대한수학교육학회지 <학교수학> 제 19 권 제 1 호
Journal of Korea Society Educational Studies in Mathematics
School Mathematics Vol. 19, No. 1, 95 ~ 116. Mar 2017

# 자연상수 $e$ 에 대한 이해를 기반으로 지수함수 $y=2^x$ 의 $x=0$ 에서의 순간변화율 구성에 관한 연구

이 동 근* · 양 성 현** · 신 재 홍***

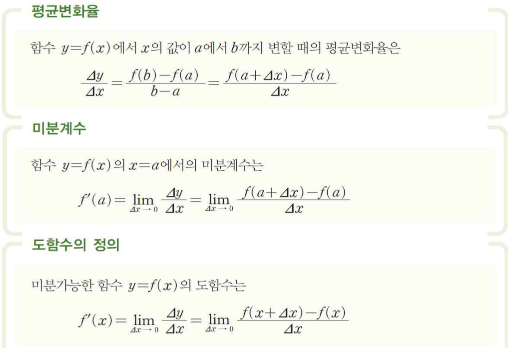
지수함수의 미분에 대한 경험이 없는 학생들을 대상으로 자연상수 $e$를 구성하는 과정과 자연상수 $e$에 대한 이해를 기반으로 지수함수 $y=2^x$의 $x=0$에서 미분계수를 구하는 일련의 과정을 교수실험을 통하여 관찰하였다. 본 연구의 목적은 학생들의 반응을 일반화하는 것에 있는 것이 아니라, 실험에 참여한 학생들의 다양한 반응 분석을 통하여 미적분 관련 수학적 개념 지도에 대한 시사점을 찾아 제시하고자 하였다. 본 연구와 같이 학습자의 이해 방식과 구성 방식에 대한 연구 자료의 축적은 이후 미적분 관련 학습 모델을 제시하는데 중요한 기초 자료가 될 것으로 기대된다.

## I. 서 론

2009 개정에 따른 수학과 교육과정(교육과학기술부 고시 제2011-361호, 이하 2009 개정 수학과 교육과정)에 기반하여 개발된 고등학교 수학과 일반 과목 '미적분 I' 교과서는 총 9종이 인정도서로서 승인되었으며, 9종의 모든 교과서에서 도함수는 [그림 I-1]과 같이 평균변화율에 극한의 개념을 도입하여 미분계수를 정의하고 이를 일반화하여 정의하고 있다. 정의에 의하여 미분가능한 함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수를 구하면

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

이 되고, $f'(a)$의 극한값을 구하기 위해서 학생들은 통상적으로 $x-a$를 약분하여 $x=a$를 대입하는 절차를 거치게 된다. $f(x)$가 다항함수인 경우 이러한 일련의 과정이 용이하지만, $f(x)$가 지수함수인 경우 학생들은 고등학교 교육과정에서 분모에 존재하는 $x-a$를 약분을 통하여 계산할 수 없는 상황에 봉착하게 된다.


평균변화율

함수 $y=f(x)$에서 $x$의 값이 $a$에서 $b$까지 변할 때의 평균변화율은

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

미분계수

함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수는

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

도함수의 정의

미분가능한 함수 $y=f(x)$의 도함수는

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

[그림 I-1] 교과서의 미분 개념 도입
(두산동아, 우정호 외, 2014)

* 문정고등학교, jakin7@hanmail.net (제1 저자)
** 한국교육과정평가원, yangsh90@kice.re.kr
*** 한국교원대학교, jhshin@knue.ac.kr (교신저자)

예를 들어, 학생들 입장에서 $g(x)=x^2$의 $x=a$에서의 미분계수를 구할 때, $\lim_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{x-a}$에서 분모 $x-a$를 약분하여 $x=a$를 대입하면 $g'(a)=2a$를 얻을 수 있다. 그러나 $f(x)=2^x$의 $x=a$ 에서의 미분계수를 구하고자 할 경우 평균 변화율 $\frac{2^x-2^a}{x-a}$에서 $\lim_{x\to a}$를 취하면

$$\lim_{x\to a}\frac{2^x-2^a}{x-a}$$

이 되지만 위 식에서 $x-a$를 약분을 통하여 계산할 수 없게 된다. 이러한 어려움은 지수함수뿐만 아니라 로그함수에서도 동일하게 나타난다.

역사발생 과정에서 로그함수의 미분 개념이 지수함수의 미분과 별개로 진행된 것과 달리 교육과정에서는 자연상수 $e$의 극한값을 이용하여 로그함수의 미분을 도입하는 것으로 구성되어 있다. 지수함수 $f(x)=e^x$의 도함수를 구하는 과정은 다음과 같이 크게 두 가지 단계로 구분하여 분석할 수 있다.

1) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$를 이용하여

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ 임을 보이고,

2) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$를 이용하여 $f(x)=e^x$의 도함수를 유도한다.

이는 '$p\to q$이고 $q\to r$이면 $p\to r$'이라는 구조와 동일하다. 이 상태에서의 논증의 결과는 '$p\to r$'이다. 하지만 여기에 '$p$가 참'이라는 조건을 추가하게 될 경우 논증의 결과는 '$r$이 참'이라는 것이 된다.

즉, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$라는 조건의 참/거짓 입증 여부에 따라 학생들이 학습한 최종 결과가 달라진다. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$가 참인 것을 입증한 상태에서는 $f'(x)=e^x$라는 결과를 얻게 되는 반면, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$가 참인 것이 입증되지 않은 상태에서는 학습의 최종 결과가

'$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$이면 $f'(x)=e^x$이다.'

가 된다. 교육과정에서는 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$에 대하여 참임을 엄밀하게 논증하는 과정 대신 직관적으로 '$n$이 한없이 커질 때, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$이 자연상수 $e$에 한없이 가까워진다.'라고 제시하고 있다. 그러나 학생들이 교과서에서 제시하고 있는 방식을 통하여 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$라는 것을 받아들이고 있는지에 대해서는 관련 연구가 부족하여 조심스럽게 접근할 필요가 있다. 또한 교과서에서 제시하고 있는 접근 방식에 대하여 받아들이지 못하는 학생의 경우 자연상수 $e$에 대한 도입은 자칫 '$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$이고 $2<e<3$인 무리수이다.'라고 선언적으로 정의하는 결과가 될 수 있다. 이는 학생들이 수학적 의미를 모른 채 타인에 의하여 강요된 지식으로 자연상수 $e$를 받아들이게 되는 문제를 낳을 수 있다(민세영, 박선용, 2002; 이병수, 양규한, 이기섭, 1997).

자연상수 $e$는 지수함수와 로그함수 미분의 출발점이라는 의미 외에 그 자체로도 수학에서 중요한 상수이다. Maor(1994, p.13)는 자연상수 $e$를 수학에서 $\pi$와 더불어 가장 중요한 상수라고 평가하였으며, 2500여년 전 무리수의 발견 때의 충격과 비교하여, 초월수로서의 자연상수 $e$의 의미를 부각하였다. 자연상수 $e$는 교육과정에서 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$로 정의하는 방식 외에도 $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$와 같이 다양한

표현이 가능하지만, 본 연구에서는 지수함수와 로그함수의 미분과 관련된 상황에서 자연상수 $e$에 대한 도입 방식과 역할에 초점을 맞추고자 한다.

이를 위해서는 지수함수의 미분과정에서 자연상수 $e$가 어떠한 방식으로 학생들에게 이해가 되는지에 대한 연구가 선행될 필요가 있다. 지수함수와 로그함수의 미분을 현 교육과정의 방식대로 구성할 경우, 자연상수 $e$에 대한 정의는 지수함수의 도함수를 구하기 위하여 반드시 필요한 학습 요소이다. 그럼에도 불구하고 앞서 논의한 바와 같이 학습자가 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$가 '참'임을 받아들이지 못할 경우 지수함수 $f(x)=e^x$의 도함수 개념을 '$f'(x)=e^x$'이 아닌,

'$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$이면 $f'(x)=e^x$이다.'

로 받아들여질 수 있다. $f'(x)=e^x$를 보이기 위하여 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$라는 사실을 이용하는 구조로 교과서에 제시되었음에도 불구하고 자칫 학생들 입장에서는 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$이라는 조건이 충족되어야 $f'(x)=e^x$가 되는 것처럼 받아들여질 수 있다. 즉, 학생들에게 $f'(x)=e^x$를 보이기 위해서 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$가 필요하다는 것을 충분히 납득시키는 방식으로 접근할 필요가 있다. 그러나 교과서에 제시된 방식은 우선 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$라는 사실을 학생이 기억해 두면, 추후 이를 이용해서 지수함수를 미분할 수 있을 것이라는 방식으로 전개되고 있다.

물론 교육과정에서 극한을 형식적으로 엄밀하게 정의하는 것이 아니라 '한없이 가까이 간다.'는 표현과 같이 직관적으로 도입하고 있으므로, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$를 학생들에게 형식적으로 엄밀하게 도입하는 것은 적절하지 않지만, 최소한 전달 방식에 있어서 만큼은 학생들에게 자연스러운 방식이어야 할 필요가 있다.

이를 위해서 학생들을 대상으로 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$를 학생들이 어떻게 이해하고 있는지와 지수함수에서 미분계수의 구성 과정에서 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 필요성이 어떻게 드러나는지에 대하여 살펴보는 것이 필요하다.

학생들의 자연상수 $e$에 대한 이해와 지수함수의 도함수를 구성하는 과정에서 자연상수 $e$가 어떠한 방식으로 드러나는지에 대하여 살펴보는 것은 향후 지수함수와 로그함수의 미분 관련 연구에 풍부한 시사점을 제공할 수 있을 것이다.

본 연구에서는 다항함수의 형태로 주어진 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$에서 속력함수를 구성하는 과정을 경험한 학생들이 지수함수 $y=2^x$의 $x=0$에서의 미분계수를 구성하는 일련의 과정을 분석하였다.

본 연구는 앞서 언급한 연구목적에 따라 다음과 같은 연구문제를 갖는다.

