할 때, 문제가 잘못 설정될 수 있다는 점에 근거하여 이를 방지할 수 있는 교육적 활동에 해당한다. 이러한 연구는 문제제기 과정을 구체적으로 분석하여 그 과정을 정교화 했다는 의의가 있으나 '의미 분석' 활동을 학습자의 구체적 사례로 제시하기 보다는 사고실험 형태로 제안했다는 한계가 있다.

이에 본 연구는 초등 예비교사의 수학적 문제제기 사례를 구체적으로 분석하여 문제제기 과정의 특징을 파악하고 그 교육적 효과를 분석하고자 한다. 이를 위해, 초등 예비교사에게 문제제기 기회를 제공하고 제기된 문제의 특징 보다는 문제를 제기하는 과정에 주목하고 이를 분석하여 문제제기의 구체적인 사례를 제시하고자 하였다. 이를 위한 연구문제는 다음과 같다. 초등예비교사의 수학적 문제제기 과정의 특징은 무엇인가? 수학적 문제제기는 초등예비교사에게 어떠한 학습기회를 제공하는가?

II. 이론적 배경

1. 교사교육에서 수학적 문제제기의 역할

수학적 문제제기는 의문이나 문제를 논의의 대상으로 내어 놓는 것으로, 주어진 조건에 기초하여 새로운 문제를 만들거나 주어진 문제로부터 새로운 문제를 재구성하는 활동을 모두 포함하는 것이다(Silver, 1994; 김슬비, 황혜정, 2015). 문제제기 활동에서 학습자는 문제의 조건을 수정하면서 그 결과가 해답에 어떠한 영향을 주는가를 반성할 수 있고 이러한 과정에서 다양한 학습 기회를 얻을 수 있다(Silver, 1994). 이러한 교육적 가치를 정의적 측면과 인지 측면으로 구분할 수 있다.

정의적 측면에서 문제제기는 학습자의 수학에 대한 태도에 긍정적인 영향을 준다. 학습자가 직접 문제를 제기할 때, 학습의 주체라는 느낌을 강하게 받을 수 있는데, 이러한 주체감이 수업 참여도를 높이고 호기심을 자극하여 수학학습

동기를 부여할 수 있다. 또한 교사나 교과서에 의존하는 경향이 낮아져서 자기 주도적 학습에도 도움이 된다(Lavy & Shriki, 2007; Cunningham, 2004). 문제제기를 경험한 교사는 학생들이 답을 찾는 데만 몰두하지 않고, 다양한 아이디어를 논의하고 문제의 의미를 생각할 수 있는 수업이 바람직하다는 인식을 갖게 된다(Lavy & Shriki, 2007).

인지적 측면에서 문제제기는 다양하고 유연한 사고를 촉진하며, 문제해결 능력을 향상시킨다(Brown & Walter, 1990). Brown & Walter(1990)는 문제해결과 관련하여 문제제기의 두 가지 역할을 주장하였다. 첫째, 문제해결 과정에서 새로운 문제를 설정하면서 원래 문제를 재해석하고 그 문제를 해결할 수 있는 단서를 얻게 된다. 둘째, 원래 문제와 다른 문제를 설정하고 그 문제를 분석할 때 그 의미를 이해할 수 있다. 전영배 외(2013)은 두 번째 측면, 문제해결 이후 문제에 대한 보다 깊이 있는 이해에 이르게 하는 수단으로서 문제제기의 역할에 주목하여 문제제기 과정에서 '의미 분석' 단계를 강조하였다. 이처럼 문제제기는 단순히 새로운 문제를 만드는 것이 아니라 주어진 문제의 해결과 이 문제를 보다 깊이 있게 통찰하는 수단임을 알 수 있다.

따라서 본 연구는 수학적 문제제기 과정이 어떻게 주어진 문제에 대한 깊이 있는 통찰로 연결될 수 있는지에 주목하고, 그 사례를 제시하고자 한다. 이를 위해 문제제기 과정을 보다 세밀하게 분석한 선행연구를 살펴보고 시사점을 얻고자 한다.

2. 수학적 문제제기와 수학적 탐구

최근 문제제기 관련 연구를 살펴보면, 학습자가 제기한 문제의 유형을 분류하고 특징을 확인하기보다는 그러한 문제를 제기하는 과정에서 나타나는 학습자의 사고 과정을 관찰하거나 그러한 과정에서 학습자가 배우는 것이 무엇인지를 분석하는 연구에 대한 관심이 높아지고 있다(Cai, Hwang, Jiang, & Silber, 2015).

Koichu & Kontorovich(2013)는 학습자의 성공적인 문제제기 과정을 관찰하여 세 가지 특징을 도출하였다. 첫째, 전형적인 문제에서 출발하고 의존하지만 그 문제와 다르게 만들려는 노력이 보인다. 둘째, 문제를 만드는 과정에서 수학적 탐구와 문제해결이 함께 나타난다. 셋째, 준비, 흥미로운 수학적 상황 탐구, 문제에서 문제제기 과정 감추기, 검토의 단계를 거친다. 특히, 전형적인 문제와 비슷한 문제를 만드는 준비 과정에서 학습자가 흥미로운 수학적 상황에 마주할 수 있는데, 이러한 상황을 탐구하면서 의미 있는 문제가 만들어졌다. Koichu & Kontorovich(2013)가 수학적 문제제기 과정에서 수학적 탐구가 일어나야한다는 점을 강조했다면, Da Ponte & Henriques(2013)는 수학적 탐구 과정이 학생들에게 문제제기의 기회를 제공한다고 주장하였다. 주어진 자료나 사례로부터 추측을 제기하고 이를 반박하거나 정교화하면서 새로운 문제가 제기되고 이 문제를 해결하면서 새로운 문제가 다시 제기되는 과정을 관찰하였다. 이를 토대로 Da Ponte & Henriques(2013)는 문제제기와 문제해결은 결합되어 반복적으로 일어나고 이것을 수학적 탐구의 특징으로 설명하였다. Crespo & Sinclair (2008)는 수학적 탐구의 기회를 제공한 예비교사들의 문제가 그렇지 않은 예비교사들의 문제보다 수학적으로 의미 있고 흥미롭다는 사실을 관찰하였다. 이를 근거로 이들은 수학적 탐구와 문제제기를 분리하는 것은 문제 생성의 중요한 기회를 빼는 일이라고 주장하였다.

수학적 탐구의 정의에 대한 명확한 합의는 이루어지지 않았지만 수학자가 수학을 연구하는 과정이라고 볼 수 있는데, 이러한 수학적 탐구의

전형적인 특징은 스스로 어떤 현상을 관찰하여 수학적 추측과 문제를 제기하고 이를 검증하는 활동이라고 볼 수 있다(이동환, 2016). 이러한 관점에서 수학적 탐구와 문제제기는 밀접한 관련이 있음을 알 수 있다.

이와 관련하여 수학적 문제제기 과정에서 수학적 탐구의 역할이 상세하게 살펴볼 필요가 있다. Leikin (2015)는 동적 기하 환경에서 탐구 활동이 문제제기를 촉진하는 도구가 된다고 제안하였고, 문제제기와 탐구가 서로 관련되어 있음을 강조하면서 '탐구를 위한 문제제기'와 '탐구를 통한 문제제기'를 구분하였다. '탐구를 위한 문제제기'는 도형에 관한 정리를 탐구문제로 변형하는 활동에 해당하며, 이렇게 변형된 탐구문제를 해결하는 과정에서 새로운 문제가 제기되는 상황을 '탐구를 통한 문제제기'로 규정하였다. 이처럼 문제제기와 탐구는 서로 결합하면서 반복되는 과정으로 볼 수 있다. Cifarelli & Cai (2005)는 예비교사가 수학적 상황을 탐구하면서 자신만의 문제를 만들고 해결하는 과정을 분석하여 문제를 제기하는 두 가지 추론방식 즉, 자료 주도 추론(data-driven reasoning)과 가설 주도 추론(hypothesis-driven reasoning)을 도출하였다. 자료 주도 추론은 여러 가지 구체적인 사례를 수집하여 자료로부터 새로운 관계를 찾아내는 방법이다. 가설 주도 추론은 주어진 상황을 완전하게 이해하진 못했지만 잠정적인 가설을 먼저 설정하고 이를 상황에 적용하고 결과를 확인하는 방법이다.

