

개발단계의 제품 인증을 위한 베이지언 2단계 신뢰성 실증시험의 통계적 설계

서순근[†]

동아대학교 산업경영공학과

A Statistical Design of Bayesian Two-Stage Reliability Demonstration Test for Product Qualification in Development Process

Sun-Keun Seo

Department of Industrial & Management Systems Engineering, Dong-A University

In order to demonstrate a target reliability with a specified confidence level, a new two-stage Bayesian Reliability Demonstration Test (RDT) plans that is known to be more effective than a corresponding single-stage one is proposed and developed by Bayesian framework with beta prior distribution for Weibull life time distribution. A numerical example is provided to illustrate the proposed RDT plans and compared with other non-Bayesian and Bayesian plans. Comparative results show that the proposed Bayesian two-stage plans have some merits in terms of required and expected testing time and probability of acceptance.

Keywords: Bayesian Approach, Reliability Demonstration Test, Two-Stage Test, Weibull Distribution, Zero or One Failure Test

1. 서론

신제품 개발 및 설계단계에서는 일련의 TAAF(Test, Analyze and Fix) 활동에 따른 신뢰성 척도의 개선 현상을 통해 제품 신뢰도를 예측하는 신뢰도 성장시험(Reliability Growth Test : RGT)과 목표 신뢰도의 충족여부를 판정하는 신뢰성 실증시험(Reliability Demonstration or Substantiation Test : RDT) 등이 현업에서 널리 쓰인다. RDT, RGT 및 가속시험 등을 포함한 신뢰성 시험에 관한 국내 연구동향은 Yum *et al.*(2014)을 참조하면 된다.

본 논문의 대상으로, 개발된 원형이나 시제품에 관한 설계 부합도 또는 양산 제품의 우수성을 신뢰성 관점에서 평가하는 신뢰성 실증시험은 소수의 시험단위만 투입할 수 있으며, 또한 상당한 비용을 발생시킨다. 기업이나 신뢰성 평가기관에서는

적은 비용으로 이를 입증하기 위해 어느 정도의 표본크기로, 목표 설계수명의 몇 배 정도까지 시험시간을 설정해야 하는가가 관심의 초점이 된다. 특히 신제품 개발단계에서는 시험에 투입할 수 있는 표본크기가 극히 한정되어 있으므로 RDT의 실용적인 시험계획 도출과 이의 통계적 특성은 매우 중요하다.

대부분의 RDT는 합격과 불합격으로 판정하며, 구체적 시험법에는 표본크기, 시험시간, 시험조건, 시험장비 등이 규정된다.

신뢰성 실증시험에서 기본적인 무고장시험(자동차 업계에서는 'bogey test'로 명명되며(Wasserman, 2003), 여기서는 기본 보기시험으로 칭함)은 미리 정해진 크기의 표본으로 목표 수명기간 동안 시험하여 하나의 고장이라도 발생하지 않으면 요구되는 신뢰도 요건을 충족한다고 판정한다. 이 시험법은 시험에 투입되는 표본크기를 최소화할 수 있으며, 고장개수

이 논문은 동아대학교 교내연구비 지원에 의하여 연구되었음.

[†] 연락처 : 서순근 교수, 49315 부산광역시 사하구 낙동대로 550번길 37번지 동아대학교 공과대학 기계·산업경영공학부 산업경영공학과,

Tel : 051-200-7693, Fax : 051-200-7697, E-mail : skseo@dau.ac.kr

2016년 10월 28일 접수; 2017년 1월 12일 수정본 접수; 2017년 2월 2일 게재 확정.

가 이항분포를 따르므로 어떤 수명분포일 경우라도 적용할 수 있다. 무고장 시험 중에서 기본 보기시험의 표본크기를 줄이기 위해 시험시간을 목표수명의 배수로 설정하는 확장 보기 시험(extended bogey test)이 널리 쓰이며, 이런 무고장 시험은 생산자에게 불리하다고 여겨져 1-고장 허용 시험 등이 대안으로 채택되고 있다(Abernethy, 2004; Seo, 2011).

그러나 무고장 시험방식을 채택할 경우에 고장이 하나 발생하면 그때 1-고장 허용 방식으로 바꾸어 RDT를 실시하는 경우를 종종 볼 수 있는데(Sarakakis, 2011), 이런 오용을 방지하고 1-고장 허용 시험방식의 장점을 수용하기 위해 미리 1단계의 시험시간(또는 표본크기)을 정하고 그 결과에 따라 2단계로 이행하는 2단계 시험방식이 개발되어 있다.

