대한수학교육학회지 <학교수학> 제 19 권 제 1 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 19, No. 1, 59 ~ 75. Mar 2017

초등학교 6학년 학생들의 분수 조작 및 스킴 분석[1)]

한 정 이* · 이 광 호**

본 연구는 전국 초등학교 6학년 432명을 대상으로 분수 조작 능력과 분수 스킴 형성에 대해 조사하여 그 실태를 살펴보았고, 분수 조작과 스킴의 관계를 정량적으로 분석하였다. 학생들은 분할보다 반복 조작을 상대적으로 어려워하는 것으로 나타났으며, 반복보다 분할을 먼저 구성하는 학생들이 더 많았다. Steffe의 분수 위계에 따라 스킴이 높아질수록 형성률이 낮아지는 양상을 보였고, 특히, 분할 단위 분수 스킴(PUFS)은 형성되어 있지만, 단위분수를 반복하지 못해서 분할 분수 스킴(PFS)을 형성하지 못한 학생들이 많았다. 또한 분수 조작과 스킴은 서로 높은 연관성을 가지고 있는 것으로 나타났다. 본 논문은 이러한 연구 결과를 바탕으로 분수 교수·학습에 대한 시사점을 제공하고자 하였다.

Ⅰ. 서 론

분수는 초등학교 수학에서 다양한 수학적 사고의 기초가 되는 중요한 개념 중 하나이며(정은실, 2006), 이러한 분수 학습은 지적 발달에 필요한 정신 구조의 발달과 확장을 위한 풍부한 학습의 장을 제공한다(권성룡, 2003). 또한 분수는 중등 수학에서 핵심적으로 다루어지는 유리수 영역과 직접적으로 연결되며, 기본적인 대수 연산의 바탕이 되므로 초등학교 수학에서 분수 학습은 매우 중요하다.

하지만 분수는 하나의 수가 아닌 두 수를 포함하고 있으며 관계적 이해를 필요로 하기 때문에(Lamon, 2012), 초등학생들에게 분수는 이해하기 어려운 개념 중 하나이다. 이러한 이유로 많은 초등학교 학생들이 분수를 제대로 이해하지 못하고 있다(권성룡, 2003; 김유경, 방정숙, 2012; 이지영, 방정숙, 2014).

이에 따라, 우리나라에서는 효과적인 분수지도 방안에 대한 연구가 많이 이루어져 왔다. 류희찬, 신준식(1995)은 분수가 수로서 인식되기 위해 단위분수를 중심으로 한 분수 학습이 이루어져야 한다고 하였으며, 서동엽(2005)과 정은실(2006)은 분배와 측정과 관련하여 분수를 도입하는 것이 바람직하다고 주장하였다. 또한 단위화를 강조하여 분수를 지도하는 것의 중요성을 강조한 연구도 있었다(심재방, 2014).

국외에서도 분수 학습에 대한 연구가 많이 이루어져 왔는데, 특히, Steffe(2002)는 급진적 구성주의의 관점에서 분수 스킴(scheme)에 대한 연구를 진행하였다. 수학적 지식의 구성을 스킴의 조작적인 변화로 보았으며, 분수 지식의 구성에 있어서도 이러한 스킴의 변화가 중요하다고 주장하였다. 이에 따라, 여러 차례의 교수 실험(Steffe, 2002, 2004; Olive & Steffe, 2002)을 통해 분수 스킴의 위계와 구성 경로를 밝혔으며, 분할, 반복과 같은 정신적인 조작은 분수

* 한국교원대학교 대학원, buenoaires@naver.com (제1 저자)
** 한국교원대학교, paransol@knue.ac.kr (교신저자)
1) 본 논문은 한정이(2017)의 석사학위논문을 요약한 것임.

스킴 형성의 중요한 요소라고 주장하였다.

이를 객관적으로 입증하기 위해 Norton과 Wilkins(2009, 2010, 2012, 2013), Wilkins와 Norton(2011)은 지필검사를 통해 학생들의 분수 스킴 형성을 파악하고 분석하였다. 최근에는 중국과 미국 학생들 사이의 분수 스킴 발달 과정을 비교한 연구도 이루어졌으며(Norton, Wilkins & Xu, 2016), 두 나라 학생들 사이에 비슷한 발달적 진보를 확인하였다.

이를 바탕으로, 우리나라에서도 최근 분수 스킴에 대한 연구들이 이루어지고 있으나(이혜민, 신인선, 2011; 최근배, 2010; Lim & Lee, in press) 아직 부족한 실정이다. 또한 학생들의 현재 수준에 맞는 분수 교수·학습이 이루어지기 위해서는 우리나라 학생들의 현재 분수 스킴 형성 정도는 어떠한지 살펴보는 연구가 필요하다.

이에 본 연구에서는 초등학교 수학과 교육과정에서 분수에 대한 학습을 모두 마친 초등학교 6학년 학생들의 분수 조작 능력과 분수 스킴 형성 실태에 대해 살펴보며 분수 조작과 스킴의 관계를 정량적으로 파악해보고자 하였다. 이를 통해 초등학교 분수 교수·학습에 대한 시사점을 제공하고자 하였으며, 이러한 연구는 우리나라 초등학생들의 분수 스킴에 관한 연구의 중요한 바탕이 될 것으로 기대한다.

II. 이론적 배경

1. 분수 조작(operation)

von Glasersfeld(1995)는 조작을 이전 경험의 반영을 통해 추상화된 정신적 행동으로 정의하였으며, 스킴의 가장 중요한 요소라고 주장하였다. 이에 따라, Steffe(2002)도 분수 스킴을 구성하기 위한 분수 조작의 중요성을 강조하였으며, 분수 조작으로 분할, 반복 그리고 분할과 반복의 동시 조작인 splitting을 제시하였다.

가. 분할(partitioning)

분할 조작은 주어진 전체로부터 동등한 부분을 만드는 경험에 관한 반영적 추상화로부터 나온다. Steffe(2002)는 9살 정도의 학생들도 연속적인 전체에 합성단위를 투사함으로써 동등한 부분으로 분할할 수 있다고 보았다.

Suppose the stick shown below is a piece of candy. Show how someone could share it equally among 6 friends.

[그림 II-1] 분할 측정 문항과 학생 반응 (Wilkins & Norton, 2011, p. 389)

학생들은 [그림 II-1]의 과제를 두 가지 방법으로 분할할 수 있는데, 첫 번째는 n개의 동등한 부분을 만들기 위해서 연속적인 전체에 합성단위를 동시에 투사하는 것으로 이는 Steffe(2002)의 동시 분할(simultaneous partitioning) 스킴과 일치하는 것이다. 두 번째는 n개의 동등한 부분을 만들기 위해서 첫 번째의 부분을 만들고 이것을 사용하여 나머지 부분을 나누는 것으로(Wilkins & Norton, 2011), Steffe(2004)의 등분할(equip-partitioning) 스킴과 연관된 것이다. 두 번째 방법은 첫 번째 방법보다 더 높은 수준이며 분할과 반복 조작이 순차적으로 이루어진다. 즉, n개의 동등한 부분으로 나누기 위해 첫 번째 부분을 만들고 이를 n번 복제하여 전체가 되는지를 확인하는 것이다. [그림 II-1]의 막대 왼쪽의 표시는 학생이 두 번째 방법을 사용한 흔적이라고 볼 수 있다(Wilkins & Norton, 2011).