전영배 외(2013)는 'What-if-not?' 전략을 포함하는 '의미 분석을 강조한 문제제기 모형'을 설계하였는데, 그 모형은 [기존 문제→속성 나열→What-if-not?→문제제기→의미 분석(제기된 문제의 오류 파악)→개선된 문제제기→완료]와 같다. 여기서, 의미 분석이란 주어진 문제의 속성의 의미를 파악해 보고, 관계를 찾아 제기된 문제의 옳고 그름을 판단하도록 하는 과정이다. 문제설정이 올바르게 이루어지기 위해서는 반드시 속성들 간의 유기적 결합을 이끌어 내는 내재된 지식이 요구되기 때문에, 이 지식을 인식하는 것을 문제설정의 중요한 부분으로 본 것이다.

> 잘못 설정된 문제 상황에서 이를 단순히 개선하고 지나치기보다, 왜 이런 상황이 발생했는지를 반성해 봄으로써 내재된 지식을 이끌어내는데 도움이 될 것이라고 생각하였다. 이러한 입장에서 문제는 문제설정 상황에서 옳고 그름을 판가름하여 잘못 설정된 문제 상황을 인식하고 탐구할 수 있는 수단을 마련하는 것이 될 것이다(전영배 외, 2013, p.403).

전영배 외(2013)가 강조한 '의미 분석'은 문제제기 과정에서 원래 문제의 '내재된 지식'을 탐구하는 활동이 중요함을 지적한 것이며, 바로 그러한 '내재된 지식'이 문제제기 과정에서 드러날 때 학습이 일어날 수 있음을 함의한다고 볼 수 있다.

이와 같이 수학적 문제제기와 수학적 탐구 과정의 밀접한 관계를 강조하는 연구를 토대로, 본 연구에서는 예비교사가 만든 문제보다는, 예비교사가 문제를 만드는 과정을 중점적으로 분석할 것이다. 특히, 원래 문제의 '내재된 지식'을 드러내는 '의미 분석' 단계에서 일어나는 수학적 탐구의 양상에 따라 문제제기 과정의 특징을 분석하고자 한다. 다시 말해, 본 연구는 예비교사가 수학적 문제제기 과정에서 수학적 탐구를 경험할 수 있다고 가정하고, 예비교사가 참여한 문제제기 과정의 특징을 살펴보고 문제제기 활동이 예비교사에 제공하는 학습 기회를 분석한다.

III. 연구방법

<과제> 보기 문제를 토대로 이 보다 쉬운 문제와 어려운 문제를 만들어 봅시다.

<보기 문제(가로등 문제)> 길이가 126m인 도로에 가로등 43개를 같은 간격으로 설치하고, 신호등 19개를 같은 간격으로 설치하였습니다. 도로의 처음과 끝에도 가로등과 신호등을 설치하였다면, 같은 위치에 설치된 가로등과 신호등은 모두 몇 개입니까?

[그림 III-1] 문제제기 과제

1. 연구대상 및 방법

본 연구자가 소속된 교육대학교의 2016년도 2학기 수학교재연구 강좌를 수강하는 2학년 28명을 대상으로 연구를 수행하였다. 수학교재연구 강좌는 초등학교 수학교육과정의 내용을 이해하고 이를 수업에서 실현하는 구체적인 방법의 지도를 목적으로 한다. 수강생들은 초등수학교수법 강좌를 수강하였고 이 강좌에서 수학교육 일반 이론에 대한 배경지식은 갖춘 상태이다.

사례연구는 현상을 심층적으로 이해하여 새로운 의미를 발견하는 데 사용된다(우정호 외, 2016). 본 연구는 초등 예비교사들의 수학적 문제제기 과정의 특징을 분석하고 이 과정에서 이들에게 주어진 학습 기회를 파악하는 것이 목적이므로 사례연구를 연구방법으로 선택하였다.

2. 연구절차

수학교재연구 강좌에서 약수와 배수를 주제로 문제제기 수업을 실시하였다. 구체적인 수업 흐름은 <표 III-1>과 같다. 문제제기 활동에 앞서 초등학교 교육과정에서 다루는 약수와 배수 관련 내용을 소개하고, 최대공약수와 최소공배수 개념을 주제로 문제제기 의미와 사례를 강의하였다. 문제제기 수업은 예비교사들이 4인 1모둠으로 문제제기 과제를 수행하고, 모둠별 논의를 토대로 전체논의를 하는 방식으로 2시간에 걸쳐 진행되었다. 연구자는 각 모둠의 활동을 관찰하면서 전체논의의 대상이 될 만한 내용을 선정하고 이를 중심으로 전체논의를 진행하였다.

문제제기 과제는 [그림 III-1]과 같다. [그림 III-1]의 보기 문제는 초등학교 5학년 수준의 일반적인 문항이다. 전형적인 풀이는 다음과 같다. $126 \div 42 = 3$, $126 \div 18 = 7$ 으로 가로등, 신호등의 간격을 계산하고, 두 간격의 최소공배수를 구하면 가로등과 신호등이 21m 간격으로 서로 동일한 위치에 설치됨을 알 수 있다. $126 \div 21 = 6$ 이므로 이 도로 위에 같은 위치에 설치된 가로등과 신호등은 모두 7개이다. 실제로 본 연구에서 모든 예비교사들은 이러한 방식으로 문제를 해결하였다. 그러나 이 문제에서 도로 길이는 중요하지 않고 가로등, 신호등의 개수에 의해서 답이 결정 된다[2]. 이처럼 가로등 문제는 일반적인 풀이로는 드러나지 않는 측면이 있는데, 이러한 특징 때문에 본 연구에서 문제제기 과제로 선정하였다. 문제해결 활동으로는 알기 어려운 문제의 구조가 문제제기 과정에서 드러날 수 있기 때문이다. 연구자는 문제제기 과정에서 예비교사

<표 III-1> 수업흐름

40분	10분	10분	30분	5분	5분
약수와 배수 관련 강의	문제제기의 의미 및 사례 강의	모둠별 문제제기	전체논의	정리	수업후기 작성

2) 자세한 내용은 ‘Ⅳ.연구결과’에서 설명한다.

들이 문제의 이러한 구조를 이해하기를 기대하였고, 예비교사들이 문제제기 활동에서 어떠한 과정을 통해 그 구조를 이해하게 되는지를 관찰하였다. 특히, 예비교사들이 문제제기를 자연스럽게 받아들일 수 있도록 주어진 문제를 쉬운 문제와 어려운 문제로 변형하는 과제를 제시하였다.

3. 자료수집 및 분석방법

본 연구는 예비교사들의 문제제기 과정을 분석하여 특징을 파악하고 이 과정에서 예비교사들의 학습 기회를 확인하는 데 목적이 있다. 이를 위해 모둠토의와 전체토의 과정을 관찰하고 토의과정을 녹음하였다. 또한 수업 중 기록한 메모와 예비교사들의 기록물, 수업 후 예비교사들의 수업후기를 수집하였다. 토의과정은 예비교사들의 논의 주제에 따라 에피소드 10개로 구분하였다. 이렇게 구분한 에피소드는 '예비교사들이 제기한 문제가 새로운 유형인가?' 또는 '생성된 문제로부터 새로운 주제의 수학적 논의가 시작되었는가?'를 기준으로 다시 분류하여 네 단계로 구분하였다. 이 과정에서 Leikin (2015)이 제안한 '문제제기를 통한 탐구'와 '탐구를 위한 문제제기' 개념을 적용하였다. 그 결과 10개의 에피소드는 예비교사들의 주된 활동의 특징 및 제기한 문제 및 탐구의 목적에 따라 크게 네 단계로 구분하여 연구결과에 제시하였다.