실증시험계획 중에서 한 단계 만에 실증여부를 판정하는 시험계획은 Wasserman(2003)과 Abernethy(2004)에서 자세히 다루고 있으며, 2단계 시험계획으로는 주어진 시험시간 하에서 두 단계의 표본크기를 설정하는 Wang and Lu(1992)와 주어진 표본크기 하에서 각 단계에 배분된 소비자 위험률을 고려하여 두 단계의 시험시간을 설정하는 Kwon(2006)의 연구가 있다. 특히 Seo(2011)는 무고장 시험방식에 비해 상당히 긴 시험시간이 요구되는 1-고장 허용 방식의 단점을 경감하기 위해 실증기준 하의 기대 시험시간을 최소화하는 두 단계의 시험시간을 설정하는 시험계획을 개발하였다. 그러나 이런 2단계 시험계획이 원래 시험 형태는 계량형이지만 시험의 판정을 계수형으로 하고 있는 약점을 보완하기 위해 Seo(2015)는 계수-계량형 성격을 혼합한 2단계 시험계획을 개발하였다. 또한 Guo and Liao(2012)도 이런 계수형 시험계획은 모든 단위가 고장이 나는 경우에 사용할 수 없으므로 고장시간에 기반한 1단계 계량형 RDT의 방법론을 소개하고 계획정보와 실증요건이 같다면 두 RDT는 유사하게 수행될 수 있음을 보여 주고 있다. 최근에 수명정보보다 열화정보를 이용하는 RDT 시험계획도 제안되고 있다(Yang, 2009; Yang, 2013).

한편 와이블 분포를 따를 때 형상모수를 알고 있다고 가정하는 전술된 RDT 시험계획과 달리 McKane *et al.*(2006)은 이런 가정 없이 (대수)-위치-척도 수명분포 하에서 제 2종 관측중단 시험방식을 채택할 경우에 RDT의 표본크기와 고장개수를 구할 수 있는 방법론과 도표를 제공하였지만 현업에서의 활용도는 높지 않다.

보통 신뢰성 시험의 설계와 분석 시에 한정된 표본에 대한 시험정보만을 활용하고 있는데, 이와는 달리 당해 시험외의 다른 여러 정보를 수용할 수 있는 베이저언 접근법(Bayesian approach)은 신뢰도 추정법이나 시험계획의 설정에 상당히 유용하다(Meeker and Escobar, 1998; Hamada *et al.*, 2008). 예를 들면 자동차 부품 회사는 신차용 부품을 개발할 때 단지 소수 시제품의 시험정보만 이용할 수 있는 한계가 있을 때, 베이저언 접근법을 통하면 기존의 (유사) 생산품의 시험실적 자료나 방대한 사용현장 자료를 활용하고 있다. 이런 정보와 더불어 공학적 지식도 베이저언 접근법에서 신뢰도 등에 대한 사전분

포(prior distribution)의 설정할 때 도움이 된다.

베이저언 접근법을 RDT에 도입한 연구로는 지수 수명분포를 따를 때 사전분포로 감마분포를 채택하여 베이저언 무고장 실증시험계획을 개발한 Martz and Waller(1979), 베타와 역감마(inverted gamma) 사전분포를 포함하여 여러 베이저언 실증시험계획을 다룬 Kececioglu(1994), 베타분포를 사전분포로 가정하고 63.2%의 신뢰수준을 적용한 Beyer and Lauster(1990)과 더불어 이들의 방법론을 비베이저언 접근법으로 확장한 Zhang and Geiger(2015) 등이 있다.

또한 이항분포를 채택하는 기본 보기시험을 적용할 경우 Kleyner *et al.*(1997)은 균일분포와 베타분포의 혼합분포(mixture)를 목표 신뢰도에 관한 사전분포로 규정하면서 기존 제품과의 유사성을 고려한 지식인자(베타분포의 가중치) ρ 를 도입하여 두 분포를 가중 평균하는 실용적 방법을 제안하였다. 이를 토대로 Kleyner *et al.*(2015)은 설계변경에 의해 실증시험을 재실시해야 될 경우에 표본크기를 줄일 수 있는 베이저언 접근법을 제안하였다.

따라서 본 논문은 먼저 와이블 수명분포를 대상으로 제 2장에서 관련 실증시험 방식을 고찰하며, 제 3장에서 먼저 베이저언 실증시험을 개괄하고, 무고장과 1-고장 허용 시험방식의 단점을 절충한 2단계 실증시험방식에 베이저언 접근법을 도입한 새로운 실증시험계획을 제안하며, 제 4장에서 수치예제를 통해 이의 특성을 기 개발된 비베이저언과 베이저언 실증시험계획과 비교한다. 마지막으로 제 5장에서 논문의 성과를 요약한다.