- $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값에 대한 학생들의 인식과 표현은 어떠한가?
- 학생들은 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$에 대한 이해를 바탕으로 $f(x)=2^x$의 $x=0$에서 미분계수를 어떻게 구성하는가?

## II. 이론적 배경

### 1. 역사발생적 관점에서의 지수함수와 로그함수의 미분과 자연상수 $e$

Klein(1924)은 수학적 개념의 지도에서 역사발생적 원리를 강조하였다. 역사발생 관점에서는 로그 개념이 지수 개념 이전에 발달한 것으로 보여지며, Cajori(1913)도 로그가 지수보다 먼저 발견된 것으로 보았다. 그 근거로 로그 발견 당시 현대적인 지수 표기가 사용되지 않은 점과 현대 수학에서의 로그 이론 발달에 핵심이 되는 지수 개념에 대해서도 잘 알지 못했다는 점을 든다. 이러한 관점에서 지수함수의 역함수로 로그함수를 지도하는 것은 역사발생 과정과는 다른 것으로 볼 수 있다. 수학사적으로 로그는 적분과 관계가 깊으며, Cayle(1869)는 로그를 정적분으로 정의하고 지수함수를 로그함수의 역함수로 정의했다(민세영, 박선용, 2002에서 재인용).

민세영과 박선용(2002)은 구분구적법을 이용한 자연로그 지도에 대한 연구에서 로그를 적분과 연계하여 역사발생 과정에 따른 접근을 시도하였다. 특히 이 과정에서 자연상수 $e$에 대한 접근을 구분구적과 로그 개념을 이용하여 소개하고 있다는 점에서 의미가 있는데, 이러한 접근 방식은 교과서에서 선언적으로 자연상수 $e$를 정의하는 것과 달리 기하적 관점에서 수학화 활동이 가능하다고 언급하고 있다. 그러나 이러한 접근 방식은 교육과정의 많은 부분을 바꿔야 한다는 제약이 발생한다.

자연상수 $e$에 대한 수학사적 측면을 살펴보면, 앞서 언급한 로그의 개념 발달과정에서 접근하는 방법 외에 은행의 복리계산 문제에서 접근하는 관점이 있다. 또한 자연상수 $e$의 실질적인 발생은 은행 복리문제에서 시작된 것으로 보는 것이 더 보편적이다.

Eves(1960)은 기원전 1700년 전으로 추정되는 메소포타미아 점토판에 연이율 20%에 1년마다의 복리로 계산할 때, 원리합계가 원금의 두 배가 되려면 얼마나 걸리겠는지에 대한 문제가 있음을 제시하고, 당시에는 로그 개념이 없음에도 선형보간법을 이용하여 근사적인 해를 찾아냈음을 언급했다.

Maor(1994)는 자연상수 $e$가 미적분학보다도 반세기 전에 이미 수학자에게 알려졌다고 주장했다. 이는 자연상수 $e$가 지수함수와 로그함수의 역사발생 맥락과는 달리 복리 계산 과정에서 그 뿌리를 찾는 것으로 본 것이다. 특히 극한 개념 이전에 복리 계산 과정에서 실험을 통하여 특정값에 가까이 간다는 것을 실험적으로 밝혀냈다는 것에 의미를 둘 수 있다. 그러나 자연로그의 밑으로서 $e$의 개념은 지수함수의 미분과 관련이 있으며 18세기 Euler의 연구에 의하여 집중적으로 연구된 것으로 볼 수 있다.

즉, 역사발생적 관점에서 자연상수 $e$의 시작은 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 복리계산에서 시작되었으나 결과적으로 지수함수와 로그함수의 미분과 연계하여 의미가 강조되고 있음을 확인할 수 있으며, 지수함수와 로그함수의 도입 부분에서 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 역할이 중요함을 알 수 있다.

## 2. 교육과정에서의 지수함수와 로그함수의 미분과 자연상수 $e$

2009 개정 수학과 교육과정에 기반하여 개발된 9종의 미적분Ⅱ 교과서에서 지수함수와 로그함수의 미분에 대한 구성은 1차적으로 자연상수 $e$를 정의 형태로 도입한 후 이를 이용하여 ①, ②와 같은 지수함수와 로그함수의 극한을 구한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1 \quad \cdots\cdots ②$$

교육과정의 교수·학습상의 유의점에서도 지수함수와 로그함수의 극한은 지수함수 $e^x$와 로

그함수 $\ln x$의 도함수를 구하는 데 필요한 정도로 간단히 다루도록 명시되어 있다(교육과학기술부, 2011). 이후 다시 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$와 ①, ②를 활용하여 지수함수와 로그함수의 도함수를 구하는 방식으로 구성되어 있다.

특히 황선욱 외(2014)을 포함한 8종의 교과서 구성 방식은 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$에서 $n$이 커지도록 조정하는 것에 대한 논리적인 추론 과정 대신, 직접 계산된 결과를 보여주면서 자연상수 $e$의 값이 특정 값으로 수렴되는 것을 직관적으로 전달하는 방식을 취하고 있다.[1)] 그러나 이전에 학습자들은 $g(x)=\log x$의 경우에서 증가폭이 현저히 감소하기는 하지만 증가하는 함수라고 학습한 경험이 있기 때문에, 증가폭이 둔화되기는 하지만 지속적으로 증가하는 함수 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$가 수렴한다는 논리는 학생들에게 받아들여지기 어려운 부분이 있다.

### 3. 수학적 정당화

Dennis(1996)는 수학은 본질적으로 증명에 관한 학문이라고 하였는데, 최근에는 수학에서의 증명의 성격과 역할을 다양하게 해석하고 있다. 한편 정당화는 엄밀하게 전개되는 연역적이고 형식적인 증명뿐만 아니라 학생들이 어떤 추측을 참으로 인정하는 다양한 방법을 포괄하는 방법이다.

Samandeni(1984)는 초등학생을 대상으로 활동적 증명을 고안하여 어떤 명제의 타당성에 대한 확신을 얻을 수 있도록 직관적 설명과 형식적 논증을 매개하는 연구를 진행하였고, Blum & Kirsch(1991) 역시 논증의 바탕이 되는 직관적이고 명확한 것은 개인적 지식에 바탕을 두고 각각의 개인에 의해 결정될 수 있어야 하며 정당화 과정이 꼭 엄밀할 필요는 없다고 주장하였다.

정당화 유형에 증명 외에 다양한 형태를 포함시킨 여러 연구들(Balacheff, 1987; Harel & Sowder, 1998; Knuth & Eliott, 1998) 역시, 수학적 정당화에 엄밀한 증명 외에도 명제의 타당성을 입증할 수 있는 직관적인 접근을 인정하는 것으로 볼 수 있다. 따라서 교수·학습 상황에서 정당화를 도입할 경우 직관적인 이해를 도움과 동시에 명제의 타당성을 입증할 수 있는지 고려할 필요가 있다.

현 교과서에서 $n$의 값을 증가시켜 가면서 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 몇 가지 값을 구한 다음 그 경향성으로 자연상수 $e$의 값을 정의하는 것은 직관적인 부분은 고려되었으나 명제의 타당성을 입증하는 것에는 문제가 있으므로 적절한 정당화로 보기 어렵다.

한편 권점례, 박지현, 양성현(2015)은 계산기를 활용한 자연상수 $e$의 정당화 방안을 논술형 수행평가 과제로 제시한 바 있다. 계산기를 활용한 자연상수 $e$의 정당화 방식도 몇 가지의 사례를 가지고 극한값에 해당하는 경향치를 추론하는 방식인데, 이는 교육과정에서 도입하는 방식과 마찬가지로 극한을 구하는 과정에서 오류를 범할 수 있는 추론 방식이다. 그러나 교육과정에서 몇 개의 값을 대입해서 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값을 구한 다음 그 경향을 추정하여 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값이 일정한 값으로 수렴한다고 선언적으로 정의하는 방식과는 달리, 해당 수행과제의 경우는 경향치

1) 김원경 외(2014)의 경우는 다른 8종의 교과서와 달리 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$가 계속 증가하면서 3을 넘지 못하므로 직관적으로 수렴한다는 부분을 언급하였다.

에 해당하는 값은 추정을 하지만 그 추정 값이 일정한 상수가 되어야 한다는 것을 학생들 스스로 논증할 수 있는 장치가 마련되어 있다는 점에서 구분된다. 해당 과제는 수학사적 사료에 근거하여 개발된 자료라는 점에서 학생들의 구성 방식으로 볼 수는 없지만 자연상수 $e$에 대한 학생들 대상 연구에서 하나의 출발점으로 활용될 수 있다.

# III. 연구 방법

## 1. 교수 실험

교수실험은 학습자가 수학 개념을 구성해가는 활동에 대한 지속가능한 모델을 확립하는 것을 목적으로 한다. 즉, 교수실험 학생의 학습과정을 연구하기 위한 것으로, 학생의 조작 방식에 대한 가설을 세우고, 교사의 의도가 반영된 과제와 활동을 학생에게 제시하면서 사전에 세운 가설에 대한 수정 및 검증을 하게 된다(Hackenberg, 2009). 이를 위하여 연구자들은 초기 과제를 공동으로 논의하여 투입한 이후 학습자가 특정 수학개념을 어떻게 구성해 가는지에 대하여 추론할 수 있도록 상황을 제시하고 관찰하면서 다음 과제를 준비하는 과정을 반복적으로 거치게 된다. 교수실험에서 중요한 것은 '과제에 대한 학생의 답'이 아니라 '과제에 대하여 해당 내용에 대한 학습 경험이 없는 학생들을 대상으로 그들이 개별적으로 접근해 가는 그들만의 방식에 대하여 관찰하는 것'이다(이동근, 안상진, 김숙희, 신재홍, 2016). 교수실험 과정은 미리 예견된 계획에 의하여 진행된다기보다는 연구자가 실험 참여 학생과의 대화나 행동 방식에 의하여 단계적으로 개발되는 실험적 성격을 갖는다. 이에 따라 매 차시 실험 종료 이후 연구자들 사이의 논의를 통하여 모두 동의하는 과정 이후 다음 실험이 진행되게 된다(Glasersfeld, 1995, p. 46).