분석 결과의 가독성을 높이기 위해 문제제기의 네 단계 별로 참여 학생을 구분하여 A1, A2 ~ E3, E4로 표현하였다. 예비교사들이 작성한 수업후기는 문제제기 과정이 예비교사에게 제공한 학습기회를 분석하는 데 주로 사용되었다. 예비교사들의 학습기회는 수업 에피소드에서 드러난 수학적 내용과 수업 후기 및 토의 과정에서 드러난 수학교수학적 내용 측면을 중심으로 분석하였다.

Ⅳ. 연구결과

문제제기에 참여한 예비교사들의 논의를 분석한 결과, 문제제기와 수학적 탐구가 밀접하게 결합되는 모습을 볼 수 있었다. 본 연구에서는 문제제기와 수학적 탐구의 관계에 따라 문제제기 과정을 네 단계로 구분할 수 있었다. 각 단계에서 예비교사들이 참여한 논의의 내용과 목적에 따라 단계의 특징을 추출하고 그 결과를 기술하였다. 수업 에피소드에는 예비교사 16명이 등장한다. 연구자는 전체 논의에 가능한 많이 참여하도록 발언 기회를 균등하게 분배하고 유사한 발언이나 다양한 아이디어 등을 장려하는 등 허용적인 분위기를 조성하였다. 예를 들어, 대부분이 알 수 있는 내용일 경우 발언 기회가 없었던 예비교사에게 그 내용을 말할 수 있는 기회를 제공하였다. 특히, 예비교사들의 발언을 칠판에 기록하는 것이 논의의 연속성을 유지하고 예비교사들의 참여를 촉진하는 역할을 하였다. 이러한 과정을 통해 수강생 전체가 문제제기 과정에 참여하는 환경을 조성하였다.

1. 문제 조건 변형

가장 보편적인 문제제기 전략은 조건 바꾸기 예를 들어, 문제의 수치를 바꾸는 것이다(Silver & Cai, 1996). 본 연구에서도 예비교사들은 가로등, 신호등의 개수를 바꾸거나 도로 길이를 변형하면서 새로운 문제를 만들었고, 나눗셈이 복잡한 정도를 기준으로 어려운 문제와 쉬운 문제를 판단하였다. 이 과정에서 예비교사들은 자연스럽게 나눗셈 몫이 자연수가 아닌 경우에 주목하였다. 7개 모둠 가운데 A모둠은 문제 조건 변형 활동이 명시적으로 드러났고, 모둠원 모두 활발하게 문제제기 활동에 참여하였다. 따라서 연구자는 A모둠에 주목하였고 A모둠의 문제제기 사

례를 토대로 전체 논의를 진행하였다.

[에피소드 1]

A1: 계산하기 쉽게 가로등 21개, 신호등 11개로 바꿔볼까? 아, 126÷20은 소수라서 더 어렵겠다. 도로 길이를 120m로 바꿔서 120÷20=6, 120÷10=12. 가로등, 신호등 6m, 12m 간격이니까 12m마다 만나고, 120÷12=10 이니까 같은 위치에 설치된 건 모두 11개.

A2: 그럼 어려운 문제는 126m 도로에, 가로등 21개, 신호등 11개로 할까? 126÷20=6.3, 126÷10=12.6. 12.6m 간격으로 만나고, 126÷12.6=10. 어려울 줄 알았는데, 아니네.

A3: 그럼 어렵게 가로등 34개, 신호등 25개 하자. 126÷33=3.8181…, 126÷24=5.25 인데 이러면 답이 없네. 숫자를 아무렇게나 바꿔선 안 되겠다. 126을 나눌 수 있는 수로 가로등, 신호등 개수를 정해야겠다. 아, 그래서 원래 문제가 43개, 19개였구나.

A3는 가로등, 신호등의 개수와 도로 길이의 관계에 주목하고, 가로등, 신호등 개수가 도로 길이를 '나눌 수 있는 수'가 되지 않으면 답이 없음을 주장하였다. A3의 '나눌 수 있는 수'의 판단 기준이 나눗셈 몫이 자연수인지, A2의 설명처럼 유한소수인지 명확하지 않았기 때문에, 연구자가 개입하여 질문하였다.

[에피소드 2]

연구자: 그럼 도로가 126m 일 때, 가로등, 신호등 개수로 가능한 수는 무엇일까?

A3: 126의 약수요. 예를 들어, 9, 14가 약수니까 가로등, 신호등 개수를 10개, 15개로 하는 건 괜찮죠.

A1: 126 약수면 무조건 된다고? 126÷9=14, 126÷14=9 인데, 그럼 9m, 14m 간격이면, 아, 그래도 만나겠네. 최소공배수가 126이니까 끝에선 만나는구나. 그런데, 혹시 최소공배수가 126보다 클 수는 없나? 그럼 못 만나는 거잖아.

A2: 문제에서 도로의 처음과 끝에 항상 가로등, 신호등 설치한다고 했으니까 그 처음과 끝 지점에선 언제나 만나지.

A1: 아 그러네. 그럼 나눈 값이 무엇이든 두 수의 최소공배수가 126보다 클 수는 없다? 정말 그런가? 126÷21=6, 126÷3=42인데 6과 42 최소공배수 42. 126÷14=9, 126÷21=6에서, 9와 6은 최소공배수는 18. 맞네. 정말 항상 그런가? ...

A3: 당연하지. 지금 네가(A1) 한 건 126의 약수로 126을 나눈 몫으로 최소공배수 구하는 건데, 이런 수는 당연히 126의 약수지. 그러니까 126의 약수끼리 최소공배수 구해봤자 126보다 클 수가 없지.

A1: 아. 알겠다. 결국 126 약수 가지고 최소공배수 구한 거구나. 당연한 거였네. 약수 배수 관계 당연한 건데 이렇게 보니까 신기하네.

A3의 '나눌 수 있는 수'의 의미는 약수였다. A3은 가로등, 신호등의 개수가 도로 길이의 약수일 때 문제가 성립한다고 파악하였다. 앞서 A2가 126의 약수가 아닌 20과 10으로 가로등, 신호등 개수를 설정했으나 A2는 자신의 사례는 언급하지 않았고[3], A3의 약수 조건에 동의하였다. A1 역시 약수 조건에 동의하였으나 이 조건으로 가로등, 신호등 간격이 자연수가 된다고 해도 그 간격이 서로 겹치지 않을 수 있다는 의문을 제기했다. A2는 처음과 끝에서 항상 만난다는 문제의 조건을 설명하였지만, A1은 최소공배수의 관점에서 여전히 의문이 해소되지 않았다. A1은 문제의 조건으로 인해 최소공배수가 126보다 클 수 없다는 점은 인정하지만 왜 그런가를 알고 싶었던 것이다. 이 때 A3의 약수와 배수 관계에 대한 설명을 통해 최소공배수를 이용한 풀이 방법이 문제의 조건을 반영한다는 점을 확인하면서 A1은 현재의 풀이 방법과 문제 성립

3) A2는 [에피소드3]에서 이 부분에 주목한다.

조건에 확신을 갖게 되었다. A3는 126의 약수로 가로등, 신호등 개수를 변형하면서 자신의 추측을 확인하였고 이는 자료-주도 추론에 해당한다고 볼 수 있다(Cifarelli & Cai, 2005).

2. 문제 성립 조건 탐구

예비교사들은 도로 길이와 가로등, 신호등의 개수를 임의로 바꿀 경우 문제가 성립하지 않을 수 있다는 데 동의하였다. 연구자는 논의의 초점이 문제의 성립 가능 조건에 맞추어지도록 A 모둠에서 합의한 문제 성립 조건을 전체 학생들에 소개하고 동의여부를 확인하였고, 이후 논의는 이 내용을 바탕으로 진행되었다. 이 단계에서 문제제기는 문제의 조건을 바꾸는 것이 아니라 문제 성립 조건을 확인하는 활동으로 진행되었다. 이 단계부터는 논의 주제에 따라 예비교사들이 모둠과 상관없이 자신의 의견을 발표하였다.