나. 반복(iterating)

반복 조작은 주어진 길이 또는 넓이만큼을 되풀이하는 경험에 관한 반영적 추상화로부터 나온다(Wilkins & Norton, 2011). 즉, 주어진 부분을 n배하여 전체를 만들어내기 위해 정신적으로 복제하는 것이다. [그림 II-2]의 학생은 주어진 막대의 길이만큼 그리고 멈추는 것을 7번 되풀이한 것으로 보인다. 따라서 이 학생은 반복 조작을 하고 있는 것으로 볼 수 있다(Wilkins & Norton, 2011).

Make a stick that is 7 times as big as the one shown below.

[그림 II-2] 반복 측정 문항과 학생 반응 (Wilkins & Norton, 2011, p. 391)

이러한 반복은 측정으로서 분수를 이해하기 위해 필요한 핵심적인 조작이다(Steffe, 2002; Tzur, 2004). Tzur(2004)의 연구에서 4학년 학생들이 단위분수를 반복하여 진분수를 만들 수 있다고 하였으며, Steffe(2003)는 이에 대해 전체와 관련된 크기가 아닌, 1의 단위로써 단위분수를 다루기 때문에 가능하다고 하였다. 하지만 가분수를 만들기 위해 반복이 이루어질 때에는 전체를 초과하기 때문에 단위분수와 전체와의 곱셈적 관계를 이해해야 하며, 이는 더 높은 수준인 splitting 조작을 필요로 한다(Steffe, 2010).

다. Splitting

Splitting은 분할과 반복이 역관계임을 알고 두 조작이 동시에 일어나는 것이다(Steffe, 2003, 2010). [그림 II-3]의 과제에서 '5배만큼 크다'라고 제시하여 반복을 나타내고 있지만, 사실상 이것은 조각을 만들기 위해 학생들에게 분할을 하도록 요구한다. 즉, 학생들은 이를 해결하기 위해서 분할과 반복이 역관계임을 인식하고 있어야 하는 것이다(Norton & Wilkins, 2010, 2012, 2013; Wilkins & Norton, 2011).

The stick shown below is 5 times as long as another stick. Draw the other stick.

[그림 II-3] splitting 측정 문항과 학생 반응 (Wilkins & Norton, 2011, p. 394)

이러한 splitting은 분할과 반복 사이의 역관계를 조정함으로써 부분과 전체 사이의 곱셈적 관계를 인식하도록 하며, 이는 더 높은 분수 스킴으로 나아가는데 중요한 역할을 한다(Hackenberg, 2007; Norton, 2008; Norton & D'Ambrosio, 2008; Steffe, 2002).

2. 분수 스킴(scheme)

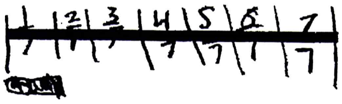
스킴은 행동과 조정을 가능하게 하고 그것을 일반화할 수 있게 하는 행동과 조작의 일반적 구조를 뜻한다(임재훈, 홍진곤, 1998). Steffe (2002)는 스킴의 조작적인 변화를 수학적 지식의 구성으로 보았고, 이에 따라 학생들이 형성하는 분수 스킴의 위계와 구성경로를 밝혔다. 본 절에서는 분수 스킴의 구성 순서에 따라 하위 스킴에서 상위 스킴의 순으로 살펴보았다.

가. 분할 단위 분수 스킴(Partitive Unit Fraction Scheme, PUFS)

분할 단위 분수 스킴(PUFS)은 분할과 반복 조작을 통해 형성되는 것으로, 분할과 반복의 순차적인 적용을 포함한다(Steffe, 2002). 이 스

킴이 형성된 학생들은 주어진 전체를 n개로 분할하고 그 중 하나를 n번 반복하면 전체를 재생산할 수 있다는 것과, 반복된 횟수가 전체와 관련된 부분의 크기를 결정한다는 것을 이해한다. 또한 부분과 전체의 관계를 표현하기 위해 분수적 언어(fractional language)를 사용한다.

Your stick is 1/7 as long as the stick shown below. Draw your stick.



[그림 II-4] PUFS 측정 문항과 학생 반응
(Wilkins & Norton, 2011, p. 393)

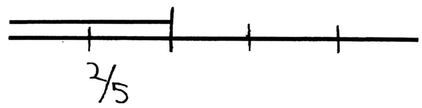
학생들은 [그림 II-4]의 과제를 해결하기 위해서 먼저 전체를 7개의 동등한 부분으로 분할하고, 그 부분들 중 하나를 택하여 7번 반복하였을 때 전체를 재생산할 수 있는지 확인해야 한다. 만약 전체가 만들어지지 않는다면 학생들은 분할을 다시 조정해야 할 것이다. 또한 부분의 크기와 $\frac{1}{7}$을 관련지어 생각해야 한다.

분할 단위 분수 스킴(PUFS)은 분수를 학습하는 데 필요한 기초적인 조작인 분할과 반복, 그리고 분수적 언어를 포함하기 때문에 진정한 첫 번째 분수 스킴이라 할 수 있다(Steffe, 2010). 또한 학생들은 이를 토대로 단위분수의 반복을 통해 진분수, 가분수를 생성할 수 있는 높은 수준의 스킴을 형성하게 된다.

나. 분할 분수 스킴(Partitive Fraction Scheme, PFS)

분할 분수 스킴(PFS)은 분할 단위 분수 스킴(PUFS)이 일반화된 것으로, 이 스킴이 형성된 학생들은 반복 조작을 통해 단위분수로부터 비단위분수(non-unit fraction) $\frac{m}{n}(1<m<n)$을 구성할 수 있다(Norton & Wilkins, 2012; Steffe, 2002). 즉, 주어진 전체에서 $\frac{m}{n}(1<m<n)$을 구성할 때, 학생들은 분할 단위 분수 스킴(PUFS)으로 단위분수인 $\frac{1}{n}$을 만들고, 이를 m번 반복하게 된다. 즉, [그림 II-5]의 과제를 해결하기 위해 학생들은 긴 막대에서 분할 단위 분수 스킴(PUFS)을 통해 $\frac{1}{5}$을 구성한 후, $\frac{1}{5}$을 2번 반복하여 짧은 막대가 되는지 확인해야한다.

What fraction is the smaller stick out of the longer stick?



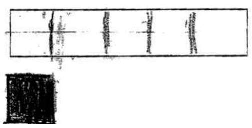
[그림 II-5] PFS 측정 문항과 학생 반응
(Wilkins & Norton, 2011, p. 396)

하지만 분할 단위 분수 스킴(PFS) 수준의 학생들은 $\frac{2}{5}$ 또는 $\frac{5}{5}$를 만들기 위해서 단위분수인 $\frac{1}{5}$을 반복할 때, '$\frac{1}{5}$ 단위'로 반복하지 않는다. $\frac{1}{5}$을 전체와 부분의 관계가 아닌 '1의 단위'로 다루며 반복 조작을 행하는 것이다(Steffe, 2002). 그래서 $\frac{1}{5}$을 7번 반복하여 가분수를 만들 수 있지만, 전체와의 관계를 생각하지 못하기 때문에 $\frac{7}{7}$ 또는 $\frac{5}{7}$라고 이름을 붙이게 된다(Tzur, 1999). $\frac{1}{n}$의 단위로 반복하여 가분수를 이해하는 것은 더 높은 수준인 반복 분수 스킴(Iterative Fraction Scheme)에서 나타난다(Steffe, 2002).