교수실험 진행을 위한 초기 과제는 연구자들의 사전 협의를 통하여 구성하였으며, 이후 과제는 교수실험 진행에 대한 분석과정을 거쳐서 매 차시 이후 연구자들의 협의를 거쳐 구성되었다. 교수실험 진행은 학생들 간의 의사소통을 중심으로 진행하되 연구자들의 판단 하에 적절한 수준에서 개입하여 발문을 제시하는 방식으로 진행하였다. 또한 매 차시 종료 이후 연구자들은 이전 차시에서 보인 학생들의 사고와 행동의 의미를 공동으로 분석하고 상호 합의에 근거하여 다음 교수실험을 설계하였다. 연구자 1명은 교수실험 진행을 담당하였으며, 교수실험의 완성도를 높이고 진행자가 실수하는 부분에 대한 보완과 방향성을 제시하기 위하여 2명의 다른 연구자들이 실험 전반에 대하여 공동 연구자로 참여하였다.[2] 본 연구에서 교수 실험은 총 20차시(1차시 당 실험시간 70분 내외)로 구성되었고, 참여 고등학생 세 명을 대상으로 1학년 1학기 중간고사 이후인 2016년 5월 중순부터 시작하여 2017년 1월 초순까지 약 8개월간 진행하였다. 본 연구에서는 총 20차시의 교수실험 중, 연구 주제와 직접적으로 관련된 7차시 분량의 교수실험을 분석하였으며, 그 중에서도 연구주제와 밀접한 2개 차시 분량의 교수실험 자료를 집중적으로 분석하였다. 특히 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$에서 속력함수를 구성하는 과정 이후 이를 바탕으로 지수함수 $y=2^x$에서 $x=0$에서의 순간속력을 구하는 과정에 대한 2개 차시 분량(18차시와 19차시)의 교수실험을 통하여 학생들의 자연상수 $e$에 대한

2) 여기서 교수 실험을 진행한 수학교사는 제1저자를 의미하며, 공동 연구자는 각각 교신저자와 공동저자를 의미한다.

이해의 변화과정과 지수함수 $y=2^x$의 $x=0$에서의 미분계수에 대한 인식 과정에 대하여 세밀하게 관찰하였다. 7개 차시의 교수실험 진행의 과제는 <표 III-1>과 같다.

## 2. 연구 대상자의 특성과 과제 분석

본 연구에 참여한 세 명의 학생들은 서울 소재 일반계 고등학교 1학년 학생으로서 학생들의 수학 성적은 2016년 4월에 실시한 전국연합학력평가를 기준으로 학생L, 학생M, 학생K가 각각 1, 2, 4등급이었다. 연구자가 세 명의 학생들을 실험 대상으로 선정한 이유는 연구자의 학급 학생들 중에서 평소 수업에서 자신의 의견에 대하여 잘 설명하면서, 지필고사 수학 영역 등급이 서로 상이한 학생들을 선정하고자 하였기 때문이다. 이러한 의도적인 표본선정은 질적 연구에서 연구자들이 많은 정보를 획득할 수 있다는 장점이 있다(이동근, 김숙희, 안상진, 신재홍, 2016). 선행학습의 정도를 파악하기 위하여 2016년 첫 교수실험 이전에 사전면담을 실시하였는데, 세 명의 학생 모두 1학년 1학기 내용 중 기말고사 범위에 해당하는 고차방정식(삼차방정식, 사차방정식)과 도형의 방정식 일부에 대한 사전 학습 경험이 있었고, 실험이 진행되는 과정에서도 학원 등에서 선행학습을 통하여 교육과정 범위보다 한 단원 정도 앞서 이루어지는 것이 관찰되었다. 본 연구에서 관심을 가지고 분석할 7개 차시 분량의 교수실험 자료 중 그 시작이 되는 13차시 교수실험은 2017년 1월 2일에 이루어졌으며, 시작 전 학생들에게 문답을 통하여 사전 지식을 확인한 결과 수열의 극한과 함수의 극한에 대한 학습이 이루어진 것으로 확인되었으나, 지수함수와 로그함수의 미분에 대한 사전 지식은 없는 것으로 확인되었다.

<표 III-1>에서 제시된 과제에 대하여, 13차시의 경우 세 학생의 속력함수에서의 함숫값에 대한 이해 방식과 거리함수에서의 함숫값에 대한 이해 방식이 드러난 과제로서, 세 학생 모두 속력함수의 함숫값은 그 순간의 속력으로 표현하

<표 III-1> 교수실험 과제 및 흐름

| 차시 | 과제 내용 | 흐름 |
|---|---|---|
| 13 | • 속력함수 $y=x^2$에서 $x=2$에서의 함숫값의 의미를 말하여라.<br>• 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$에서 $x=2$에서의 함숫값의 의미를 말하여라.<br>• 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$에서 0초에서 4초까지, 2초에서 4초까지, 3초에서 4초까지의 평균속력을 구하고, 4초에서 4초까지에 해당하는 값도 구하여라. | 거리함수와 속력함수에서 함숫값에 대한 학생들의 이해와 표현 관찰 |
| 14 | • 거리함수가 $y=\frac{x^3}{3}$일 때 속력함수를 구하여라.<br>• 거리함수가 $y=\frac{2x^3}{3}$일 때 속력함수를 구하여라. | 학생들의 거리함수에서 속력함수 구성에 관한 특징 관찰 |
| 15 | • 거리함수가 $y=\sqrt{x}$일 때 속력함수를 구하여라.<br>• 거리함수가 $y=2^x$일 때 속력함수를 구하여라. | 학생들의 거리함수에서 속력함수 구성 방식의 제한점 인식 및 그에 대한 학생들의 반응 관찰 |
| 16 | | |
| 17 | | |
| 18 | • 거리함수 $y=2^x$에서 $x=k$에서의 순간속력을 구하여라. | 자연상수 $e$에 대한 학생들의 구성방식 관찰 및 거리함수 $y=2^x$에서의 순간속력에 대한 학생들의 표현 관찰 |
| 19 | • $n=1,2,3,\ldots$에서 $10^{\frac{1}{2^n}}$의 값에 대한 변화를 표현하여라. | |

였으며, 거리함수의 함숫값은 그때까지의 총 이동거리로 표현하였다. 또한 13차시에 부여된 과제에서 0초에서 4초, 2초에서 4초, 3초에서 4초까지의 평균속력을 구하는 방식 역시 세 학생이 동일한 방식으로 구하는 것이 관찰되었다.

그러나 13차시 세 번째 과제에서 학생들은 거리함수에서 4초에서 4초까지의 평균속력에 대하여 서로 다르게 표현하는 것이 관찰되었다. 학생들은 거리함수에서 4초에서 4초까지의 평균속력에 대하여는 분모가 0이 되기 때문에 값이 없다고 표현(학생K)하거나 분자가 0이기 때문에 값이 0이라고 표현(학생L)한 반면, 학생M은 4초에서 4초까지라는 표현을 $4 \le k \le 4$로 받아들여서, $x=k$인 순간의 속력을 값으로 갖는다고 표현하였다.[3]

14차시 첫 번째 과제에서는 세 학생이 사전에 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$의 속력함수가 $y=x^2$이라는 사실을 알고 있었기 때문에[4], 학생L은 이러한 사전지식과 '거, 속, 시'라는 관계식(거리=속력×시간)을 이용하여 거리함수 $\frac{x^3}{3}$을 속력에 해당하는 $x^2$과 시간에 해당하는 $\frac{x}{3}$의 곱으로 보고 속력함수를 $x^2$이라 표현하였다.

반면 학생M은 $a$초에서 $k$초까지의 평균속력을 나타내는 식을 $\dfrac{\frac{k^3}{3}-\frac{a^3}{3}}{k-a}$로 구한 다음 분모의 $k-a$를 약분하여 $\frac{k^2+ak+a^2}{3}$를 구해서 $a$에 $k$를 대입하는 방식으로 $k$초에서의 순간속력에 해당하는 $k^2$이라는 값을 구하였다. 학생K는 학생M의 방식을 따라서 동일한 결과를 얻어내기는 하였으나, 자신의 방식은 아니라고 답하였다. 그러나 14차시 두 번째 과제에서는 세 학생 모두 학생M의 방식을 이용하여 속력함수를 구성하였다.

15차시와 16차시는 학생M의 방식으로 거리함수에서 속력함수를 구하는 방식으로는 분모의 $k-a$가 대수적으로 약분되기 힘든 과제로서, 특히 거리함수가 $y=2^x$인 경우에 대하여는 세 학생 모두 17차시까지 이어진 활동에서 속력함수를 구성하지 못하였다. 이 과정에서 학생M은 다양한 시행착오를 겪으면서 '식으로 구할 수 있는 것이냐?'를 지속적으로 확인하면서, 대수적으로 구성하는 것에 대한 의문을 제기하였다.