[에피소드 3]

연구자: 도로 길이가 Km 일 때, K의 약수 a, b에 대하여 가로등의 개수는 a+1, 신호등의 개수는 b+1가 되도록 문제를 만들어야 한다.

B1: 그럼 약수가 없는 수를 도로 길이로 하면 안 되겠네요. 31m처럼 소수이면, ... 아. 안 되는 건 아니지만 그냥 처음과 끝에서만 겹치겠네요. 그러니까 도로 길이를 소수로 하면 의미가 없는 문제가 되겠네요. 답이 그냥 뻔하니까.

B2: 31m라도, 가로등 5개, 신호등 3개 설치하면, 도로 중간에서 한 번 만나는데.. ([그림 IV-1])

B1: 31÷4=7.75, 31÷2=15.5 ... 아 7.75 2배가 15.5니까 15.5m마다 겹칠 수 있구나.

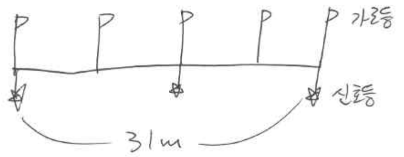
B2: 그럼 가로등, 신호등 개수가 도로 길이의 약수일 필요는 없다는 거네.

B3[4]: 아까 가로등 21개, 신호등 11개로 만든 문제도 약수는 아니었었네. 6.3m, 12.6m 나와서 12.6m 간격으로 겹친다고 생각했거든. 겹치는 지점이 쉽게 보여서 이게 약수라고 생각했던 것 같아.

B2: 그럼 가로등, 신호등 개수는 아무렇게나 해도 된다는 거지?

B4: 그건 아닐 걸. 아까 126m에 가로등 23개, 신호등 17개 했더니, 126÷33=3.8181⋯, 126÷24=5.25 였거든. 3.8181⋯ m와 5.25m 간격인데, 이러면 서로 겹치지 않잖아.

B3: 그럼 나눈 몫이 유한소수면 되나? 지금 7.75, 15.5, 6.3, 12.6처럼 간격이 유한소수일 때는 답이 존재하고, 네가(B4) 말한 건 3.8181⋯ 때문이잖아.



[그림 IV-1] 가로등과 신호등의 위치

문제제기 과정에서 예비교사들은 가로등, 신호등의 개수가 도로 길이의 약수라는 추측을 하였으나, 반례가 등장하면서 추측이 변경되었다. B1은 반례 보다는 기존 추측을 확인하는 사례로서 소수 길이의 도로를 제시한 것이다. 도로 길이가 31처럼 소수이면 가로등 2개, 신호등 32개인 경우만 설치할 수 있고, 이 경우 처음과 끝 지점에서만 겹친다. 그러나 B2는 도로 길이가 아닌 가로등, 신호등의 개수에 초점을 두면서 B1의 사례를 토대로 반례를 제시하였고, 이를 통해 B3은 자신이 만들었던 문제 역시 기존 추측의 반례였음을 인식하였다. 그러나 여전히 도로 길이와 가로등, 신호등 개수 사이의 관계에 초점을 두었고, B4의 사례에 근거하여 나눈 몫이 유한소수라는 추측이 제기되었다. B3의 설명에서 알 수 있듯이, 나눈 몫이 유한소수라는 추측은 지금까지 언급된 사례를 모두 설명하고 있었고, 모두들 동의하였다. 따라서 연구자는 이 결과를 정리

4) [에피소드1,2]의 A2와 동일 인물

하고, 이 내용을 바탕으로 논의를 진행하였다.

[에피소드 4]

연구자: 도로 길이가 Km 일 때, 가로등, 신호등의 개수가 a+1, b+1이면, $\frac{K}{a}$, $\frac{K}{b}$가 유한소수이다. 그럼 K와 a, b가 어떤 조건을 만족해야 할까?

C1: 이거 중학교인가 고등학교 때 배운 건데. 분모에 2나 5만 있게 만드는 거.

C2: $126=2\times3^2\times7$ 이니까 $\frac{2\times3^2\times7}{a}$ 에서 a에 3이나 7의 소인수는 있어도 괜찮지. a가 $45=5\times3^2$ 나 $28=4\times7$라도 $\frac{2\times3^2\times7}{5\times3^2}=\frac{14}{5}$, $\frac{2\times3^2\times7}{4\times7}=\frac{9}{2}$는 모두 유한소수니까 가로등 46개, 신호등 29개로 바꿔도 괜찮네. 45, 28이 126의 약수는 아니지만 몫이 유한소수라서 문제는 풀 수 있을테고. 다만 계산이 복잡해져서 애들한테는 어렵겠다. 이걸 어려운 문제로 하면 되겠네.

예비교사들은 분수가 유한소수가 되는 조건을 떠올렸고, 이에 따라 C2는 가로등 46개, 신호등 29개인 경우를 제시했다. 예비교사들은 가로등, 신호등의 개수에 따라 문제가 성립되지 않을 수 있다고 가정한 상태이며, 그 기준으로서 도로 길이를 가로등, 신호등 개수로 나눈 몫이 유한소수가 된다는 것에 합의한 상태이다. 연구자는 이 기준을 명확하게 표현하고 논의를 진행하였다.

3. 문제 구조 이해

예비교사들은 문제 성립 조건을 탐구하면서 $\frac{K}{a}$, $\frac{K}{b}$가 자연수라는 추측과 유한소수라는 추측을 하였으나 각각에 대한 반례가 제기되면서 대안적인 풀이를 고려하기 시작했다. 즉, 도로 길이와 가로등, 신호등 개수 사이의 관계와 관련된 추측이 모두 반박되면서 가로등, 신호등 개수에만 주목한 추측이 제기되었다. 이러한 과정에서 예비교사들은 문제를 새로운 관점에서 보기 시작했다.

[에피소드 5]

연구자: $\frac{K}{a}$, $\frac{K}{b}$를 약분했을 때, 분모의 소인수가 2 또는 5만 있도록 a, b를 정한다.

D1: 유한소수가 아닌 경우도 만날 수 있어요. $\frac{126}{33}$, $\frac{126}{11}$ 보면, $\frac{126}{33}\times3=\frac{126}{11}$이 되니까, 가로등 3개랑 신호등 1개가 $\frac{126}{11}$m 지점에서 만나요. 또 $126\div\frac{126}{11}=11$ 이니까 처음 포함해서 12번 겹치고요.

D1은 $\frac{K}{a}$가 유한소수가 안 되도록 분모의 소인수에 11을 포함시켜서 계산했었고 이 과정에서 반례를 찾았던 것이다. D1의 반례가 나타나자 다른 학생들이 분모를 11의 배수로 하여 $\frac{126}{44}$, $\frac{126}{11}$ 또는 $\frac{126}{33}$, $\frac{126}{22}$ 등의 유사한 반례를 제시하였고, 이 경우 모두 $\frac{126}{11}$m 간격으로 가로등과 신호등이 겹쳤다. 결국 $\frac{K}{a}$가 유한소수라는 조건은 반박되었고, 여러 반례들의 특징을 검토하던 D1은 새로운 추측을 제기하였다.

[에피소드 6]

D1: $\frac{126}{44}$, $\frac{126}{22}$는 $\frac{126}{22}$m에서 만나고, $126\div\frac{126}{22}=22$. 그럼 11이 아니라 22네. ... 그럼 최대공약수? 분모의 최대공약수!

$\frac{126}{44}$, $\frac{126}{22}$의 경우 앞의 반례와 다르게 $\frac{126}{22}$m

간격으로 만나는데, D1은 이 차이를 분모의 두 수의 최대공약수에서 비롯되었다고 해석한 것이다. D1과 다른 예비교사들은 추측을 지금까지 나왔던 사례에 적용하면서 성립하는 것을 확인하였다. D1의 사례는 일종의 가설-주도 추론(Cifarelli & Cai, 2005)에 해당한다고 볼 수 있다. 어떤 통찰에 의해 최대공약수를 떠올렸고, 이를 앞서 확인한 사례에 적용하면서 자신의 추측을 정당화하고 있었다.