다. 역 분할 분수 스킴(Reversible Partitive Fraction Scheme, RPFS)

역 분할 분수 스킴(RPFS)은 분할 분수 스킴(PFS)의 역으로, 이 스킴이 형성된 학생들은 $\frac{m}{n}$(1<m<n)으로부터 전체(1)를 재생산할 수 있다. 주어진 $\frac{m}{n}$을 m개의 동등한 부분으로 나누고 그 중 하나를 n번 반복하여 전체를 만들어 내는 것이다(Tzur, 2004).

The bar shown below is 4/5 as long as another bar. Draw the other bar.



[그림 II-6] RPFS 측정 문항과 학생 반응
(Norton & Wilkins, 2009, p. 153)

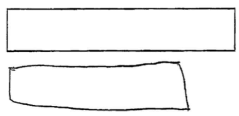
[그림 II-6]의 과제를 해결하기 위해서는 주어진 막대를 4개의 부분으로 분할해야 하지만, [그림 II-6]의 학생은 주어진 막대를 5개의 부분으로 분할하는 과제로 해석한 것으로 보인다. 이 학생은 주어진 막대 안에서만 조작해야 한다고 생각하며, 분모는 주어진 막대에서 동등한 부분으로 분할되는 부분의 수를 나타낸다고 생각하는 것이다. 이러한 조작 방법은 대부분의 분수 과제를 해결하는데 충분하지만, 조작을 거꾸로 하기 위해서는 주어진 막대를 넘어 전체를 볼 수 있어야 한다. 즉, 분할 분수 스킴(PFS)의 조작을 역으로 하기 위해서는 부가적으로 splitting 조작이 필요하다(Hackenberg, 2007). [그림 II-6]의 과제에서 학생들은 $\frac{1}{5}$부분을 5번 반복하여 전체를 만들기 위해서 막대를 4부분으로 분할해야 하는 것이다.

라. 반복 분수 스킴(Iterative Fraction Scheme, IFS)

분할 분수 스킴(PFS) 또는 역 분할 분수 스킴(RPFS)을 가진 학생은 가분수를 만들 수 없다. 이 수준의 학생들은 전체 내에서만 조작을 할 수 있으며, 단위분수의 반복이 전체를 넘어서게 되면, 전체를 놓치게 된다(Olive & Steffe, 2002). 즉, $\frac{4}{3}$를 $\frac{4}{4}$ 또는 $\frac{3}{4}$으로 이해하는 것이다. 따라서 이러한 제한점을 넘기 위해서는 반복 분수 스킴(IFS)이 형성되어야 한다.

이는 단위분수가 전체를 넘어 반복될 수 있다는 것을 이해하는 것으로, 이 스킴이 형성된 학생은 $\frac{1}{n}$의 m(m>n)번 반복으로 $\frac{m}{n}$이 구성된다는 것을 알며, 전체와 부분의 변하지 않는 곱셈적 관계를 이해할 수 있다.

The bar shown below is 4/3 as long as another bar. Draw the other bar.



[그림 II-7] IFS 측정 문항과 학생 반응
(Norton & Wilkins, 2009, p. 154)

[그림 II-7]의 과제를 해결하기 위해서는 주어진 막대를 4등분하고 그 중 하나를 3번 반복해야한다. 역 분할 분수 스킴(RPFS)과 마찬가지로, 하나의 부분을 3번 반복하기 위한 목적으로 $\frac{4}{3}$을 4부분으로 나눠야하기 때문에 splitting 조작을 필요로 한다.

III. 연구 방법

1. 연구 대상

연구 대상을 추출하기 위해 학교와 학급을 표집 단위로 하는 2단계 군집표집 방법과 지역의 규모에 따른 학생 수에 비례하여 표집하는 비례층화표집 방법을 적용하였다(<표 III-1> 참고). 지역규모에 따라 서울특별시, 광역시, 중・소도시, 읍・면지역으로 구분하였고, 2015 유초중등 통계자료에 근거하여 지역규모에 따른 학생 수에 비례하도록 <표 III-2>와 같이 20개 학교를 표집 하였다.

표집된 각 학교의 6학년 1개 학급을 대상으로 검사지 506부를 배포하였으며, 학급 학생들 중 연구 참여에 동의하지 않았거나 결석한 경우로 인해 461부를 회수하였다(회수율 91.1%). 또한, 그 중에서 한 쪽 이상 풀지 않은 경우와 불성실하게 답한 경우를 제외하였고 최종적으로 432명을 본 연구의 분석 대상으로 선정하였다(<표 III-3> 참고).

2. 검사 도구

본 연구는 지필 검사를 통해 초등학교 6학년 학생들의 분수 조작과 스킴에 대한 실태를 파악하고 그 관계를 분석하고자 하였고, 이를 위해 Norton과 Wilkins(2010, 2012, 2013), Wilkins와 Norton(2011)이 제시한 문항을 우리나라 상황에 맞게 번역 및 수정하였다. 수학교육 전문가 2인 및 교사 7인의 검토를 받았으며, 두 차례의 예비 검사를 통해 검사 도구의 문제점을 수정 및 보완하였다. 완성된 검사 도구는 총 28문항으로, 3가지 분수 조작(분할, 반복, splitting)과 4가지 분수 스킴(PUFS, PFS, RPFS, IFS)별로 각 4문항씩 구성되었으며, 길이 모델과 넓이 모델을 사용하여 다양한 맥락에서 학생들의 분수 조작과 스킴을 측정하고자 하였다.

3. 자료 분석

<표 III-1> 본 연구의 표본 설계

모집단		우리나라 초등학교 6학년 학생
표집 설계		비례층화표집 + 2단계군집표집
층화 변인		지역 규모(서울특별시, 광역시, 중·소도시, 읍·면지역)
표집단위(방법)	1단계	학교(편의 표집)
	2단계	학급(편의 표집)

<표 III-2> 본 연구의 표집 대상

	특별시	광역시	중소도시	읍면지역	계
표집 학교 및 학급(개)	3	5	9	4	20
표집 학생(명)	72	128	232	74	506

<표 III-3> 본 연구의 분석 대상

	특별시	광역시	중소도시	읍면지역	계
분석 대상(명)	66	114	181	71	432
지역 규모의 학생 수에 대한 분석 대상 수의 비율(%)	0.083 (66/79,110)	0.098 (114/116,524)	0.090 (181/200,683)	0.092 (71/76,803)	0.091 (432/473,120)

가. 평가 방법

본 검사는 학생들이 답한 것과 그림에 표현한 것을 바탕으로 학생들의 분수 조작과 스킴을 측정하는 것으로, 정확한 답으로 평가하는 것보다 학생들이 과제를 어떻게 해결해나갔는지를 살펴보는 것이 더 중요하다. 따라서 학생들이 분수 스킴 또는 조작과 일치하는 방법으로 과제를 해결한 경우에는 1점을, 일치하지 않는 방법으로 과제를 해결한 경우에는 0점을 부여하였다. 부분적으로만 옳게 해결한 경우에는 0.4점 또는 0.6점을 부여하였다(Norton & Wilkins, 2010, 2012, 2013; Wilkins & Norton, 2011).