<표 II-2> 자연상수 $e$의 값에 대한 정당화 과제(권점례 외, 2015)

| $10^t$ | $10^t$의 값 | $\frac{1}{t}$ | $10^t$의 값 | $10^t$의 소숫점 아래의 값 |
|---|---|---|---|---|
| $10^{\frac{1}{2}}$ | 3,162277 | - | - | - |
| $10^{\frac{1}{4}}$ | 1,77879 | 4 | 1+0,778791 | 0,778791 |
| $10^{\frac{1}{8}}$ | 1,333521 | 8 | 1+0,333521 | 0,333521 |
| $10^{\frac{1}{16}}$ | 1,154819 | 16 | 1+0,154819 | 0,154819 |
| $10^{\frac{1}{32}}$ | 1,074607 | 32 | 1+0,074607 | 0,074607 |
| $10^{\frac{1}{64}}$ | 1,036632 | 64 | 1+0,036632 | 0,036632 |
| $10^{\frac{1}{128}}$ | 1,018151 | 128 | 1+0,018151 | 0,018151 |
| $10^{\frac{1}{256}}$ | 1,009035 | 256 | 1+0,009035 | 0,009035 |
| $10^{\frac{1}{512}}$ | 1,004507 | 512 | 1+0,004507 | 0,004507 |
| $10^{\frac{1}{1024}}$ | 1,002251 | 1024 | 1+0,002251 | 0,002251 |
| $10^{\frac{1}{2048}}$ | 1,001124 | 2048 | 1+0,001124 | 0,001124 |
| $10^{\frac{1}{4096}}$ | 1,000562 | 4096 | 1+0,000562 | 0,000562 |
| $10^{\frac{1}{8192}}$ | 1,000281 | 8192 | 1+0,000281 | 0,000281 |
| $10^{\frac{1}{16384}}$ | 1,000140 | 16384 | 1+0,000140 | 0,000140 |
| $10^{\frac{1}{32768}}$ | 1,000070 | 32768 | 1+0,000070 | 0,000070 |
| $10^{\frac{1}{65536}}$ | 1,000035 | 65536 | 1+0,000035 | 0,000035 |

19차시의 과제는 다음 <표 III-2>와 같이, $t=\frac{1}{2^n}$일 때 $n=1,2,3,\ldots$을 대입해 가면서 $10^t$의 값을 제시한 것으로서, $10^t$의 소숫점 아래의 값을 별도로 제시하여 규칙을 찾을 수 있는 과제(권점례 외, 2015)이다. 이에 대한 학생들의 반

3) 학생들의 거리함수와 속력함수에서의 속력에 대한 인식은 이동근 외(2016)에 더 상세하게 기록되어있다.

4) 학생들은 8차시에서 10차시의 교수실험에서 속력함수 $y=x^2$에서 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$을 구성하는 과정을 경험한 바 있다.

응과 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값을 구성해 가는 과정은 'Ⅳ장 연구 결과'에서 자세히 논할 것이다.

### 3. 자료 수집 및 분석 방법

본 연구는 전체 교수실험 중 논의와 관련된 자료를 집중적으로 분석한 연구이다. 이를 위하여 비디오카메라 2대와 오디오 등의 장비를 이용하여 수업을 기록하였는데, 비디오카메라 1대는 실험에 참여한 세 명의 학생들의 수학적 활동을 촬영하였으며, 학생들의 표정 변화를 관찰하기 위하여 비디오카메라 1대를 추가로 설치하여 촬영하였다. 이외에도 별도로 녹음된 오디오자료와 전사과정을 통한 분석 작업을 진행하였다.

또한 교수실험을 진행하면서 학생들의 활동이 담기 활동지와 연구자들의 현장노트 및 다음 차시 실험 과제를 구성하기 위한 연구자 간의 회의록을 수합하였다. 이러한 자료들을 근거로 교수실험 진행 방향에 대한 수정과 재구성의 이유를 'Ⅳ. 연구결과' 부분에 함께 기술하였다.

## Ⅳ. 연구 결과

### 1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$에 대한 학생들의 직관적인 이해와 표현

거리함수 $y=2^x$의 속력함수를 구하는 15차시 두 번째 과제에 대하여 세 명의 학생들은 학생M이 14차시 첫 번째 과제에서 보여준 방식으로 접근을 하였다. 즉, $a$초에서 $k$초까지의 평균속력 $\frac{2^k-2^a}{k-a}$에 대하여 $k-a$를 약분해서 $a$대신에 $k$를 대입하겠다는 전략이었는데, $k-a$의 약분에 어려움을 겪게 되자 세 명의 학생 모두 거리함수 $y=2^x$의 속력함수를 구하는 것에 대하여 16차시, 17차시의 실험 동안 이 과제로 고민하는 모습을 보였다. 특히 학생M의 경우는 여러 계산상의 시행착오를 거치면서 자신의 방식과 같이 '식으로 해결하는 것이 가능한가?'를 반복해서 질문하기도 하였다. 이에 대하여 연구자들은 학생M이 식으로 거리함수 $y=2^x$의 속력함수를 구하는 방식을 놓고 고민을 하는 것에 대하여, 어떻게 도움을 줄 것인지에 대하여 고민하였다. 이러한 고민 결과 연구자들은 지수함수에서 도함수를 구할 때, 교육과정에서 자연상수 $e$에 대한 정의에서부터 시작한다는 점을 고려하여, 학생들에게 자연상수 $e$에 대한 소개를 하기로 하였으며, 이에 따라 자연상수 $e$를 학생들에게 어떠한 방식으로 소개할 것인지 정하기 위하여 사전에 학생들의 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$에 대한 이해와 표현을 살펴보기로 하였다.

교사는 학생들에게 '수열이 $1, 1, 1, \cdots$ 이렇게 계속 가면, 끝에 가면 이게 어디로 가까이 갈까요?'라고 질문하였고, 이에 대하여 세 명의 학생 모두 '1로 가까이 가요.'라고 답을 하였다. 이어서 교사가 '수열이 $\frac{1}{n}$으로 표현된 경우는 끝이 어디로 갈까?'라는 질문에 대하여도, 세 명의 학생 모두 '0이요.'라고 답을 하였으나, '그러면 $1+\frac{1}{n}$이라는 수열이 있어요. 이건 어떻게 될까?'라는 질문에 대하여는 학생M과 학생K는 '1'이라고 답한 반면 학생L은 '무한대'라고 답을 하였다. 이후 교사가 학생L에게 '백일/백, 1억1/1억'이라고 이야기를 하자, 학생L은 '1'이라고 자신의 표현을 수정하여 답을 하였다.

교사가 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$의 결과가 1이 나온 것에 대한 이유를 묻는 것에 대하여는, 학생M과 학생

L은 $\left(1+\frac{1}{n}\right)$이 한없이 1에 가까워지는 것으로 설명을 하였으나, 학생K는 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$을 $\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1+0=1$의 방식으로 구하였다고 답을 하였다.

그러나 교사가 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$의 극한을 물었을 때는 세 명의 학생 모두 답을 1이라고 하였으며, 그 이유에 대하여는 학생K를 포함한 세 명의 학생 모두 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$에서 $n=1,2,3,\cdots$을 대입해가면서 변화를 추정하여 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$이 1로 한없이 가까이 가는 것으로 설명하였다. 또한 학생들은 같은 방식으로 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^4$의 극한값을 묻는 교사의 질문에 대하여 '1'이라고 답을 하였다.

이어서 교사가 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 극한값을 묻자, 학생L과 학생K는 '1'이라고 답을 하였으나, 학생M은 '어.. 이거 본 적 있어요.'라고 답을 한 다음, 중학교 3학년 겨울방학 때 혼자서 읽었던 수학 관련 서적에서 본 기억이 있다고 말하였으나 왜 그러한 값을 갖는지에 대하여는 모르겠다고 표현하였다. [대화1]은 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 극한값에 대한 학생들의 이해의 차이가 드러난 교사와 학생들 간의 대화이다.

**[대화1]**

교사 : $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$는?
학생K : 1이 될 것 같아요.
학생L : 1이요
교사 : 이것도 1?
학생M : 어.. 이거 본 적 있어요(웃음을 머금으며 답함).
교사 : 어디서 봤어요?
학생M : 자연로그요.
⋮
교사 : ... 학생K와 학생L은 이걸 처음 보죠?
학생L, 학생K : 네
교사 : 학생M은 이게 왜 이렇게 되는지 알아요?
학생M : 그건 몰라요.

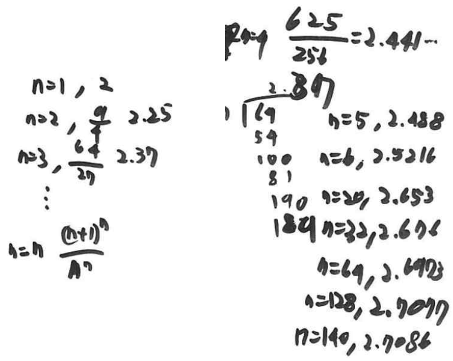
연구자들은 [대화1]을 통하여 학생M이 자연상수 $e$를 들어본 적이 있지만 왜 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$이 2와 3사이의 특정한 값으로 수렴하는지에 대한 이유는 모른다는 것을 확인하였으며, 학생들의 이해방식에도 차이가 있음을 알 수 있었다. 이에 따라 학생들이 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값을 구성할 수 있는 과제(권점례 외, 2015)를 제시하고 학생들의 반응을 살펴보기로 하였다. 이 과정에서 학생L과 학생M이 서로 다른 방식으로 접근하여 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값을 구성하였으며, 학생K는 다른 두 학생들(학생L과 학생M)이 의견을 표현할 때 듣기는 하였으나 자신의 의견을 표현하지는 않았다.

이에 따라 다음절에서는 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값에 대한 학생L과 학생M의 이해와 표현에 대하여 살펴볼 것이다.

### 2. 학생L의 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 변화에 대한 이해와 표현

학생L은 교사가 <표 III-2>에 해당하는 과제를 추가로 제시하였지만, 이에 대한 과제 해결을 하기 보다는 계산기를 이용하여 [그림 IV-1]과 같

이 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 $n$에 1부터 시작하여 140까지 차례로 대입하여 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값을 계산하여 그 변화를 살펴보는 작업을 혼자서 진행하였다.




[그림 IV-1] 학생L의 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값을 구한 결과

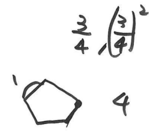
이후 학생L은 '이거 1은 아니에요.'라고 교사에게 말하였고, 그 이유를 묻는 교사에게 $n=140$까지 한 결과가 2.7정도여서 1은 아니라는 근거를 제시하였다. 특히 학생L은 바로 이어서 '...점점 커질 것 같은데...'라고 표현을 하였는데, [대화2]에서 밑줄 부분은 이전에 학생M이 책에서 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값이 2.7 정도로 수렴하는 것을 본 적이 있다고 표현했던 것을 의식하는 것으로 보였다. 교사가 '그걸 몰랐다면?'이라고 반문하자, 학생L은 '느리기는 하지만 점점 커질 것 같아요.'라고 답을 하였다. 또한 '근데 3은 안 넘어갈 거 같아요.'라는 표현도 덧붙였다. 학생L은 결과적으로 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값이 특정한 값으로 수렴한다기 보다는 점점 증가하기 때문에 수렴하지 않을 것으로 추정하였다. [대화2]는 학생L의 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$값을 추정해 가는 과정에 대한 대화이다.