[에피소드 7]

연구자: 그럼 $\frac{126}{6}$, $\frac{126}{9}$는 6, 9의 최대공약수 3이니까 4번 겹칠까?

D1: $\frac{126}{6}\times 2=\frac{126}{9}\times 3=\frac{126}{3}$. $\frac{126}{3}$m마다 만나니까 $126\div\frac{126}{3}=3$. 맞네요. 결국, 만나는 간격 찾다보면 분모에 최대공약수만 남게 되네요. 그래서 답에 최대공약수만 남는 거고.

D1는 가로등과 신호등이 만나는 간격을 계산하는 과정을 토대로 분모에 최대공약수가 남는 이유를 설명하였다. D1의 설명은 분모가 답을 결정한다는 의미였고, D2는 이 부분을 질문하였다.

[에피소드 8]

D2: 도로 길이를 아무렇게나 예를 들어, 257m로 바꿔도 답은 변함없다는 거지?

D1: 응. $\frac{257}{6}$, $\frac{257}{9}$라고 해도, 결국 분모를 같게 만드는 게 핵심이고, 이 때 분모의 최대공약수만 남잖아. 그리고 분자인 도로 길이는 마지막에 나눌 때 항상 사라지니까, 결과에는 전혀 영향을 안 주고, 그래서 도로 길이는 상관없어.

D3[5]: [그림 IV-1]을 봐도 각각이 몇 등분했는가만 중요하지 전체 길이는 전혀 상관이 없네. 전체 길이가 100이냐, 1000이냐는 그림에서 중요하지 않아.

D4: 스마트폰에서 지도 확대하는 것으로 생각할 수 있겠네. 가로등, 신호등 사이의 간격은 변해도 겹친 횟수는 그대로 유지되는 것처럼.

D5: 그럼, 이 문제 만들 때, 도로 길이는 마음대로 결정해도 되고, 가로등, 신호등 개수만 최대공약수 생각해서 정하면 되네. 그럼 답도 바로 나오고. 근데, 아이들이 과연 그렇게 풀까?

D3의 설명이 D1의 설명을 보완하였다. D1은 가로등과 신호등이 만나는 간격을 계산하는 과정을 근거로 최대공약수를 정당화했다면, D3는 도로 길이, 만나는 간격과는 상관없이 가로등과 신호등의 개수에 따라 도로가 등분할 된다는 사실을 근거로 최대공약수를 정당화한 것이다. D3의 설명은 결국 이 문제에서 도로 길이와 가로등, 신호등의 구체적인 간격이 중요한 것이 아니라 가로등, 신호등 개수의 관계가 본질이라는 점을 지적한 것이다. D4의 확대, 축소 비유는 학생들이 D3의 설명을 직관적으로 이해하는 데 도움을 주었다. D5의 발언은 예비교사들의 이해상태를 보여주는 것이다.

4. 문제에서 생성된 개념 탐구

예비교사들은 이 문제의 답이 가로등, 신호등 개수의 최대공약수로 결정된다는 사실을 이해하였으나 초기의 풀이 방법이 최대공약수 풀이와 어떤 관계가 있는지에 대해서는 관심이 없었다. 연구자는 예비교사들이 두 가지 풀이의 관계에 주목하도록 기존 풀이 방법을 형식화하여 제시하였다.

[에피소드 9]

연구자: 원래의 풀이 방법을 수식으로 표현해

5) [에피소드 3]의 B2와 동일 인물

봅시다. 도로 Km 가로등 a+1개, 신호등 b+1개라 하면, 우선, $\frac{K}{a}, \frac{K}{b}$ 의 최소공배수 $l(\frac{K}{a}, \frac{K}{b})$을 구하고, $K \div l(\frac{K}{a}, \frac{K}{b})$ 계산했어요. 그런데 새로운 풀이에 의하면 그 값이 $g(a,b)$와 같아요. 즉, $g(a,b) = K \div l(\frac{K}{a}, \frac{K}{b})$ 가 항상 성립할까요?

E1: K=ab로 생각하고 계산해봤어요. $K \div l(\frac{K}{a}, \frac{K}{b}) = ab \div l(\frac{ab}{a}, \frac{ab}{b}) = ab \div l(b,a)$이고, $ab = l(a,b) \times g(a,b)$이니까, $ab \div l(\frac{ab}{a}, \frac{ab}{b}) = \{g(a,b) \times l(a,b)\} \div l(a,b) = g(a,b)$ $ab = l(a,b) \times g(a,b)$는 고등학교 때 배웠던 건데. 맞죠?

E2: AB=LG 라고 배웠던 건데, 이게 여기서 쓰이네.

E3: 근데, 이건 $K = ab$ 일 때만 성립하잖아. $\frac{K}{a}, \frac{K}{b}$ 가 자연수가 아니면, 최소공배수를 어떻게 구하지? 분수의 최소공배수라는 게 가능해?

E4: 아까 $\frac{42}{11} \times 11 = 42$, $\frac{21}{4} \times 8 = 42$를 보면, 42를 최소공배수라고 볼 수 있는거 아니야? 42는 $\frac{42}{11}$를 11배한 배수이고, $\frac{21}{4}$을 8배한 배수도 되잖아. 이렇게 보면 분수도 최소공배수 있겠지.

E3: 그럴 수 있겠네.. 근데 아무 분수나 다 최소공배수가 존재할까?

E1이 비록 $K = ab$인 특별한 경우만을 증명했지만, 완전한 증명을 하려면 E3가 질문했듯이, 분수의 최소공배수를 정의해야 한다. E4는 기존 배수 개념을 확장하여 분수의 최소공배수를 정의할 수 있음을 추측하였고, E3는 이러한 추측이 항상 가능한 것인지, 즉, 분수의 최소공배수를 정의하는 것의 가능성을 문제로 제기하였다. 예비교사들의 논의는 가로등, 신호등 문제를 넘어서 분수의 최소공배수 개념으로 확장되었다.

[에피소드 10]

E4: 최소공배수는 모르겠지만, 공배수는 항상 존재해.

E3: 어떻게 알지?

E4: $\frac{m}{a}, \frac{n}{b}$ 에서 각각에 자연수 ab를 곱하면 bm, an 인데, 이건 원래 분수의 배수지. 그리고 bm, an은 이제 자연수니까 두 수의 배수 구할 수 있잖아.

E3: 아, 두 분수에 각각 큰 자연수를 곱하다보면, 언젠가 같아지는 경우가 있다는 거지.

E4: 응, 하지만 그게 최소라는 보장은 없어서..

E3: 언제 최소일지는 모르더라도, 최소인 경우는 항상 있겠네.

E4: 아, 그러네. 두 분수의 최소공배수는 항상 존재하네.

E4는 분수의 배수를 분수의 자연수 배로 생각하고, 임의의 두 분수에 대해 공배수가 존재함을 설명하였다. E4는 자신의 설명이 최소공배수의 존재를 보장하지 못한다고 했으나 E3는 E4의 설명에서 최솟값의 존재를 인식하였고 이를 통해 E4는 자신의 설명이 최소공배수의 존재를 보장한다는 점을 재인식하였다. 예비교사의 활동은 여기서 끝났고, 연구자는 분수의 최소공배수를 다음과 같이 설명하였다.6)

실제로 두 분수 $\frac{m}{a}, \frac{n}{b}$의 최소공배수는 $l(\frac{m}{a}, \frac{n}{b}) = \frac{l(m,n)}{g(a,b)}$ 과 같다7). 예를 들어, $\frac{14}{8}, \frac{21}{12}$의 최소공배수는 $\frac{l(14,21)}{g(8,12)} = \frac{42}{4}$이다.