신뢰도와 타당도를 높이기 위해 평가자는 연구자를 포함한 3인으로 구성하였고, 각 평가자는 특정한 스킴 또는 조작을 측정하는 4개의 문항에 대해, 자신이 부여한 점수를 합산하였다. 이러한 원점수는 <표 III-4>에서 제시된 기준에 따라 학생이 특정한 조작을 할 수 있는지(1로 코딩), 없는지(0으로 코딩) 또는 특정한 스킴을 가지고 있는지(1로 코딩), 없는지(0으로 코딩) 판단하는데 사용되었다.

<표 III-4> 점수에 따른 코딩 방법

기준	코딩
3 ≤ 원점수	1 (스킴 또는 조작 가능)
2 < 원점수 < 3	4개 문항 고려해서 판단
원점수 ≤2	0 (스킴 또는 조작 불가능)

개별 평가자가 코딩을 마친 후에 3인의 평가 결과를 비교하였으며, 서로 일치하지 않는 경우에는 합의를 도출하여 다시 코딩하였다. 평가자간 신뢰도는 분할의 경우, 0.884로 상당한(good) 일치도를 보였으며, 그 외는 모두 0.9 이상으로 거의 완벽한(Excellent) 일치도를 보였다.

나. 분석 방법

1) 교차분석(Crosstabulation)

교차분석이란, 두 가지 이상의 변인을 교차시켜 각각의 사례로 분할하여 빈도수를 동시에 분석하는 기법이다(안우환, 2004). 본 연구에서는 학생들의 조작 가능 여부 또는 스킴 형성 여부를 교차시켜 [그림 III-1]과 같이 표로 나타내었고 각각의 사례로 분할하여 살펴봄으로써 학생들의 실태를 더 자세히 파악하였다.

		PUFS	
		0	1
분할	0	A	B
	1	C	D

[그림 III-1] 분할과 PUFS 교차표 예시

2) 이항검정(Binomial Test)

Steffe(2002)가 제시한 분수 조작과 스킴에 관한 위계에 따라 우리나라 학생들도 그러한 순서를 따르는지 알아보기 위해서 [그림 III-1]의 B와 C의 값을 살펴보았다. B는 분할은 할 수 없지만 분할 단위 분수 스킴(PUFS)은 형성된 학생을 뜻하며, C는 분할은 할 수 있지만 분할 단위 분수 스킴(PUFS)은 형성되지 않은 학생을 뜻한다. B의 값은 Steffe(2002)의 연구 결과에 반대되는 학생으로, B의 값보다 C의 값이 더 클 경우에 '분할 단위 분수 스킴(PUFS)보다 분할을 먼저 할 수 있는 학생들이 더 많다'고 볼 수 있다. 하지만 이 B와 C의 값 차이가 통계적으로 의미 있는지를 알아보기 위해 두 값에 대한 이항검정을 실시하였다.

이항검정은 하나의 변수가 2개의 값을 가질 때, 하나의 값을 가지는 확률에 관한 검정이다. 본 연구에서는 B와 C의 두 값이 나타날 확률을

0.5로 두었으며, '두 경우에는 통계적으로 유의미한 차이가 없다.'라는 귀무가설을 세워 이항검정을 실시하였다. 또한 Steffe(2002)의 연구 결과에서 순서를 밝힌 경우에는 단측(one-tailed) 검정을, 특별한 순서 없이 함께 발달한다고 밝힌 경우에는 양측(two-tailed) 검정을 시행하였다.

3) 감마(gamma) 통계

감마 통계는 순서 범주형 자료의 대표적인 연관성 측도이다. -1에서 1사이의 값으로 나타나며, 1(-1)에 가까울수록 행과 열의 같은(반대) 방향으로 일치도가 강하다는 뜻이다. 즉, 분수 조작과 스킴의 관계가 1에 가깝게 나온다면 두 변인의 연관성이 높다고 볼 수 있다.

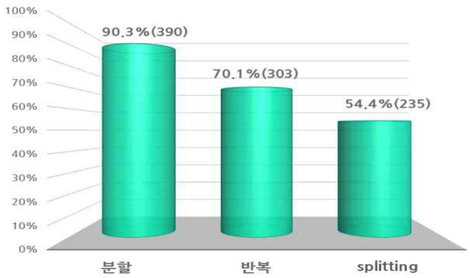
Ⅳ. 결과 분석

1. 초등학교 6학년 학생들의 분수 조작

검사지의 분수 조작 측정 문항을 평가하여 초등학교 6학년 학생들이 분수 조작을 할 수 있는지(1로 코딩), 없는지(0으로 코딩) 파악하였다. 그 결과는 <표 IV-1>과 같으며, [그림 IV-1]은 조작이 가능한 학생들의 비율을 그래프로 나타낸 것이다.

<표 IV-1> 분수 조작 능력 빈도수 (N=432)

구분	분할	반복	splitting
1	390(90.3%)	303(70.1%)	235(54.4%)
0	42(9.7%)	129(29.9%)	197(45.6%)
합계	432(100%)	432(100%)	432(100%)



[그림 IV-1] 분수 조작이 가능한 학생들의 비율

분할이 가능한 학생은 432명 중 390명(90.3%)으로 나타났다. 즉, 대부분의 6학년 학생들이 분할에 능숙한 것으로 보이지만 9.7%의 학생들은 6학년임에도 불구하고 아직 분할에 미숙함을 보였다. 반복이 가능한 학생은 303명(70.1%)으로, 분할이 가능한 학생의 비율(90.3%)과 비교해보았을 때, 반복이 20.2%p 낮게 나타났다. 또한 splitting 조작이 가능한 학생은 235명(54.4%)이었으며, 거의 절반에 달하는 학생들이 splitting을 어려워하였다. 또한 분할(90.3%), 반복(70.1%)과 비교해보았을 때, 각각 35.9%p, 15.7%p 낮게 나타났다.

<표 IV-2>에서 분할과 반복을 모두 어려워하는 학생들은 32명(7.4%)이었으며, 두 조작 모두 가능한 학생들은 293명(67.8%)으로 나타났다. 눈에 띄는 점은, 분할은 가능하지만 반복을 어려워하는 학생들이 97명(22.5%)으로, 분할을 어려워하지만 반복은 가능한 학생 10명(2.3%)보다 훨씬 높게 나타난 것이다.

<표 IV-2> 분할과 반복 교차표

구분		반복 0	반복 1	합계
분할	0	32(7.4%)	10(2.3%)	42(9.7%)
	1	97(22.5%)	293(67.8%)	390(90.3%)
합계		129(29.9%)	303(70.1%)	432(100%)

이항검정 p=0.000(양측)

이항검정을 통해 두 경우의 차이가 유의미함을 확인하였고, 분할이 가능하지만 반복을 어려워하는 학생들이 반대의 경우보다 훨씬 더 많다고 할 수 있다.