**[대화2]**

학생L : 이거 1이 아니네요.
교사 : 아까부터 눈여겨보기는 했는데... 1이 아니다? 설명해볼래요?
학생L : ... $n$이 무한대로 가면 1로 간다 2로 간다 이렇게 쭉쭉 하다가 $n$까지 가면 좋겠는데... $n$을 140까지 계산을 했는데... 이런 식으로 가다가
교사 : 음...
학생L : <u>여기까지 했더니... 2.7...이어서... 근데 이걸 아까 이거(학생M이 2.7정도의 값이라고 한 거)이라고 해서 그렇게 느껴지는데... (학생L의 생각으로는)점점 커질 것 같은데...</u>
교사 : 그걸(학생M이 이야기한 것) 몰랐다면?
학생L : 느리기는 하지만 점점 커질 것 같아요.
교사 : 그렇다는 거죠?
학생L : 근데 3은 안 넘어갈 거 같아요.

그런데 학생L은 혼자 고민하다가 갑자기 교사에게 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값이 2.76으로 가까이 갈 것 같다면서 변화를 보였다. 그 근거에 대하여 '이게 소숫점 이게 점점 늘어나지만 소수점 아래 7은 넘지 못해서 어떤 값에 가까이 갈 것 같아요.'라고 진술 하였는데, 이는 학생L이 자신의 방법대로 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$를 구할 경우 구하여진 값에서 소수점 아래 값이 계속 증가한다는 것을 이야기한 것으로 보이며, 그렇게 증가함에도 특정한 값을 넘어서 증가하지는 못하기 때문에 수렴한다고 표현한 것으로 보인다.

교사는 갑자기 그런 생각의 변화가 생긴 이유를 설명해 달라고 요구하자 학생L은 [그림 IV-2]와 같은 그림을 제시하면서 이유를 설명하였다.




[그림 IV-2] 학생L의 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의

수렴 여부에 대한 근거 자료

[그림 IV-2]는 학생L이 혼자서 풀어보았던 등비급수에 해당하는 문제로서, 한 변의 길이가 1인 정오각형의 한 점에서 매번 그 직전 이동 거리의 $\frac{3}{4}$만큼의 거리를 다음에 이동한다는 규칙하에 처음 1만큼 이동했다면 최종적으로 이동한 위치는 어디가 되는지를 묻는 과제였다. 이 과제에 대하여 학생L은 ‘오각형에서 한 변의 길이가 1일 때 $\frac{3}{4}$씩 줄은 상태로 가면 어떻게 가냐고 했더니 이변에 점이 무수히 많이 찍혀서 결국 이리로(정오각형의 네 번째 점) 가까이 갔었거든요.’[5]라고 답을 하면서, ‘여기서(자연상수 $e$에서의 논의)도 해보면 소수점 아래(2.76에서 소수점 아래 첫 번째 자리)가 8을 넘지 못할 것 같아서 어떤 값에 가까이 갈 것 같아요. 라고 표현하였다. 이에 대하여 교사는 학생L이 단순히 어떤 값을 넘지 못한다는 것을 이야기한 것인지 아니면 수렴한다고 이야기를 하는 것인지가 분명치 않아서, ‘3을 넘지 못할 것 같다는 이야기야? 아니면 특정값에 가까이 간다는 이야기야?’라고 명확히 물어보았는데, 학생L은 교사의 질문에 대하여 ‘가까이 갈 것 같아요.’라고 답을 하였다. [대화3]은 학생L이 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값이 수렴할 것 같다는 자신의 견해를 교사에게 설명하는 대화이다.

**[대화3]**

학생L : 근데 이거 2.76 그렇게 될 것 같아요... 이게 소숫점 이게 점점 늘어나지만 소수점 아래 7은 넘어가지 못해서 어떤 값에 가까이 갈 것 같아요.

교사 : 왜 갑자기 그런 생각을 했어요?

학생L : 어제 급수문제를 풀었는데...

교사 : 니가 따로 혼자 풀어보았다고?

학생L : 네... 오각형에서 한 변의 길이가 1일 때 $\frac{3}{4}$씩 줄은 상태로 가면 어떻게 가냐고 했더니 이번에 점이 무수히 많이 찍혀서 결국 이리로 가까이 갔었거든요.

교사 : 응

학생L : 여기서도 해보면 소수점 아래가 8을 넘지 못할 것 같아서 어떤 값에 가까이 갈 것 같아요.

교사 : 3을 넘지 못할 것 같다는 이야기야? 아니면 특정 값에 가까이 간다는 이야기야?

학생L : 가까이 갈 것 같아요.

학생L의 설명을 듣고 나서 교사는 이전에 학생들이 $y=\log x$의 그래프의 변화에 대하여 ‘늘어나는 정도가 점점 감소한다.’고 표현했던 사실을 기억하고, 학생L에게 ‘$\log x$는 어떻게 될 것 같아요?’라고 물어보았다. 교사의 질문에 대하여 학생L은 $y=\log x$의 그래프의 변화 역시 $\left(1+\frac{1}{n}\right)$의 변화와 마찬가지로 늘어나는 정도가 점점 줄면서 특정한 값을 넘지 않기 때문에 수렴할 것 같다고 답을 하였다. [대화4]는 이에 대한 교사와 학생L의 대화이다.

---

5) 학생L이 네 번째 점으로 가까이 간다고 표현한 것은 공비가 $\frac{3}{4}$이고 초항이 1인 등비급수에서 $\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4$의 계산 과정을 거쳐서 등비급수의 합을 구한 것으로 보인다.

그러나 학생L의 설명에 대하여 다른 학생(학생M과 학생K)들은 $y=\log x$의 그래프가 늘어나는 정도가 줄어들고는 있지만 계속해서 증가할 것 같다는 의견을 제시하였으며, 특히 학생M의 경우는 '함숫값에 대응하는 값이 항상 있으니까 계속 커질 수 있죠.'라고 이유를 제시하면서 $y=\log x$가 계속 증가하는 함수임을 지적하였다.

이러한 지적에 대하여 학생L도 고민을 하는 모습을 보였으나, $y=\dfrac{1}{x}$을 예로 들면서 '0에 가까워지는데 0은 닿을 수는 없고 그런 느낌하고 비슷해서...'라면서 자신의 견해를 바꾸지 않았다.

**[대화4]**

교사 : $\log x$는 어떻게 될 것 같아? 얘는 10을 집어넣으면 1이죠. 100은 2고 1억은 8이죠?

학생들 : 네

교사 : 1억 100을 넣어도 조금씩 커지잖아요. $y=\log x$ 그래프 그릴 줄 알아요?

학생들 : 네

교사 : 그러면 학생L이 그래프를 그려봐

학생L : (그래프를 그림)

교사 : 그럼 이건 특정 값에 가까이 가?

학생L : 이것($y=\log x$)도 넘지는 않을 것 같은데요... 그러니까 제 말은...

교사 : 이것($y=\log x$)도 넘지 않는다고?

학생L : 제 말은 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$는 2.7 얼마 얼마여서 뒤에가 늘어나는 건데... 이게 이 7을 넘어가지 못해서... 나중에 가면 엄청 멀리 간 거에서 바로 전 단계는 소수점 뒷자리에서 조금 느는 정도...

교사 : 그러면 얘($y=\log x$)도?

학생L : 얘($y=\log x$)도 될 것 같아요.

교사 : 얘($y=\log x$)도 특정 값에 가까이 가는 거야? 얘($y=\log x$)도 어느 값을 못 넘어서?

학생L : 잘 모르고 하는 이야기이지만 그럴 것 같아요.

**[대화5]**

학생M : 함숫값에 대응하는 값이 항상 있으니까 계속 커질 수 있죠.

교사 : 학생L은 얘도 역시 어느 범위를 못 넘어갈 것 같고?

학생L : 네. 근데 예전에 수업에서 $y=\log x$ 그래프를 그렸잖아요? 그 때 늘어나는 정도가 줄어든다고 했는데... $\frac{1}{x}$이

교사 : $\frac{1}{x}$는 이거(교사가 $y=\frac{1}{x}$의 그래프를 그려 봄) 이야기하는 거야?

학생L : 네... 0에 가까워지는데 0은 닿을 수는 없고 그런 느낌하고 비슷해서...

교사 : 얘($y=\log x$)도?

학생L : 늘어나는 것은 대입하면 바로 보이기는 하는데...

교사 : 사실 내가 궁금한 건 그거야. 이건 늘어나기는 늘어나는데 어떤 값을 못 넘어간다. 그래서 수렴한다고 한 거잖아?

학생L : 네

교사 : 얘($y=\log x$)도 늘어나기는 늘어나는데 같은 양상으로 어떤 값을 벗어나지 못한다고 했잖아?

학생L : 네. 저도! 저도! 대입하면 바로 깨져서 아니라고 생각하는데...

교사 : 그러면 얘($y=\log x$)하고 얘$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$는 다른 상황인거죠?

학생L : 네

교사 : 다른 상황인건 다른 상황인데 여기서도 3을 절대 못 넘어가는 것을 논리적으로 보인 건 아닌 거죠?

학생L : 네

다만 [대화5]에서 드러나듯이 학생M의 지적 이후 학생L이 '늘어나는 것은 대입하면 바로 보이기는 하는데...' 혹은 '대입하면 바로 깨져서 아니라고 생각하기는 하는데...'라는 표현을 사용하는 것에서 자신의 추측에 대하여 갈등하는 모습을 보여주었다.