6) 예비교사 스스로 찾아낸 설명이 아니라 연구자가 개입하여 설명한 내용이다. 그러나 예비교사들은 분수의 최소공배수 개념이 필요한 상황을 이해한 상태이고, 이 개념을 통해 지금까지 논의된 내용을 새롭게 이해할 수 있었다. 연구자의 직접적인 설명으로 예비교사의 학습기회를 창출한 사례라고 볼 수 있다.

7) https://www.quora.com/What-is-the-HCF-and-LCM-of-fractions

두 분수의 최소공배수는 두 분모의 최대공약수와 두 분자의 최소공배수로 이루어지는데, E4의 설명은 이러한 분수의 최소공배수 아이디어와 거의 일치한다. 예를 들어, $\frac{14}{8}=\frac{14}{4\times2}$, $\frac{21}{12}=\frac{21}{4\times3}$에서 두 분수의 분모를 같게 만들려면, 두 분모의 최대공약수만 남기면 된다. 그리고 두 분자의 최소공배수를 이용하여 두 분수의 최소공배수를 찾을 수 있다. 이러한 분수의 최소공배수 개념을 이용하면,

$$K\div l(\frac{K}{a},\ \frac{K}{b})=K\div\frac{l(K,K)}{g(a,b)}=K\div\frac{K}{g(a,b)}=g(a,b)$$

임을 간단하게 증명할 수 있다.

V. 논의

앞서 살펴본 문제제기 과정의 특징을 문제제기와 수학적 탐구의 관점에서 분석하고, 문제제기가 예비교사에게 제공한 학습 기회를 살펴보고자 한다.

1. 탐구와 결합된 문제제기 과정

본 연구에서 예비교사들의 문제제기 과정은 '문제 조건 변형', '문제 성립 조건 탐구', '문제 구조 이해', '문제에서 생성된 개념 탐구'로 구분할 수 있는데, 각 단계에서 문제제기와 탐구가 결합되면서 다음 단계로 이어지고 있다([그림 V-1] 참고).

우선, '문제 조건 변형' 단계에서 예비교사들의 활동은 '탐구를 위한 문제제기'라고 볼 수 있다. 문제의 조건 즉, 가로등, 신호등의 개수와 도로 길이를 바꾸면서 예비교사들은 여러 가지 조건들의 조합을 관찰하였다. 그 결과 가로등, 신호등의 개수와 도로 길이 사이의 관계에 대한 추측이 문제 형태로 구체화되었다.

가로등, 신호등 개수와 도로 길이가 약수와 배수 관계일 때 문제가 성립하는가? 의 문제가 제기되면서 예비교사들은 '문제의 성립 조건을 탐구'하기 시작했다. 예비교사들은 두 조건이 약수와 배수 관계인지 탐구하면서 또 다른 추측, 즉, 두 조건의 나눗셈 몫이 유한소수일 때 문제가 성립하는가? 의 문제를 제기하였다. 이러한 관점에서 '문제 성립 조건 탐구'에서 예비교사들의 활동은 '탐구를 통한 문제제기'라고 볼 수 있다. 이 단계에서 예비교사들은 여러 가지 사례와 반례를 접하면서 기존의 추측을 반박하고 새로운 추측을 문제 형태로 제시하면서 탐구와 문제제기를 반복하였다. 결국, 도로 길이와 가로등, 신호등 개수 사이의 관계와 관련된 추측이 모두 반박되면서 가로등, 신호등 개수에만 주목한 추측이 제기되었다. '탐구를 위한 문제제기'에 해당한다고 볼 수 있다.

'문제 구조 이해' 단계에서 예비교사들은 원래의 문제를 새로운 관점에서 보게 되었다. 도로 길이와 무관하게 가로등, 신호등 개수의 최대공약수의 의미를 탐구하기 시작한 것이다. 원래의 문제를 최대공약수의 관점에서 탐구하였고, 이러한 탐구를 통해 분수의 최소공배수가 가능한가를 문제로 제기하였다.

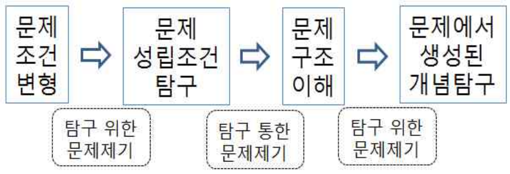
'문제에서 생성된 개념 탐구' 단계에서 예비교사들은 원래의 문제가 아니라 새로운 수학적 개념에 초점을 두었다. 분수의 최소공배수 개념은 학교수학교육과정에서 다루는 내용이 아니지만 원래 문제와 이 개념의 관계를 파악한 예비교사들에게 의미 있는 문제로 인식되었다. 예비교사들은 분수의 최소공배수 개념이 가능한가? 어떻게 구할 수 있는가의 문제를 제기하였다.

이와 같이, 본 연구의 문제제기 사례는 문제제기가 수학적 탐구를 자극하고, 수학적 탐구를 하면서 새로운 문제를 제기하고, 다시 이 문제로부

터 수학적 탐구가 이어지는 문제제기와 탐구의 순환적 과정을 특징으로 한다. 이는 교사교육에서 문제제기와 수학적 탐구의 통합을 강조하는 선행연구의 주장을 뒷받침한다(Da Ponte & Henrique, 2013; Ellerton, 2013).

특히, '문제 조건 변형' 단계에서 제기된 문제들은 기존 선행연구에서 지적하는 '한주제 문제[8]'(Tichá & Hošpesová 2015, p.137)에 해당하는데, 예비교사들이 단순히 유사한 여러 가지 문제를 만드는 것에서 벗어날 수 있었던 가장 큰 원인은 이 단계가 문제의 성립 조건을 탐구하는 활동으로 이어졌기 때문이다. 이는 문제제기 활동이 새로운 문제를 만드는 방법이 아니라 탐구를 자극하는 수단의 역할을 할 수 있음을 보여준다. 게다가 문제제기가 탐구와 결합될 경우 문제제기 활동뿐만 아니라 새로운 개념 탐구와도 연결될 수 있음을 시사한다.

Koichu & Kontorovich(2013)는 문제제기 단계를 준비, 흥미로운 수학적 상황 탐구, 문제에서 문제제기 과정 감추기, 검토 네 단계로 구분했다. 본 연구의 '문제 조건 변형'과 '문제 성립 조건 탐구' 단계는 각각 준비, 흥미로운 수학적 상황 탐구에 대응한다고 볼 수 있다. 특히, Koichu & Kontorovich(2013)는 주어진 문제와 비슷한 문제를 만드는 준비 단계에서 학습자가 흥미로운 수학적 상황을 탐구하는 것의 중요성을 강조했는데, 본 연구에서 예비교사들이 문제가 성립하는 조건을 탐구하는 활동이 '흥미로운 수학적 상황 탐구'에 해당한다고 볼 수 있다. 반면에, '문제에서 문제제기 과정 감추기', '검토' 단계는 나타나지 않았는데, 이는 본 연구에서 예비교사들은 새로운 문제를 만들기보다 기존 문제를 이해하는 것에 초점을 맞추었기 때문이다. Koichu & Kontorovich(2013)는 기존 문제를 변형하면서 경험한 수학적 탐구의 내용이 질 높은 문제를 만드는 결과로 이어질 수 있음을 제안한 반면에, 본 연구에서는 기존 문제에 대한 깊이 있는 이해와 새로운 수학적 개념의 학습으로 이어진 것이다.