<표 IV-3> 분할과 splitting 교차표

구분		splitting		합계
		0	1	
분할	0	35(8.1%)	7(1.6%)	42(9.7%)
	1	162(37.5%)	228(52.8%)	390(90.3%)
합계		197(45.6%)	235(54.4%)	432(100%)

이항검정 p=0.000(단측)

<표 IV-4> 반복과 splitting 교차표

구분		splitting		합계
		0	1	
반복	0	114(26.4%)	15(3.5%)	129(29.9%)
	1	83(19.2%)	220(50.9%)	303(70.1%)
합계		197(45.6%)	235(54.4%)	432(100%)

이항검정 p=0.000(단측)

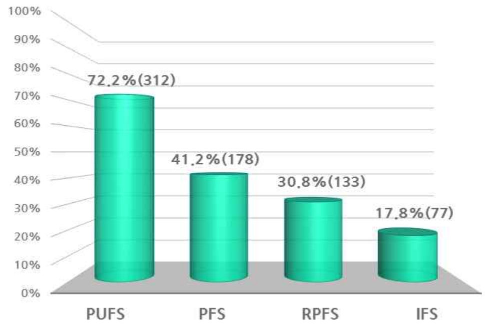
또한 <표 IV-3>에서, 분할이 가능하지만 splitting을 어려워하는 학생이 162명(37.5%)으로 splitting은 가능하지만 분할을 어려워하는 학생 7명(1.6%)보다 35.9%p 높게 나타난 것을 볼 수 있다. 반복의 경우에도 마찬가지로, 반복은 가능하지만 splitting을 어려워하는 학생이 83명(19.2%)으로 splitting은 가능하지만 분할을 어려워하는 학생 15명(3.5%)보다 15.7%p 높게 나타난 것을 볼 수 있다. 이항검정 결과, 이러한 차이가 통계적으로 의미가 있다고 나타났으며, 이를 통해 분할 또는 반복을 splitting 보다 먼저 구성하는 학생들이 반대의 경우보다 훨씬 더 많은 것을 알 수 있다.

2. 초등학교 6학년 학생들의 분수 스킴

검사지의 분수 스킴 측정 문항을 평가하여 초등학교 6학년 학생들이 각 스킴을 형성하고 있는지(1로 코딩), 아닌지(0으로 코딩) 파악하였다. 그 결과는 <표 IV-5>와 같으며, [그림 IV-2]는 스킴이 형성된 학생들의 백분율을 그래프로 나타낸 것이다.

<표 IV-5> 분수 스킴 형성 빈도수 (N=432)

구분	PUFS	PFS	RPFS	IFS
1	312(72.2%)	178(41.2%)	133(30.8%)	77(17.8%)
0	120(27.8%)	254(58.8%)	299(69.2%)	355(82.2%)
합계	432(100%)	432(100%)	432(100%)	432(100%)



[그림 IV-2] 분수 스킴이 형성된 학생들의 비율

먼저 분할 단위 분수 스킴(PUFS)은 분할과 반복 조작이 순차적으로 적용되어 형성되는 첫 번째 분수 스킴으로, 이 스킴이 형성되었다고 볼 수 있는 학생은 432명 중 312명(72.2%)으로 나타났다. 하지만 6학년임에도 불구하고 분할과 반복을 통한 단위분수의 표현을 어려워하는 학생들이 27.8%로 나타났다.

두 번째로, 분할 분수 스킴(PFS)이 형성된 것으로 보이는 학생은 전체 학생 중 178명(41.2%)이었으며 그렇지 않은 학생은 254명(58.8%)으로 나타났다. 또한 분할 단위 분수 스킴(PUFS)과 비교해보았을 때(72.2%), 분할 분수 스킴(PFS)의 형성 비율이 31.0%p 낮게 나타났다.

<표 IV-6> PUFS와 PFS 교차표

구분		PFS		합계
		0	1	
PUFS	0	101(23.4%)	19(4.4%)	120(27.8%)
	1	153(35.4%)	159(36.8%)	312(72.2%)
합계		254(58.8%)	178(41.2%)	432(100%)

이항검정 p=0.000(단측)

<표 IV-6>에서 분할 단위 분수 스킴(PUFS)은 형성된 것으로 보이지만, 분할 분수 스킴(PFS)은 형성되어 있지 않은 것으로 보이는 학생은 153명(35.4%)으로 나타났다. 이는 단위분수를 구성할 수 있으나 이를 반복함으로써 비단위분수를 구성하지 못하는 학생들을 나타낸다. 또한 이는 분할 분수 스킴(PFS)은 형성된 것으로 보이지만, 분할 단위 분수 스킴(PUFS)은 형성되지 않은 것으로 보이는 학생(19명, 4.4%)보다 31.0%p 높게 나타났다. 이항검정 결과, 그 차이가 유의미함이 드러났으며, 이를 통해 분할 분수 스킴(PFS)보다 분할 단위 분수 스킴(PUFS)을 먼저 형성하는 학생들이 반대의 경우보다 훨씬 더 많다는 것을 알 수 있다.

세 번째, 역 분할 분수 스킴(RPFS)은 분할 분수 스킴(PFS)의 역으로, <표 IV-5>에서 이 스킴이 형성된 것으로 보이는 학생은 133명(30.8%)로 나타났다. 분할 분수 스킴(PFS)과 비교해보았을 때(41.2%), 역 분할 분수 스킴(RPFS)을 가진 학생이 10.4%p 낮게 나타났다.

<표 IV-7> PFS와 RPFS 교차표

구분		RPFS		합계
		0	1	
PFS	0	212(49.1%)	42(9.7%)	254(58.8%)
	1	87(20.1%)	91(21.1%)	178(41.2%)
합계		299(69.2%)	133(30.8%)	432(100%)

이항검정 p=0.000(단측)

<표 IV-7>에서 분할 분수 스킴(PFS)은 형성된 것으로 보이지만, 역 분할 분수 스킴(RPFS)이 형성되지 않은 것으로 보이는 학생은 87명(20.1%)으로 나타났다. 이는 전체(1)에서 분수만큼의 부분을 구성할 수 있지만, 부분을 보고 전체(1)를 구성하지 못하는 학생들을 나타낸다고 할 수 있다. 또한 역 분할 분수 스킴(RPFS)이 형성된 것으로 보이지만, 분할 분수 스킴(PFS)이 형성되지 않은 것으로 보이는 학생은 42명(9.7%)으로, 이는 앞서 살펴보았던 반대의 경우보다 약 2배 높게 나타났다. 이항검정을 통해 두 경우 사이에 유의미한 차이가 있다는 것이 드러났으며, 이를 통해 역 분할 분수 스킴(RPFS)보다 분할 분수 스킴(PFS)을 먼저 구성하는 학생들이 더 많이 있음을 알 수 있다.

마지막으로 <표 IV-5>에서 반복 분수 스킴(IFS)이 형성된 것으로 보이는 학생은 432명 중 77명(17.8%)으로 나타났다. 또한 역 분할 분수 스킴(RPFS)과 비교해보았을 때(30.8%), 반복 분수 스킴(IFS)을 가진 학생이 12.0%p 낮았다.

<표 IV-8> RPFS와 IFS 교차표

구분		IFS		합계
		0	1	
RPFS	0	276(63.9%)	23(5.3%)	299(69.2%)
	1	79(18.3%)	54(12.5%)	133(30.8%)
합계		355(82.2%)	77(17.8%)	432(100%)

이항검정 p=0.000(단측)

<표 IV-8>에서 역 분할 분수 스킴(RPFS)이 형성된 것으로 보이지만 반복 분수 스킴(IFS)은 형성되지 않은 것으로 보이는 학생은 79명(18.3%)이고, 반대로, 반복 분수 스킴(IFS)은 형성된 것으로 보이지만 역 분할 분수 스킴(RPFS)이 형성되어 있지 않은 것으로 보이는 학생은 23명(5.3%)으로 전자의 경우가 13.0%p

높게 나타났다. 이러한 차이는 이항검정을 통해 통계적으로 유의미하다고 밝혀졌으며, 따라서 분할 분수 스킴(RPFS)을 반복 분수 스킴(IFS)보다 먼저 형성하는 학생들이 반대의 경우보다 더 많다는 것을 알 수 있다.