학생L의 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 변화에 대한 이해 과

정을 살펴보면 1) $n=1,2,3,...$을 대입해 보면서 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값의 변화를 관찰하였으며, 그 결과 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값이 점점 커져서 발산할 것이라고 예측하였으나, 2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값이 2.8을 넘지 못하는 것을 발견한 다음에는 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$이 수렴할 것이라고 표현의 변화가 있었다. 이는 $y=\log x$에 대하여도 동일하게 적용이 된다고 보아서, 학생L은 $y=\log x$ 역시 수렴할 것이라 고 하였으나, 이후 교사와 다른 학생들과의 대화를 통하여 3) $y=\log x$의 경우는 계속 증가하는 함수라는 점을 인식하고 수렴한다는 자신의 추측을 바꾸었다. 이상의 변화과정에서 학생L은 어떤 수열이 계속 값이 증가해 가면서 특정 값을 넘어가지 못하면 수렴한다는 논리를 보여주었으나, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 경우 3을 넘지 못한다는 것을 추정은 하였지만 논리적으로 입증하지 못하였기 때문에 결과적으로 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$이 수렴한다는 것을 정당화하지는 못한 것으로 볼 수 있다.

### 3. 학생M의 규칙 찾기를 통한 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$의 정당화

학생들은 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값을 찾기 위하여 $n$에다가 $n=1,2,3,\cdots$의 값들을 순차적으로 대입해가면서 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 변화 규칙을 찾으려하였으나 규칙이 발견되지 않자 고민하는 모습을 보였다. 이에 연구자들은 학생들이 규칙 찾기를 통하여 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값을 구성할 수 있는 과제를 찾아서 제시하기로 합의하였다.

이러한 논의에 따라 교사는 학생들에게 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$이 의미상으로 $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$와 같음을 언급하고 나서, <표 III-2>를 제시하였다. <표 III-2>는 $10^t$의 값들을 $t=\frac{1}{2^n}$인 $t$의 변화에 따라 표로 나타낸 것이다. 제시된 표에서 규칙을 찾아보라는 교사의 제안에 대하여, 학생M은 '점점 위 아래 비가 2가 되가는 것 같아요.' 혹은 '아래 비가 2로 가까워지는 것 같아요.'라고 규칙을 제시하였는데, 이는 표에서 $n$번째 $10^t$의 값에서 소숫점 아래의 값들을 $k_n$이라는 수열로 볼 때, $k_{n+1}=\frac{1}{2}k_n$의 관계식을 표현한 것으로 보인다.

한편 학생M은 교사의 안내를 받아서 $k_n$과 해당하는 $\frac{1}{t}$의 곱에 대해서도

'$2^{n+1}\times k_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot 2^{n+1}\cdot 2\times k_{n+1}=2^n\times k_n$'

이라는 규칙을 제시하였는데, 이를 수식을 통하여 정리하면 ($k_n$에 해당하는 $\frac{1}{t}$)$\times k_n$을 $c_n$이라는 새로운 수열로 볼 때, $c_n=c_{n+1}=\cdots$ 이 되어 $c_n$이 일정한 값일 것 같다고 유추한 것으로 볼 수 있다.

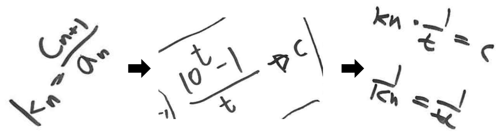
학생M이 <표 III-2>에서 여러 규칙을 찾아냄에 따라 교사는 '이 표를 보고 $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$의 극한값을 예측해 봐요.'라고 학생M에게 이야기하면서, '로그도 치환도 모두 다 이야기해도 되요.'라고 추가 단서를 달면서 모든 가능성을 열고 생각하도록 하였다.

이후 학생M은 $10^t-1$을 $k_n$으로 표현하기로 하였다. 이에 따라 학생M은 자신이 처음 썼던

식 $(1+k_n)^{\frac{1}{k_n}}$ 라고 쓴 다음, $k_n=\frac{c_{n+1}}{a_n}$ 이라고 적었다. 학생M이 $k_n=\frac{c_{n+1}}{a_n}$ 라고 적은 표현에서 $a_n$은 $2^n$으로 추정된다. 즉, 학생M은 이전에 자신이 찾았던 규칙 '$2^{n+1}\times k_{n+1}=2^n\times k_n$'에서 $a_n$을 $2^n$으로 보고, 해당 규칙을

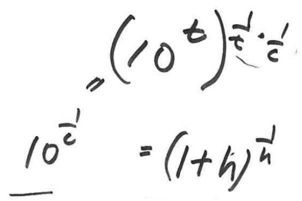
$$c_{n+1}=a_{n+1}k_{n+1}=a_nk_n=c_n$$

으로 생각해서, $k_n=\frac{c_{n+1}}{a_n}$ 을 찾아낸 것으로 보인다. 이렇게 볼 경우 학생M의 입장에서 $k_n=\frac{c_{n+1}}{a_n}$ 라는 표현은 $k_n=\frac{c_{n+1}}{a_n}=\frac{c_n}{a_n}$ 이 되며, 학생M은 $k_n=\frac{c_n}{a_n}$ 라는 사실을 이용하여 $(1+k_n)^{\frac{1}{k_n}}$ 라는 표현을 다시 $(1+\frac{c_n}{a_n})^{\frac{a_n}{c_n}}$ 으로 바꾸어 나타내었다.



[그림 IV-3] 학생M의 $k_n$과 상수$c$의 관계에 대한 표현의 변화

다음으로 학생M은 [그림 IV-3]과 같이 '$\frac{10^t-1}{t}\to c$'라는 표현을 사용하였는데, 이는 앞서 $k_n=\frac{c_n}{a_n}$ 라는 표현에 미루어 생각해보면 $a_nk_n$이 일정한 상수$c$에 가까워지는 것을 다르게 표현한 것으로 보인다. 이후 학생M은 $\frac{10^t-1}{t}\to c$라는 표현을 다시 $k_n\times\frac{1}{t}=c$라는 표현으로 고쳐서 $\frac{1}{k_n}=\frac{1}{tc}$ 로 나타내었다.



[그림 IV-4] 학생M의 $(1+h)^{\frac{1}{h}}=10^{\frac{1}{c}}$ 의 관계식

이러한 관계식을 찾아낸 다음 학생M은 [그림 IV-4]와 같이 $(10^t)^{\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{c}}=10^{\frac{1}{c}}$ 라는 것과 $10^t=1+k_n$이고 $\frac{1}{k_n}=\frac{1}{tc}$ 라는 것을 이용하여 $(10^t)^{\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{c}}=(1+k_n)^{\frac{1}{k_n}}=(1+h)^{\frac{1}{h}}$ 라는 관계식을 구성하였다. 또한 이들 사실을 이용하여 최종적으로 $(10^t)^{\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{c}}=(1+k_n)^{\frac{1}{k_n}}=(1+h)^{\frac{1}{h}}=10^{\frac{1}{c}}$ 를 나타내었다.

여기까지 구성한 학생M은 $c$에다가 어떠한 상수를 넣어야 할지 고민을 했고, 교사가 규칙대로라면 표에서 가장 마지막에 나와 있는 것으로 구하는 것이 좋을 것 같다고 의견을 표명하자, $c=2.293$을 대입하여 계산기를 이용해서 $(1+h)^{\frac{1}{h}}=10^{\frac{1}{c}}$의 값을 2.729로 답을 하였다. 이후 교사와 학생M은 이 상수를 이전 학생M이 책에서 보았다고 하는 자연상수 $e$로 표현하기로 하였다.

연구자들이 학생M의 정당화 과정을 분석한 결과는 다음과 같다.

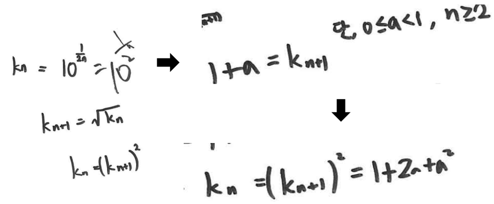
1) $n$번째 $10^t$의 값에서 소수점 아래의 값들을 $k_n$이라는 수열로 볼 때, $k_{n+1}=\frac{1}{2}k_n$의 관계식

을 찾아서, 2) $a_n$을 $2^n$으로 보고 $k_n = \dfrac{c_n}{a_n}$의 관계식을 구성한 다음 이를 $k_n \times \dfrac{1}{t} = c$로 표현하고, 3) $(10^t)^{\frac{1}{t} \cdot \frac{1}{c}} = (1+k_n)^{\frac{1}{k_n}} = (1+h)^{\frac{1}{h}} = 10^{\frac{1}{c}}$을 구성하여 $c$에 상수를 대입하여 자연상수 $e$를 얻어내는 일련의 과정을 확인할 수 있었다.

수업 영상을 분석하는 과정에서 연구자들은 학생M의 정당화 과정의 첫 시작이 되는 $k_{n+1} = \dfrac{1}{2}k_n$에서 학생이 확신을 갖지 못하고 주저했던 부분을 발견하고, 학생M이 이 부분에 대하여 어떻게 정당화를 하는지 확인하기로 하였다. 즉, 연구자들은 학생M에게 $k_{n+1} = \dfrac{1}{2}k_n$이 성립하는 이유를 물어보았고, 학생M은 교사의 물음에 대하여 정확히 같은 것이 아니라 근사적으로 같다는 견해를 밝히고, 이를 입증하려는 시도를 하는 모습을 보였다. 학생M은 $10^{\frac{1}{2^n}} = k_n$[6]으로 보고, $k_{n+1} = 10^{\frac{1}{2^{n+1}}} = \sqrt{k_n}$의 관계식을 구성하였다. 이어서 $(k_{n+1})^2 = k_n$으로 식을 표현한 다음 $k_{n+1} = 1+a$로 다시 적어서 $0 \le a < 1$, $n \ge 2$에 대하여

$$k_n = (k_{n+1})^2 = (1+a)^2 = 1+2a+a^2$$

을 구성하였다. 여기까지 구성한 다음 학생M은 교사에게 '여기까지는 할 수 있을 것 같아요.'라고 말하였고, 이유를 설명해 달라는 교사의 요구에 대하여 '이게 $n$은 커지면 커질수록 이게 $a^2$은 진짜 소수가 작은 값이 되어 거의 소수부분이 다음 항으로 갈수록 $\dfrac{1}{2}$를 유지한다는 거에요. 그거에요.'라고 답을 하였다. [그림 IV-5]는 학생M의 $k_{n+1} = \dfrac{1}{2}k_n$에 대한 정당화 과정에 대한 변화를 나타낸 것이다.