[그림 V-1] 탐구와 결합된 문제제기 과정

전영배 외(2013)은 문제의 조건을 변형하면서 잘못된 문제가 생성될 수 있음을 지적하고 이를 극복하기 위해 의미 분석 활동을 강조하였다. 의미 분석 활동은 문제에 주어진 속성을 음미하고, 그들 사이의 관련성을 따져 보는 활동으로서, 문제의 내재된 지식의 실체를 드러나게 하는 기회가 되는 것이다. 본 연구에서는 도로의 길이는 중요하지 않고 가로등과 신호등 개수의 관계가 문제의 본질이라는 것이 문제의 내재된 지식에 해당한다고 볼 수 있다. 그러나 이러한 지식이 잘못된 문제설정에서 비롯된 것이 아니라 문제 성립 조건을 탐구하는 과정에서 비롯되었다는 점에서 전영배 외(2013)의 결과와 다르다고 볼 수 있다. 즉, 본 연구의 사례에서 문제의 조건 변형 결과 잘못된 문제가 생성되지 않는 경우에도 기존 문제를 반성하고 재해석하는 기회가 될 수 있음을 확인할 수 있었다.

2. 문제제기 활동이 예비교사에게 제공한 학습 기회

문제제기가 수학적 탐구와 결합되면서 문제제기에 참여한 예비교사들은 다양한 학습 기회를

8) 문제제기 과정에서 주어진 문제와 숫자만 다른 유사한 문제를 만드는 현상이 자주 관찰되는데, 이러한 문제를 '한주제 문제(monothematic nature of problem)'라고 한다.

얻을 수 있었다.

첫째, 문제제기 활동은 예비교사들이 수학적 개념들 간의 연결성을 이해하는 기회를 제공하였다. 문제제기 과정에서 예비교사들은 약수, 배수, 분수의 유한소수 조건, 최대공약수와 최소공배수의 관계, 분수의 최소공배수 등의 개념을 서로 관련지어 논의하였다. 예를 들어, 분수가 유한소수가 되는 조건(C1) 또는 두 수의 곱과 두 수의 최대공약수와 최소공배수의 곱이 같다는 사실(E2) 등의 수학적 지식이 예상치 못한 지점에서 활용될 때, 예비교사들은 기존 개념의 의미와 중요성을 재인식할 수 있었다. 특히, 자연수의 최소공배수 개념을 유리수 범위로 확장하고 이를 이용하여 증명이 이루어지는 과정에서 수학적 개념이 어떻게 정의되고 활용되는지 그리고 개념들 간의 연결성을 이해할 수 있었다. 다음 수업후기의 내용에서 이를 확인할 수 있다.

> 이 문제를 탐구하면서 분수의 유한소수 조건, AB=LG 등의 내용이 활용되는 것이 신기했다. 최소공배수를 분수로까지 확장할 수 있다는 생각은 못해봤는데, 전혀 관련 없어 보이는 이 개념이 증명에서 활용되는 모습이 인상적이었다. 나중에 분수의 최소공배수 개념을 가르칠 기회가 있다면, 이 문제를 이용하면 좋을 것 같다. (F1)

분수의 최소공배수 개념은 수학교육과정에서 다루지 않지만, C1은 문제 상황에서 분수의 최소공배수 개념의 필요성을 인식했다고 볼 수 있다. 두 분수의 최소공배수 자체를 구하기 위해 이 개념을 설명한 것이 아니라 원래 문제의 풀이와 새로운 풀이 사이의 관계를 설명하기 위해 분수의 최소공배수 개념을 도입했고 게다가 이를 통해 두 풀이 사이의 관계가 설명되었기 때문에, 예비교사들은 분수의 최소공배수를 자연스럽게 받아들일 수 있었다.

둘째, 예비교사들은 수학교육에서 문제제기 역할 및 중요성을 인식하였다. 예비교사들은 원래 문제를 쉽게 해결할 수 있었기 때문에, 이 문제에는 새로운 내용이 없을 것으로 예상하였다. 그러나 문제제기 과정을 통해 원래의 문제에 대해 갖고 있던 자신들의 암묵적인 가정이 정확하지 않았고, 새로운 풀이가 문제의 구조를 명확하게 드러낸다는 사실을 알게 되었다. 예비교사들은 문제를 해결했더라도 그 문제를 제대로 이해하지 못할 수 있음을 인식하였다.

> Polya가 문제해결에서 반성이 중요하다고 한 이유를 알겠다. 문제를 풀었다고 그 문제를 이해한 것이 아닐 수 있다. 만약 도로 길이 83m, 가로등 13개, 신호등 11개라는 문제였다면, 기존 방법으로는 못 풀었을 거다. 문제를 바꿔보면서 새로운 사실을 찾아낼 수 있다는 것이 흥미로웠다.(F2).

예비교사들은 기존 문제를 변형하는 활동이 단순히 유사한 문제를 만들어보는 것을 넘어서 문제를 깊이 있게 이해할 수 있는 효과적인 방법임을 인식한 것이다. 특히, 가로등, 신호등 개수의 최대공약수로 해결하는 방법은 기존 풀이 방법보다 간단할 뿐만 아니라 기존 풀이로는 해결할 수 없다고 판단할 수 있는 문제도 쉽게 해결할 수 있었다. 예비교사들은 기존 문제를 변형하는 활동으로 기존 문제해결에서 알 수 있는 지식과 전혀 다른 지식을 배울 수 있다는 점에서 문제제기의 중요성에 공감하였다. 예비교사들은 문제제기를 새로운 수학적 개념을 지도하는 방법으로 인식하였다.

Singer, Ellerton, & Cai (2013)는 수학교육에서 문제해결이 의미를 가지려면 해결 과정에서 새로운 발견이 이루어지거나 적어도 새로운 이슈를 드러내어야 한다고 주장했는데, 이러한 관점에 본 연구의 사례는 문제해결에 시사점을 줄 수 있다. 문제제기를 통해 기존 문제해결에서 알

수 없었던 수학적 성질 예를 들어, 분수의 최소공배수 개념 또는 도로 길이는 중요하지 않다는 사실 등을 드러낼 수 있었다. 이는 수학교육에서 문제해결과 문제제기가 함께 이루어져야 함을 시사한다.

셋째, 문제제기는 예비교사들에게 협력과 토론의 기회를 제공하였고, 예비교사들은 수학교육에서 협력과 토론의 중요성을 인식하였다. 본 연구의 문제제기 사례가 의미 있는 결과로 이어진 데에는 예비교사들 간의 협력과 토론이 큰 역할을 하였다. 예비교사들은 제기된 문제를 뒷받침하는 사례나 반박하는 반례를 다양하게 산출하면서 탐구와 문제제기를 촉진하였다. 원래의 문제가 어렵지 않았고, 조건 변형의 결과 역시 쉽게 확인할 수 있었기 때문에 모두들 적극적으로 참여할 수 있었다. 즉각적인 피드백이 예비교사들의 참여와 탐구를 자극했다고 볼 수 있다. 게다가 새로운 추측과 문제가 예비교사들의 예상을 벗어나면서 예비교사들이 더욱 깊이 참여하게 되었다. 그러나 예비교사들의 협력이 단순히 사례를 제시하는 형태로만 나타난 것은 아니다. [에피소드2]에서 A1의 문제제기에 대해 A2는 문제의 조건으로 설명하고, A3는 약수와 배수 관계로 설명하였는데, 각각이 동일한 내용을 타당하게 설명했지만 A1은 두 설명을 결합하면서 자신의 의문을 해소할 수 있었다. [에피소드8]에서 D1, D3, D4, D5 모두 문제에서 도로 길이는 중요하지 않다는 점을 여러 가지 방식으로 설명하고 있다. 이처럼 예비교사들은 제기된 문제가 하나의 방법으로 해결 되어도, 다른 방식의 설명을 요구하고 이에 부응하면서 서로의 설명을 연결하면서 탐구를 진행하였다. 또한 다른 사람의 문제나 추측을 자신의 관점에서 재 진술 하면서 토론을 진전시키는 경우를 관찰할 수 있었다. 예를 들어, [에피소드3]의 B1은 도로 길이와 가로등, 신호등 개수가 약수와 배수 관계라는 조건을 토대로 도로 길이가 소수인 경우에 대한 문제를 제기했고, 이를 토대로 B2는 약수와 배수 관계가 아닌 조건의 반례를 찾아낼 수 있었다. 또한 [에피소드10]에서 E4는 자신이 증명했다는 것을 E3의 도움으로 인식할 수 있었다. 이처럼 학습자들이 서로의 생각을 이해하고 이를 토대로 자신의 생각을 개선하는 과정은 수학적 토론과 협력의 질을 판단하는 중요한 요인이다(Schoenfeld, 2014).