3. 분수 조작과 스킴의 관계

앞 절에서 살펴보았던 분수 조작과 스킴 형성 실태를 토대로 조작과 스킴의 관계를 살펴보았다. 먼저 분수 조작과 스킴 사이에는 관계가 없다'라는 귀무가설을 세워 카이제곱 검정을 시행하였다. 그 결과, 모두 유의 확률이 유의 수준 0.01보다 낮게 나타나 귀무가설을 기각함으로써 분수 조작과 스킴 사이에 관계가 있음이 드러났다. 또한 어느 정도의 연관성을 가지고 있는지 정량적으로 살펴보기 위해 감마(gamma) 통계를 사용하여 분석하였고, 그 결과는 <표 IV-9>와 같다.

<표 IV-9> 분수 조작과 스킴의 감마 통계값

	PUFS	PFS	RPFS	IFS
분할	0.733	0.885	0.567	0.817
반복	0.687	0.729	0.781	0.909
splitting	0.673	0.745	0.643	0.790

($p<0.001$)

분할과 역 분할 분수 스킴(RPFS)의 감마 값은 0.567로 상관이 있음으로 나타났으며, 그 외의 경우에는 모두 0.6 이상으로 상관이 높음으로 나타났다. 특히 분할과 분할 분수 스킴(PFS), 분할과 반복 분수 스킴(IFS), 반복과 반복 분수 스킴(IFS)의 경우에는 0.8 이상으로 매우 높은 상관을 보였다.

특히 분할과 반복 조작은 첫 번째 분수 스킴인 분할 단위 분수 스킴(PUFS)을 형성하는데 중요한 역할을 한다(Steffe, 2002). 이에 대해 자세히 알아보기 위해 분할, 반복과 분할 단위 분수 스킴(PUFS)의 형성 여부를 교차시켜 <표 IV-10>, <표 IV-11>과 같이 제시하였다.

<표 IV-10> 분할과 PUFS 교차표

구분		PUFS 0	PUFS 1	합계
분할	0	28(6.5%)	14(3.2%)	42(9.7%)
	1	92(21.3%)	298(69.0%)	390(90.3%)
합계		120(27.8%)	312(72.2%)	432(100%)

이항검정 p=0.000(단측)

<표 IV-10>에서, 분할을 할 수 있지만 분할 단위 분수 스킴(PUFS)이 형성되지 않은 것으로 보이는 학생은 92명(21.3%)이고, 반대로 분할 단위 분수 스킴(PUFS)은 형성된 것으로 보이지만 분할은 어려워하는 학생은 14명(3.2%)으로 나타났다. 이항검정 결과, p=0.000으로 나타나 두 경우 사이에 유의미한 차이가 있음이 드러났다. 이를 통해 분할 단위 분수 스킴(PUFS)을 형성하기 전에 분할을 먼저 할 수 있는 학생들이 더 많이 있음을 알 수 있다.

<표 IV-11> 반복과 PUFS 교차표

구분		PUFS 0	PUFS 1	합계
반복	0	68(15.7%)	61(14.1%)	129(29.9%)
	1	52(12.0%)	251(58.1%)	303(70.1%)
합계		120(27.8%)	312(72.2%)	432(100%)

이항검정 p=0.226(단측)

반복의 경우, <표 IV-11>에서와 같이 반복이 가능하지만 분할 단위 분수 스킴(PUFS)이 형성되지 않은 것으로 보이는 학생은 52명(12.0%)이었으며, 분할 단위 분수 스킴(PUFS)은 가지고

있는 것으로 보이지만 반복을 어려워하는 학생은 61명(14.1%)으로. 후자의 경우가 2.1%p 더 높게 나타났다. 이러한 차이는 이항검정 결과, p=0.226(단측)으로 유의수준 0.05보다 높게 나타나 의미가 없음 드러났다. 즉, 반복을 먼저 구성하는 학생들과, 분할 단위 분수 스킴(PUFS)을 먼저 구성하는 학생들 사이에 차이가 없음을 알 수 있다.

<표 IV-12> PFS와 splitting 교차표

구분		splitting		합계
		0	1	
PFS	0	161(37.3%)	93(21.5%)	254(58.8%)
	1	36(8.3%)	142(32.9%)	178(41.2%)
합계		197(45.6%)	235(54.4%)	432(100%)

이항검정 p=0.000(양측)

또한 splitting은 분할 분수 스킴(PFS)의 형성 후에 나타난다고 제시되어 있었으며, 이에 대해 자세히 파악하기 위해 splitting과 분할 분수 스킴(PFS)의 교차표를 <표 IV-12>에 제시하였다. 이를 볼 때 분할 분수 스킴(PFS)은 형성된 것으로 보이지만 splitting을 어려워하는 학생은 36명(8.3%)이고, splitting은 가능하지만 분할 분수 스킴(PFS)이 형성되지 않은 것으로 보이는 학생은 93명(21.5%)로, 후자의 경우가 13.2%p 높게 나타났다. 이항검정을 실시한 결과, p=0.000(양측)으로 두 경우 사이에 유의미한 차이가 있다고 나타났다. 즉, splitting보다 분할 분수 스킴(PFS)을 먼저 형성하는 학생들은 반대의 경우보다 드물게 나타난다는 것을 알 수 있다.

V. 논의 및 결론

1. 논의

본 연구에서는 우리나라 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 분수 조작 능력과 분수 스킴 형성의 전반적인 실태를 살펴보았으며, 분수 조작과 스킴 사이의 관계를 정량적으로 파악하고 분석하였다. 연구의 결과를 바탕으로 초등학교에서의 분수 교수·학습 방안에 대한 시사점을 논의한다.

첫째, 우리나라 학생들이 대부분 분할은 능숙하게 할 수 있지만, 반복 조작을 상대적으로 어려워하였다. 또한 반복 조작보다 분할을 먼저 구성하는 학생들이 반대의 경우보다 많았다. 이러한 결과는 분할과 반복 조작이 함께 발달한다는 선행 연구(Steffe, 2002; Wilkins & Norton, 2011)의 결과와는 차이가 있다.

분할과 반복은 분수 스킴 형성에 필요한 기초적인 조작이다(최근배, 2010; Steffe, 2002). 학생들이 반복 조작을 어려워하는 이유에 대해서 다각도로 분석해야할 필요가 있으며, 분할 뿐만 아니라 반복도 능숙하게 다룰 수 있도록 분수 교수·학습이 이루어져야 할 것이다.

둘째, Steffe(2002)가 제시한 분수 스킴의 위계에 따라 상위 스킴으로 갈수록 학생들의 스킴 형성 비율이 낮아지는 양상이 나타났다. 또한 분수 스킴 간의 교차표를 통해 상위 스킴보다 하위 스킴을 먼저 형성한 학생들이 반대의 경우보다 더 많은 것을 알 수 있었다. 이러한 결과는 Norton과 Wilkins(2009, 2010, 2012, 2013), Norton 외(2016), Wilkins와 Norton(2011)의 연구에서 밝힌 결과와도 일치한다.