[그림 IV-5] 학생M의 $k_{n+1} = \dfrac{1}{2}k_n$의 정당화 과정에 대한 표현

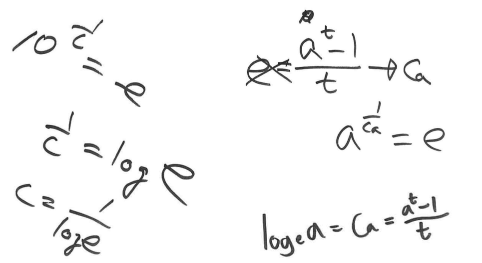
4. 학생M의 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ 정당화 이후, 지수함수 $y = 2^x$에서 $x = 0$에서의 순간속력 구성

교사는 $\dfrac{10^t - 1}{t} \to c$의 관계에서 $10$대신 $2$를 넣어서 생각을 해도 동일한 결과인지를 물었는데, 학생들은 $10$대신에 $2$를 대입한 $\dfrac{2^t-1}{t}$도 $t$가 0으로 가까이 갈 때 특정한 상수로 가까이 간다는 것에 동의하였다. 다만 $\dfrac{10^t-1}{t} \to c$의 값과 $\dfrac{2^t-1}{t}$의 값은 서로 다르다고 하였다. 이에 대하여 교사는 $\dfrac{10^t-1}{t} \to c$에서의 $c$의 값과 $\dfrac{a^t-1}{t}$에서 $t$가 0으로 갈 때의 극한값을 구하라고 하였다. 학생M은 교사가 제시한 과제에 대하여 $10^{\frac{1}{c}} = e$에서 양 변에 상용로그를 취하여

6) 학생M이 여기서 표현한 $k_n$은 이전 논의에서 $10^t - 1 = k_n$에서의 $k_n$과는 구분된다. 실험도중에도 교사가 이를 인지하였으나, 학생의 활동에 방해가 될 수 있어서 학생의 표현을 그대로 따라서 진행을 하였다.

$c=\log_e 10$이라고 나타내었으며, 동일한 방법으로 $a^{\frac{1}{c_a}}=e$에서 $c_a=\log_e a$라고 표현하였다. 학생M이 각각의 상수값을 구하는 과정은 [그림 IV-6]과 같다.

$\frac{10^t-1}{t}$의 $t$가 0으로 갈 때의 극한값 $\frac{a^t-1}{a}$의 $t$가 0으로 갈 때의 극한값



[그림 IV-6] 학생M의 $\frac{a^t-1}{t}$의 $t$가 0으로 갈 때의 극한값

교사는 학생M이 $\log_e a=\frac{a^t-1}{t}$라는 것을 구성한 다음 $\frac{a^t-1}{t}=\frac{a^t-a^0}{t-0}$으로 표현을 바꾸어 주고 나서 $a=2$를 넣어서 그 의미가 무엇인지를 생각해보라고 하였다. 이에 대하여 학생M은 [대화6]에서와 같이 교사와의 문답과정을 거치면서 최종적으로 $\log_e 2=\frac{2^t-1}{t}=\frac{2^t-2^0}{t-0}$의 의미가 0초에서의 거리함수 $y=2^x$의 순간속력이라고 답을 하였다.

**[대화6]**

학생M : (관계식을 씀. 교사의 안내에 따라 $\log_e a=\frac{a^t-a^0}{t-0}$를 씀)
교사 : 그러면 $a$에 2를 넣고 생각해봐. 그게 무슨 의미가 있는지...
학생M : 했어요.
교사 : 무슨 의미에요?
학생M : 거리함수 $y=2^x$에서 0초에서 t초까지의 평균속력이요.
교사 : t는 0으로 가까이 가는 거잖아요?
학생M : 네
교사 : 평균속력이었던 거에서 이걸로 가까이 간다는 거잖아요. 극한 값이잖아요?
학생M : 네. 0초에서 0초까지
교사 : 그거의 의미는 뭐에요?
학생M : 0초일 때 순간속력
교사 : 0초가 아닌 다른 초에서의 순간속력도 생각해봐야죠?
학생M : 네

그러나 학생M의 구성방식은 거리함수 $y=2^x$의 $x=0$인 순간의 순간속력을 구하는 것은 설명할 수 있으나, 임의의 순간 $x=t$에서 순간속력을 구할 수 있는 구성방식은 아니라는 제한이 있었으며, 이는 학생도 인식하고 있는 문제점이었다.

# V. 결론 및 제언

## 1. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값에 대한 인식과 표현의 변화

교육과정에서는 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값이 직관적으로 2와 3사이의 값으로 수렴하는 것으로 전달하고 있으나, 교수실험에 참여한 세 명의 학생들의 처음 반응은 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$의 극한값을 1이라고 답하였으며, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 극한값 역시 1이라고 답을 하였다. 이때 학생들이 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 극한값을 추

정하는 방식은 교육과정에서 접근하는 방식과 마찬가지로 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 변화를 살펴보고 답을 하는 방식이었으나, 학생들은 직관적으로 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$이 수렴할 것이라고 예측하지는 못하였다.

이후 학생L과 학생M은 자신들만의 정당화 과정을 발전시켜 나가면서 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값에 대한 이해와 표현의 변화를 보여주었다. 학생L의 접근 방식은 교육과정의 방식과 마찬가지로 $n=1,2,3,\cdots,140$까지의 값을 대입해 가면서 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 변화를 조사하는 방식이었는데, 처음에는 1) $n=1,2,3,\ldots$을 대입해 보면서 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값의 변화를 관찰하면서 점점 커져서 발산할 것이라고 예측하였으나, 2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 값이 2.8을 넘지 못하는 것을 발견한 다음에는 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$이 수렴할 것이라고 생각의 변화가 있었다. 그러나 $y=\log x$의 경우에는 처음에는 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$와 동일하게 늘어나는 정도가 줄어들면서 일정한 값으로 가까워진다고 예측하여 수렴할 것 같다고 하였으나, 교사와 다른 학생들과의 대화 과정에서 $y=\log x$의 경우는 계속 증가하는 함수라는 점을 인식하고 수렴한다는 자신의 추측을 바꾸었다.

이상의 변화 과정에서 학생L은 어떤 수열이 계속 값이 증가해 가면서 특정 값을 넘어가지 못하면 수렴한다는 논리를 보여주기는 하였으나, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$이 3을 넘지 못한다는 것을 정당화하지 못하였기 때문에 결과적으로는 본인 스스로 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$이 수렴한다는 것을 입증한 것이라고 생각하지는 않았다.

학생M의 경우도 처음에는 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 극한값을 1로 추측하였으나, 이전에 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 극한값이 2와 3 사이의 값으로 수렴한다는 사실을 들었던 기억을 떠올려서 수렴할 것 같다고 표현을 수정하였다. 그러나 자신의 예측에 대하여 정당화할 수는 있는 방법을 묻는 교사의 질문에 대하여는 따로 의견을 제시하지는 못하였다. 이후 연구자가 제시한 <표 III-2>의 과제를 통하여 1) $n$번째 $10^t$의 값에서 소숫점 아래의 값들을 $k_n$이라는 수열로 볼 때, $k_{n+1}=\frac{1}{2}k_n$의 관계식을 찾고, 2) $a_n$을 $2^n$으로 보고, $k_n=\frac{c_n}{a_n}$의 관계식을 구성한 다음 이를 $k_n\times\frac{1}{t}=c$로 표현하고, 3) 최종적으로 $(10^t)^{\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{c}}=(1+k_n)^{\frac{1}{k_n}}=(1+h)^{\frac{1}{h}}=10^{\frac{1}{c}}$를 구성하여 $c$에 상수를 대입하여 자연상수 $e$를 얻어내는 정당화 과정을 구성하였다.

## 2. 학생M의 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$에 대한 이해와 $f(x)=2^x$의 $x=0$에서 미분계수의 구성 과정

학생M은

$$(10^t)^{\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{c}}=(1+k_n)^{\frac{1}{k_n}}=(1+h)^{\frac{1}{h}}=10^{\frac{1}{c}}$$

에서 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 극한값을 자연상수 $e$라

는 것을 정당화한 이후, $\frac{10^t-1}{t} \to \log_e 10$ 라는 것에서 $\frac{a^t-1}{t} \to \log_e a$라는 것으로 일반화한 다음 $a=2$를 대입하여 $\frac{2^t-1}{t} \to \log_e 2$ 라는 과정을 구성하였다. 이때 교사는 $\frac{2^t-1}{t}$라는 표현을 $\frac{2^t-2^0}{t-0}$로 바꾸어서 보도록 안내를 하였고 이에 학생M은 $\frac{2^t-2^0}{t-0}$이 $0$초에서 $t$초까지의 거리함수 $y=2^x$에서 평균속력으로 이해하였다. 또한 자신이 구성하였던 $\frac{2^t-1}{t} \to \log_e 2$의 의미에 대하여도, 거리함수 $y=2^x$에서 $x=0$에서의 순간속력으로 이해하는 모습을 보여주었다. 이때 학생M은 자신이 구성한 방식이 임의의 순간 $x=t$에서 순간속력을 구할 수 있는 구성 방식은 아니라는 제한점을 인식하고 있었다.

그러나 학생M의 구성 방식은 이전 거리함수 $y=\frac{x^3}{3}$에서 속력함수를 $a$초에서 $k$초까지의 평균속력 $\frac{\frac{k^3}{3}-\frac{a^3}{3}}{k-a}$으로 구성하여, 분모의 $k-a$를 약분한 다음 $k$대신에 $a$를 대입해서 $k^2$을 얻는 방식으로는 해결되지 않는, 거리함수 $y=2^x$의 특정한 한 점에서의 순간속력을 구하였다는 것에 의미가 있다. 또한 학생M이 자연상수 $e$에 대한 이해가 거리함수 $y=2^x$의 순간속력을 구성하는 독특한 학생만의 방식은 추후 지수함수 미분에서 학생들에 대한 이해의 폭을 넓혀줄 것으로 보인다.