Ⅵ. 결론 및 제언

본 연구는 초등 예비교사들이 주어진 문제를 변형하는 과정의 특징을 분석하고 이러한 문제제기 활동이 그들에게 어떠한 학습 기회를 제공했는지 살펴보았다. 초등 예비교사의 문제제기 과정의 특징과 문제제기가 이들에게 제공한 학습기회를 요약하면 다음과 같다.

본 연구에서 수학적 문제제기 활동은 수학적 탐구를 촉진하고, 이러한 수학적 탐구 과정에서 새로운 문제가 생성되고, 이를 통해 또 다른 탐구가 진행되는 과정으로 이루어졌다. 많은 선행연구(Ponte & Henriques, 2013; Ellerton, 2013)에서 수학적 탐구와 문제제기의 통합을 강조하고 있는데, 본 연구도 이를 뒷받침하고 있다. 게다가 본 연구를 통해 탐구와 결합된 문제제기 과정이 ‘문제 조건 변형’, ‘문제 성립 조건 탐구’, ‘문제 구조 이해’, ‘문제에서 생성된 개념 탐구’로 구분할 수 있음을 확인하였다. 특히, 전형적인 문제제기 활동에 해당하는 ‘문제 조건 변형’ 단계에서 수학적 탐구가 결합될 때, 문제제기와 수학적 탐구의 선순환이 이루어질 수 있었다.

탐구와 결합된 문제제기 과정을 통해 예비교사들은 다양한 학습 기회를 얻을 수 있었다. 우선 예비교사들은 문제제기를 통해 수학적 개념

들 간의 연결성을 이해할 수 있었다. 문제제기 과정에서 다양한 수학적 개념이 등장하고 이를 문제 상황에 비추어 재해석하면서 기존 수학적 개념을 깊이 있게 이해할 수 있고, 또한 예상치 못한 탐구 결과를 토대로 새로운 수학적 개념을 학습할 수 있었다. 예비교사들은 이러한 학습 기회를 스스로 경험하면서 수학교육에서 문제제기의 역할 및 중요성을 인식하였다. 이들은 문제제기를 통해 문제를 더 깊이 있게 이해할 수 있음을 확인하였고, 이는 문제해결에서 반성의 중요성 그리고 문제해결과 문제제기를 함께 지도하는 것의 필요성을 인식하는 기회가 되었다. 또한 문제제기 과정에서 예비교사들은 협력과 토론을 경험하였고, 수학교육에서 협력과 토론의 중요성을 인식할 수 있었다.

본 연구로부터 문제제기 활동이 교사교육의 효과적인 수단이 될 수 있음을 확인하였고, 이를 토대로 문제제기 활용에 대한 시사점을 제안하고자 한다. 첫째, 문제제기 활동에서 예비교사에게 수학적 탐구의 기회를 충분히 제공할 필요가 있다. 주어진 문제를 변형하는 방법에 대한 학습 못지않게 변형 과정에서 풍부한 수학적 탐구의 기회가 생길 수 있다. 문제를 만들거나 변형하는 과정이 수학적 탐구로 연결될 수 있도록 교사교육자의 적절한 안내와 지도가 필요하다. 둘째, 문제를 깊이 있게 이해하는 방법으로 문제제기를 활용할 필요가 있다. 지금까지 문제제기 교육은 주로 좋은 문제 또는 다양한 문제를 만드는 방법에 초점을 두고 이루어졌지만, 문제 생성이 아닌 문제 자체에 대한 이해를 목적으로 하는 문제제기 교육도 가능하다. 이러한 경우 예비교사들은 학교수학에서 수학적 탐구를 지도하거나 문제를 이해하는 대안적인 방법으로서 문제제기를 활용하는 능력을 갖출 수 있다.

참고문헌

전영배, 노은환, 김대의, 강정기 (2013). 의미 분석을 강조한 문제설정 모형 설계하기. **한국학교수학회논문집, 16**(2), 383-407.

김경옥 · 류성림 (2009). 상황제시형 수학 문제 만들기(WQA) 활동이 문제해결력 및 수학적 태도에 미치는 영향. **학교수학, 11**(4), 665-683.

이동환 (2016). 수학적 게임 변형을 통한 초등 예비교사의 수학적 탐구 경험. **수학교육학연구, 26**(1), 143-157.

김슬비, 황혜정 (2015). 예비교사의 문제 생성과 재구성 활동에 관한 탐색. **한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육논문집>, 29**(3), 533-551.

Brown, S. I. & Walter, I. (1990). The art of problem posing(2nd ED). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publisher.

Cai, Hwang, Jiang, & Silber, (2015). problem posing research in mathematics education: Some Answered and Unanswered Questions. In F. M. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.) Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice. (pp. 3-34). Dordrecht, the Netherlands: Springer.

Cifarelli, V., & Cai, J. (2005). The evolution of mathematical explorations in open ended problem solving situations. *Journal of Mathematical Behavior, 24*, 302-324.

Crespo, S., & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*, 395-415.

Cunningham, R. (2004). Problem posing: an opportunity for increasing student responsibility, mathematics and computer education, 38(1), 83-89.

Da Ponte, J. P. & Henriques, A. C. (2013). Problem posing based on investigation activities by university students. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 145-156.

Ellerton, N. F. (2013). Engaging Pre-Service Middle-School Teacher-Education Students in Mathematical Problem Posing: Development of an Active Learning Framework. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 87-101.

Koichu, B., & Kontorovich, I. (2013). Dissecting success stories on mathematical problem posing: a case of the Billiard Task. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 71-86.

Lavy I., & Shriki, A. (2007). Problem posing as a means for developing mathematical knowledge of prospective teachers. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Proceedings of the 31st Conference of the IGPME*, Vol. 3, pp. 129-136. Seoul: PME.

Leikin, R. (2015). Problem posing for and through Investigations in a Dynamic Geometry Environment. In F. M. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.) Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice. (pp. 373-391). Dordrecht, the Netherlands: Springer.

Osana, H. P., & Pelczer, I. (2015). A review on problem posing in teacher education. In F. M. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.) Mathematical Problem Posing: From Research to Effective Practice. (pp. 469-492). Dordrecht, the Netherlands: Springer.

Schoenfeld, A. H. (2014). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? *Educational Researcher, 43*(8), 404-412

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing, *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19-28

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 521–539.

Singer, F. M., & Moscovici, H. (2008). Teaching and learning cycles in a constructivist approach to instruction. *Teaching and Teacher Education, 24*(6), 1613-1634.

Singer, F. M., Ellerton, N., & Cai, J. (2013) Problem-posing research in mathematics education: new questions and directions. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 1-7.

Tichá, M., & Hošpesová, A. (2013). Developing teachers' subject didactic competence through problem posing. *Educational Studies in Mathematics, 83*(1), 133-143.

Hošpesová, A., & Tichá, M. (2015). problem posing in primary school teacher training. In F. M. Singer, N. Ellerton & J. Cai (Eds.) Problem Posing: From Research to Effective Practice. (pp. 433-447). Dordrecht, the Netherlands: Springer.

The Analysis of Problem Posing Cases of Pre-Service Primary Teachers

Lee, Dong-Hwan (Busan National University of Education)

In this study we analyse the features of process of problem posing and explore the development of mathematical knowledge of primary preservice teachers as result of their engagement in problem posing activity. Data was collected through the preservice teachers' class discussions. Analysis of the data shows that preservice teachers developed their ability to understand connections among mathematical concepts.

* Key Words : preservice primary teacher education(초등예비교사교육), mathematical problem posing (수학적 문제제기), mathematical inquiry(수학적 탐구)

논문접수 : 2016. 11. 11
논문수정 : 2016. 12. 17
심사완료 : 2017. 12. 20