우리나라 학생들도 분수 스킴 위계에 따라 스킴을 형성해 나간다고 볼 수 있으며 이에 따라, 학생들이 하위 스킴에서부터 상위 스킴으로 형성해 나갈 수 있도록 지도해야할 필요가 있다. 또한 이는 분수 스킴이 대수 스킴의 기초가 된다는 선행 연구(Steffe, 2002; 이혜민, 신인선, 2011)의 결과에 따라, 학생들의 대수적 사고 형

성에 핵심적인 기여를 할 수 있을 것이다.

셋째, 학생들이 분수 스킴을 형성한 비율을 살펴보았을 때, 분할 단위 분수 스킴(PUFS)과 분할 분수 스킴(PFS)의 차이가 31%p로 가장 크게 나타났다. 또한 분할 단위 분수 스킴(PUFS)은 형성된 것으로 보이지만 분할 분수 스킴(PFS)이 형성되지 않은 것으로 보이는 학생들이 153명(35.4%)으로 나타났다. 이는 단위분수를 구성할 수 있지만 이를 반복하여 비단위분수를 만드는 것을 어려워하는 학생 수를 나타내며, 이러한 결과는 우리나라 교과서에서 단위분수를 통해 학생들이 분수를 구성해나가는 활동이 부족하기 때문이라고 볼 수 있다(최근배, 2010).

우리나라 학생들도 Steffe(2002)가 제시한 분수 스킴의 위계에 따라 스킴을 구성하는 경향이 있기 때문에, 분할 분수 스킴(PFS)을 먼저 형성해야 더 높은 분수 스킴을 형성해 나갈 수 있다. 이는 단위 분수를 기본으로 한 분할과 반복 조작은 분수 개념 형성에 중요한 역할을 한다는 선행 연구(최근배, 2010)를 뒷받침하며, 단위분수를 중심으로 분수 학습이 전개되어야 한다는 연구 결과와 같은 맥락에서 고려해볼 수 있다(류희찬, 신준식, 1995; 정은실, 2006).

따라서, 분수를 지도할 때 단위분수를 중점적으로 다루어야 할 것이며, 학생들이 단위분수와 전체의 관계 그리고 단위분수와 비단위분수의 관계를 고려할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

넷째, 분수 지도는 분할과 반복 조작을 중심으로 이루어져야 할 필요가 있다. 분할, 반복과 분수 스킴의 관계를 살펴본 결과, 모두 높은 연관성을 가지고 있는 것으로 나타났다. 이는 분할과 반복이 분수 스킴 형성에 중요한 기초가 된다는 Steffe(2002)의 연구와 일맥상통하며, 분수 조작과 스킴의 관계를 정량적으로 평가한 Wilkins와 Norton(2011)의 연구와도 일치한다.

또한 분할, 반복과 splitting의 교차표에서 분할과 반복을 splitting 이전에 구성하는 학생들이 반대의 경우보다 더 많았다. 이는 splitting이 분할과 반복의 동시 구성이라는 Steffe(2003)의 연구에 근거하여 보았을 때, 분할과 반복 조작은 splitting의 구성에 중요한 역할을 한다고 볼 수 있다. 또한 splitting은 상위 분수 스킴을 구성하는데 필수적인 조작이라는 선행 연구의 결과에 따라(Steffe, 2003; Hackenberg, 2007), 본 연구 결과에서도 분수 스킴과 높은 연관성을 보이고 있다.

이를 바탕으로 볼 때, 분할과 반복은 분수 학습에서 기초적이며 필수적인 조작이라고 볼 수 있다. 이러한 결과는 분수 지도에서 분수 스킴 형성을 위한 조작 활동이 필요하다는 선행 연구(이혜민, 신인선, 2011; Lim & Lee, in press)의 결과를 뒷받침한다. 또한 분할과 반복을 통한 분수 지도는 학생들에게 창조적 활동과 정당화 활동을 경험하게 한다는 최근배(2010)의 연구 결과와 연관 지어 볼 때, 분할과 반복을 중심으로 분수 지도가 이루어질 필요가 있다.

다섯째, 분수 조작과 분할 단위 분수 스킴(PUFS)의 교차표에서 주목할 만한 점이 있었다. 분할과 분할 단위 분수 스킴(PUFS)의 경우에는 분할 조작 후에 분할 단위 분수 스킴(PUFS)을 형성한다는 연구 결과에 맞게(Steffe, 2002; Wilkins & Norton, 2011), 분할 단위 분수 스킴(PUFS)보다 분할을 먼저 구성하는 학생들이 많다고 나타났다.

하지만, 반복과 분할 단위 분수 스킴(PUFS)의 교차표에서는, 분할 단위 분수 스킴(PUFS)을 반복보다 먼저 형성한 학생들이 2.1%p 더 높게 나타났다. 두 경우의 차이는 통계적으로 의미가 없었으며, 이를 통해 우리나라에서는 반복과 분할 단위 분수 스킴(PUFS)이 유기적으로 함께 구성되는 경향이 있다고 볼 수 있다. 이는 반복

조작을 통해 분할 단위 분수 스킴(PUFS)이 형성된다고 밝혔던 Steffe(2002), Wilkins와 Norton (2011)의 연구와는 다른 결과이다.

이러한 결과가 나타난 이유에 대해서는 앞서 살펴본 반복 조작의 실태와 연관 지어 생각해 볼 수 있다. 우리나라 학생들은 분할에 비해 반복 조작을 더 어려워하기 때문으로 볼 수 있으며, 따라서 반복 조작에 대한 지도가 더 중점적으로 이루어져야 할 것이다. 하지만 이러한 결과가 나타난 또 다른 이유에 대해서도 고려해 보아야 하며, 이에 대해 다각도로 분석해 볼 필요가 있다.

여섯째, 분할 분수 스킴(PFS)과 splitting의 경우에도 눈에 띄는 점이 있었다. 분할 분수 스킴(PFS)과 splitting의 교차표에서, 분할 분수 스킴(PFS)은 형성된 것으로 보이지만, splitting을 어려워하는 학생들이 반대의 경우보다 13.2%p 낮게 나타났다. 즉, splitting보다 분할 분수 스킴(PFS)을 먼저 형성하는 학생들이 반대의 경우보다 훨씬 적다는 것을 알 수 있으며, 이러한 결과는 splitting이 분할 분수 스킴(PFS)이 형성된 후에 가능하다고 밝힌 Steffe(2002)의 연구와는 대조된다.

하지만 Norton과 Wilkins(2010)의 연구에서는 splitting 후에 분할 분수 스킴(PFS)이 형성된다고 하였으며, 이는 본 연구 결과와 일치한다. 또한 Norton & D'Ambrosio(2008)의 교수실험에서 분수 스킴이 형성되기 전에 splitting을 먼저 구성한 학생이 있었고, Norton(2008)은 이와 관련하여 splitting이 범자연수 체계 내에서 존재할 수 있음을 언급한 바 있다. 이러한 이유로 우리나라에서는 splitting과 스킴의 순서가 Steffe(2002)의 연구와 다르게 나타났을 수 있다. 따라서 splitting 조작 그리고 splitting과 분할 분수 스킴(PFS)의 관계에 대해서 더 깊이 있는 연구가 필요하다.