### 3. 교육적 함의 및 제언

교육과정에서 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$이 수렴한다는 것을 도입하는 방식은, 엄밀하고 형식적인 논증을 통하여 증명하는 대신 학습자의 직관적인 이해에 의존하는 방식이다. 이는 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$가 수렴한다는 것을 형식적으로 보이는 과정이 교육과정의 범위를 넘어가고 또 불필요한 학습 부담을 줄 수 있다는 점을 고려한 조치로 보인다. 그래서 일부 교과서나 교사들의 경우 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$에 $n$의 값에 자연수를 대입해서 실제 그 값을 구한 것이 지속적으로 증가한다는 것을 보여주는 방법을 통하여 직관적인 이해를 돕기도 한다.

그러나 이러한 방식이 학생들의 직관적 이해를 돕는 방법인지에 대하여는 그 동안 관련 연구 자료가 부족하여 판단하기에 조심스러운 부분이 있었다. 본 연구는 제한된 학생들을 대상으로 교수실험을 진행하였다는 제한점이 있기는 하지만 학생들을 대상으로 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 수렴 여부에 대한 학생들의 이해와 표현을 조사하고 그들만의 구성 방식을 따라 실험을 진행함으로서 학생들에 대한 이해의 폭을 넓힐 수 있는 기회를 제공하였다. 특히 학생L의 구성 방식은 교육과정의 범위를 벗어나는 실수의 완비성을 보이는 논증과정이 잘 드러난 것으로 보인다. 다만 유계라는 부분에 대하여 학생L이 스스로가 납득할 수 있는 정당화를 방식을 구성하지 못하였으며, 이로 인하여 갈등을 하는 모습이 관찰되었다. 이는 교육과정의 방식이 직관적으로 학생들에게 자연스럽게 수렴하는 것으로 납득되기 어려움이 있다는 것을 보여주며, 불완전한 정당화 방식 역시 학생에게는 갈등 요인이 될 수 있음을 보여준다.

반면 학생M은 $10^{\frac{1}{2^n}}$을 $k_n$으로 설정하고, $k_n$과 $k_{n+1}$의 관계식을 통하여 $k_{n+1}-1=\frac{1}{2}(k_n-1)$임

을 자신만의 논리로 정당화하는 과정이 있었는데, 이는 학생M이 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$의 수렴을 입증하는 첫 명제가 되었고, 결과적으로 $p$가 참이라는 것과 $p\Rightarrow q$이고 $q\Rightarrow r$이라는 논증 구조를 거쳐서 $r$이 참이라는 것을 보이는 구조로 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$를 입증하는 정당화 방식을 구성하였다. 또한 학생M의 정당화 방식은 $\frac{2^t-1}{t}$라는 표현을 $\frac{2^t-2^0}{t-0}$로 바꾸어 보았을 때, 결과적으로 거리함수 $y=2^x$에서 $x=0$에서의 순간속력으로 이해하게 되는 장면을 드러내었다. 물론 이러한 구성 방식은 임의의 순간 $x=t$에서 순간속력을 구할 수 있는 구성 방식은 아니라는 제한점은 있지만, 자연상수 $e$와 지수함수의 미분의 관계에 대한 학생의 독특한 구성 방식을 관찰한 것이라는 점에서 의미가 있다.

본 연구는 지수함수의 미분에 대한 경험이 없는 학생들을 대상으로 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$를 구성하는 과정과 이에 대한 이해를 바탕으로 지수함수 $y=2^x$의 $x=0$에서의 미분계수를 구하는 일련의 과정을 관찰한 연구이다. 본 연구의 목적은 학생들의 반응을 일반화하는 것에 있는 것이 아니라, 실험에 참여한 학생들의 다양한 반응 분석을 통하여 미적분 관련 수학적 개념 지도에 대한 시사점을 제시하고자 하였다. 본 연구와 같이 학습자의 이해 방식과 구성 방식에 대한 연구 자료의 축적은 이후 미분 관련 학습 모델을 제시하는데 중요한 기초 자료가 될 것이다.

## 참고문헌


교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책8].

권점례, 박지현, 양성현(2015). 과정 중심 평가에서 계산기 활용 방안 연구. **한국교육과정평가원 연구보고** RRC 2015-11.

김원경, 조민식, 방금성, 윤종국, 조정길, 이근주, 김기탁, 박수연, 박정숙, 박진호, 윤요섭, 정상일(2014). **미적분Ⅱ**, 서울: 비상교육.

김창동, 장경윤, 김응환, 문광호, 이병헌, 이채형, 차순규, 박윤근, 이소영, 정지현, 이병하, 김성남, 주정호, 권백일, 장인선(2014). **미적분Ⅱ**, 서울: 교학사.

류희찬, 조완영, 이정례, 선우하식, 이진호, 손홍찬, 신보미, 조정묵, 이병만, 김용식, 임미선, 선미향, 유익승, 한명주, 박원균, 남선주, 김명수, 정성윤(2014). **미적분Ⅱ**, 서울: 천재교과서.

민세영, 박선용(2002). 쌍곡선의 구적법에 의한 자연로그의 도입에 관한 고찰. **수학교육학연구. 12**(1), 81-93.

신항균, 이광연, 박세원, 신범영, 이계세, 김정화, 박문화, 윤정호, 박상의, 서원호, 전제동, 이동흔(2014). **미적분Ⅱ**, 서울: 지학사.

우정호, 박교식, 이종희, 박경미, 김남희, 임재훈, 권석일, 남진영, 김진환, 강현영, 이형주, 박재희, 전철, 오혜미, 김상철, 설은선, 황수영, 김민경, 최인선, 고현주, 이정연, 최은자, 김기연, 윤혜미, 천화정(2014). **미적분Ⅰ**, 서울: 두산동아(주).

우정호, 박교식, 이종희, 박경미, 김남희, 임재훈, 권석일, 남진영, 김진환, 강현영, 이형주, 박재희, 전철, 오혜미, 김상철, 설은선, 황수영, 김민경, 최인선, 고현주, 이정연, 최은자, 김기연, 윤혜미, 천화정(2014). **미적분Ⅱ**, 서울: 두산동아(주).

이강섭, 황석근, 김부윤, 심성아, 왕규채, 송교식, 김진석, 김경돈, 주창수, 양인웅, 차주연, 정

재훈, 김원일, 조보관, 김원중. **미적분Ⅱ**, 서울: MiraeN.

이병수, 양규한, 이기섭(1997). 무리수 e의 교수 례. **수학교육프로시딩. 5**, 300-320.

이동근, 김숙희, 안상진, 신재홍(2016). 변화율 관점에서 농도 변화에 대한 인식과 표현의 변화 과정에 대한 분석. **수학교육학연구. 26**(3), 333-354.

이동근, 안상진, 김숙희, 신재홍(2016). 거리함수와 속력함수에서, 거리와 속력의 관계에 대한 학생들의 인식과 표현의 변화과정에 대한 연구. **학교수학. 18**(4), 873-893.

이준열, 최부림, 김동재, 한 대희, 전용주, 장희숙, 조석연, 조성철, 황선미, 박성훈(2014). **미적분Ⅱ**. 서울: 천재교육.

정상권, 이재학, 박혜숙, 홍진곤, 박부성, 최홍원, 민진원, 김호경(2014). **미적분Ⅱ**. 서울: 금성출판사.

황선욱, 강병개, 김영록, 윤갑진, 김수영, 송미현, 이성원, 도종훈, 이문호, 박효정, 박진호(2014). **미적분Ⅱ**, 서울: 신사고.

Balacheff, N.(1987). Procesus de preve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics, 18*, 147-176.

Blum, W. & Kirsch, A.(1991). Preformal Proving: Example and reflection. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 183-203

Cajori, F.(1913). History of the exponential and logarithmic concepts, *American Mathematical Monthly, 20*(1), 5-14.

Dennis, A.(1996). Justifying and proving in the mathematics classroom, *Philosophy of Mathematics Education Newsletter, 9*.

Eves, H.(1960). *An Introduction to the history of mathematics*. New York: Rinehart and company, inc.

Glasersfeld, E.(1995). 급진적 구성주의, 김판수, 박수자, 심성보, 유병길, 이형철, 임채성, 허승희 역, 서울 : 원미사.

Harel, G., & Sowder, L.(1998). Type of students' justification. *Mathematics Teacher, 91*(8), 670-675.

Hackenberg, A. J. (2009). *Relationships between students' fraction knowledge and equation solving*. Paper presentation at the Research Pre-session of the annual conference of the National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C.

Klein, F.(1924). Elementary mathematics from an advanced standpoint. New York: Dover Publications.

Knuth, E. J., & Elliott, R. L. (1998). Characterizing students' understanding of mathematical proof. *Mathematics Teacher, 91*(8), 714-717.

Maor, E.(1994). *e : the story of a number*. 허민 (역) (2000). 오일러가 사랑한 수 e. 서울: 경문사.

Samandeni, Z.(1984). Action proof in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the Learning of Mathematics, 4*(1), 32-34.

# A Study on the Process of Constructing the Instantaneous Rate of Change of Exponential Function $y=2^x$ at $x=0$ Based on Understanding of the Natural Constant $e$

Lee, Dong Gun (Moonjung High School)
Yang, Seong Hyun (Korea Institute for Curriculum and Evaluation)
Shin, Jaehong (Korea National University of Education)

Through the teaching experiments, we investigated a series of processes for obtaining the differential coefficient at $x=0$ of the exponential function $y=2^x$ based on the process of constructing the natural constant $e$ and the understanding of it. and all of the students who participated in this study were students who had no experience of calculating the derivative of the exponential function. The purpose of this study was not to generalize the responses of students but to suggest implications for mathematical concept mapping related to calculus by analyzing various responses of students participating in experiments. It is expected that the accumulation of research data derived in this kind of research on the way of understanding and composition of learners will be an important basic data for presenting the learning model related to calculus.

* Key Words : natural constants(자연상수), limit(극한), exponential function(지수함수), justification(정당화), distance function(거리함수), speed function(속력함수)

논문접수 : 2017. 2. 5
논문수정 : 2017. 3. 2
심사완료 : 2017. 3. 7