2. 결론

본 연구에서는 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다. 첫째, 초등학교 6학년 학생들은 전체를 동등한 부분으로 나누는 분할 조작을 대부분 능숙하게 할 수 있었다. 이에 비해, 주어진 길이 또는 넓이를 n배하는 반복 조작은 어려워하였다. 또한 분할보다 반복 조작을 먼저 할 수 있는 학생들의 수가 반대의 경우보다 적게 나타났다. 따라서 분수를 지도할 때, 학생들이 반복 조작도 능숙하게 다룰 수 있도록 다양한 활동이 제공되어야 할 것이며, 이를 중점적으로 고려한 교수·학습이 이루어질 필요가 있다.

둘째, 학생들은 분수 스킴의 위계에 따라 분수 스킴을 형성해 나가는 경향을 보였다. 하지만 분할 단위 분수 스킴(PUFS)과 분할 분수 스킴(PFS)의 형성 비율 차이가 크게 나타났으며, 분할과 반복을 통해 단위분수를 표현할 수 있지만 이를 반복하는 것을 어려워하는 학생들이 많았다. 이는 우리나라 교과서에서 단위분수를 통해 학생들이 분수를 구성해나가는 활동이 부족하기 때문으로 보인다. 따라서 학생들이 더 높은 상위 분수 스킴을 형성해 나갈 수 있도록 단위분수를 중심으로 분수 학습이 전개되어야 할 필요가 있다. 또한 학생들이 단위분수와 전체, 단위분수와 비단위분수의 관계를 고려할 수 있도록 지도가 이루어져야 할 것이다.

셋째, 분할과 반복 조작을 통한 분수 지도가 이루어질 필요가 있다. 분할과 반복은 분수 스킴과 모두 높은 연관성을 가지고 있으며, 상위 분수 스킴을 형성하기 위해 필수적인 splitting 조작을 구성할 때에도 중요한 역할을 하는 것으로 나타났다. 따라서 분할과 반복 조작을 중심으로 한 분수 지도는 학생들이 분수 스킴을 형성할 수 있도록 할 것이며, 더 나아가, 학생들의 대수적 사고 형성에도 핵심적인 기여를

할 수 있을 것이다.

본 연구는 지필 검사를 통해 6학년 학생들의 분수 조작과 스킴에 대하여 면밀히 분석하였다. 본 연구를 토대로 초등학생들의 분수 스킴에 관한 후속 연구가 지속되기를 기대한다.

참고문헌

권성룡(2003). 초등학생의 분수이해에 관한 연구. **학교수학, 5**(2), 259-273.

김유경, 방정숙(2012). 3학년 학생들의 전체-부분으로서의 분수에 대한 이해 분석. **수학교육학연구, 22**(3), 311-329.

류희찬, 신준식(1995). 실제적 접근 방법을 통한 분수 지도 방법 연구. **수학교육학연구, 5**(2), 201-214.

서동엽(2005). 분수의 역사발생적 지도 방안. **수학교육학연구, 15**(3), 233-249.

심재방(2014). **단위화를 활용한 초등학교 4학년 분수 표현 및 크기 지도 방안**. 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

안우환(2004). **논문 작성을 위한 교육통계**. 경기: 한국학술정보(주).

이지영, 방정숙(2014). 분수의 다양한 의미에서 단위에 대한 초등학교 6학년 학생들의 이해 실태 조사. **수학교육학연구, 24**(1), 83-102.

이혜민, 신인선(2011). 산술과 대수적 사고의 연결을 위한 분수 scheme에 관한 사례 연구. **초등수학교육, 14**(3), 261-275.

임재훈, 홍진곤(1998). 조작적 구성주의와 사회적 구성주의에서 구성의 의미와 과정. **수학교육학연구, 8**(1), 299-312.

정은실(2006). 분수 개념의 의미 분석과 교육적 시사점 탐구. **학교수학, 8**(2), 123-138.

최근배(2010). 분할과 반복 조작을 통한 분수지도 탐구. **학교수학, 12**(3), 411-424.

Hackenberg, A. J. (2007). Units coordination and the construction of improper fractions: A revision of the splitting hypothesis. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(1), 27-47.

Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3th ed.). New York: Routledge.

Lim, Y. J. & Lee, K. H. (in press). Partitioning strategies and fraction scheme of 5th graders. *Information.*

Norton, A. (2008). Josh's operational conjectures: Abductions of a splitting operation and the construction of new fractional schemes. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 401-430.

Norton, A., & D'Ambrosio, B. S. (2008). ZPC and ZPD: Zones of teaching and learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 220-246.

Norton, A., & Wilkins, J. L. M. (2009). A quantitative analysis of children's splitting operations and fraction schemes. *Journal of Mathematical Behavior, 28*, 150-161.

Norton, A., & Wilkins, J. L. M. (2010). Students' partitive reasoning. *Journal of Mathematical Behavior, 29*, 181-194.

Norton, A., & Wilkins, J. L. M. (2012). The splitting group. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 557-583.

Norton, A., & Wilkins, J. L. M. (2013). Supporting Students' Constructions of the Splitting Operation. *Cognition and instruction, 31*(1), 2-28.

Norton, A., Wilkins, J. L. M., & Cong, X. (2016). *A progression of fractions schemes that* *crosses chinese and US classrooms*. Manuscript submitted for publication.

Olive, J., & Steffe, L. P. (2002). The construction of an iterative fractional scheme: The case of Joe. *Journal of Mathematical Behavior, 20*(4), 413-437.

Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior, 20*(3), 267-307.

Steffe, L. P. (2003). Fractional commensurate, composition, and adding schemes learning trajectories of Jason and Laura: Grade 5. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(3), 237-295.

Steffe, L. P. (2004). On the construction of learning trajectories of children: The case of commensurate fractions. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 129-162.

Steffe, L. P. (2010). The partitioning and fraction schemes. In L. P. Steffe, & J. Olive (Eds.), *Children's fractional knowledge* (pp. 315-340). New York: Springer.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 390-416.

Tzur, R. (2004). Teacher and students' joint production of a reversible fraction conception. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(1), 93-114.

von Glasersfeld, E. (1999). **앎과 학습의 길: 급진적 구성주의**, (김판수, 박수자, 심성보, 유병길, 이형철, 임채성 외 공역). 서울: 원미사. (원작은 1995년 출판).

Wilkins, J. L. M., & Norton, A. (2011). The splitting loope. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(4), 386-416.

An Analysis of 6th Graders' Fraction Operations and Schemes

Han, Jeong Yee (Graduate School, Korea National University of Education)
Lee, Kwang Ho (Korea National University of Education)

This study analyzed the 6th graders' constructions about fraction operations and schemes and figured out the relationships quantitatively between operations and schemes through the written test of 432 students.

The results of this study showed that most of students could do partitioning operation well, however, there were many students who had difficulties on iterating operation. There were more students who constructed partitioning operation prior to iterating operation than the opposite. The rate of students who constructed high schemes was lower than that of students who constructed low schemes according to the hierarchy of fraction schemes. Especially, there were many students who construct partitive unit fraction scheme but not partitive fraction scheme, because they could compose unit fraction but not do iterating it. And there were the high correlations between fraction operations and schemes. Given these result, this paper suggests implications about the teaching and learning of fraction.

* Key Words : fraction operation(분수 조작), fraction scheme(분수 스킴), partitioning(분할), iterating (반복), partitive unit fraction scheme(분할 단위 분수 스킴), partitive fraction scheme (분할 분수 스킴)

논문접수 : 2016. 12. 21
논문수정 : 2017. 3. 2
심사완료 : 2017. 3. 6