2. 실증시험방식

신뢰성 실증시험은 특정 신뢰수준(CL)에 대해 신뢰도(R)가 주어진 기준을 초과하였는지를 실증하기 위한 신뢰성 시험으로, 신뢰도 기준은 모수, 신뢰도, B수명(분위수) 등 여러 가지가 쓰인다. 예를 들면, 신뢰도 기준이 분위수인 $t_q(B_{100q}$ 수명)로 규정될 경우 t_0 를 t_q 의 목표수명, t_q 를 t_q 에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간의 하한이라고 할 때 $t_q > t_0$ 이면, $t_q > t_0$ 는 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰수준에서 성공임을 실증하는 셈이 된다(Meeker and Escobar, 1998). 또는 $R(t_0)$ 를 t_0 에서의 신뢰도 $R(t_0)$ 에 대한 $100(1-\alpha)\%$ 신뢰구간의 하한이라고 할 때 $R(t_0) > R_0 = 1-q$ 이면 주어진 수준에서 실증시험을 통과하게 된다. 이와 같은 신뢰성 실증시험방식이 국내 신뢰성 규격의 전형적인 신뢰성 인증 시험법이 되고 있다. 여기서는 이렇게 규정된 실증시험을 $R100R_0/CL100(1-\alpha)$ 로 표기한다.

$R100R_0/CL100(1-\alpha)$ 실증시험 계획은 시험시간을 먼저 정하고 필요 표본크기를 설정하는 시험계획과 역으로 표본크기를 정한 후에 필요 시험시간을 설정하는 시험계획으로 구분할 수 있는데, 보통 개발·설계단계에서는 시험제품의 수가

고가이거나 한정되어 있어 후자가 널리 쓰이므로 본 논문은 후자의 방식으로 한정한다. 또한 시험방식의 고장개수를 0, 1 개 허용, 다수 개 허용, 판정단계를 1, 2, 다회(순차 포함)로 구분할 수 있는데, 본 논문에서는 1개 허용, 2단계를 다루며 비교 목적으로 기준에 널리 쓰이는 무고장(0개)과 1단계 시험계획을 포함시킨다.

대상 수명분포는 가장 널리 쓰이는 와이블 분포이며, 특히 형상모수 β 는 대상 제품에 대한 과거자료, 유사제품, 다양한 정보원으로부터 유추할 수 있으므로 대부분의 RDT 계획과 같이 형상모수 값을 알고 있다고 가정한다. 즉, 수명 T 는 형상모수가 β 이고 척도모수가 η 인 와이블 분포(Weibull(β, η))를 따르면 T^β 는 평균이 θ 인 지수분포(Exp($\theta = \eta^\beta$))를 따름을 이용한다.

2.1 1단계 시험방식

2단계 시험방식과 비교하기 위해 먼저 1단계 시험방식을 간략하게 기술한다. 확장 보기시험 계획 중에서 최소 표본크기를 가지는 계획은 무고장 시험방식이 된다. 즉, n_0 개 단위를 t_{c0} 까지 시험하여 고장이 하나도 발생하지 않으면 합격시키는 시험방식으로 표본크기 n_0 또는 시험시간 t_{c0} 는 신뢰수준 $1 - \alpha$, t_0 에서의 신뢰도 R_0 또는 $B_{100(1-R_0)}$ 수명인 t_0 , 그리고 와이블 형상모수 β 에 의존한다.

만약 $N(t_{c0})$ 가 $t_{c0} = k_0 t_0$ (k_0 를 bogey 또는 lifetime 비율로 부르기도 함)까지 고장개수로 정의될 때 n_0 개 중에서 t_{c0} 동안 고장이 하나도 발생하지 않는다면 다음과 같은 조건을 만족해야 한다.

$$\Pr(N(k_0 t_0) = 0) = \exp[-n_0 (k_0 t_0 / \eta_0)^\beta] = R_0^{n_0 k_0^\beta} = \alpha \quad (1)$$

따라서 필요 시험시간 t_{c0} 또는 표본크기 n_0 은 한 쪽이 주어지면 다음과 같은 관계로부터 구할 수 있는데, 여기서는 후자의 경우를 다룬다.

$$n_0 k_0^\beta = \frac{\ln \alpha}{\ln R_0} \quad (2)$$

또한 n_0 가 주어질 때 1-고장 허용방식의 시험시간 $t_{c1} = k_1 t_0$ 은 다음을 만족하도록 수치적인 방법에 의해 구할 수 있다.

$$\Pr(N(k_1 t_0) \leq 1) = \alpha \quad (3)$$

2.2 2단계 시험방식

확장 보기시험은 실제 $B_{100(1-R_0)}$ 수명이 t_0 보다 상당히 높더라도 합격확률이 높지 않는 단점이 있으며 1-고장 허용시험은

시험시간이 전자보다 길어지는 약점을 가지고 있다(Seo, 2011). 본 논문에서 제안된 신뢰성 실증시험방식은 이런 단점을 보완하고 절충한 2단계로 구분되어 다음과 같이 수행된다.

<1단계>

$\tilde{k}t_0$ 동안 n_0 개를 동시에 시험하여 무고장이면($d_1 = 0$) 합격(즉, 실증)되고 두 개 이상 고장($d_1 \geq 2$)이 나면 불합격되며, 한 개만 고장이 나면($d_1 = 1$) 2단계로 넘어간다.

<2단계>

$n_1 = n_0 - 1$ 개를 kt_0 ($k > \tilde{k}$)까지 계속 시험하여 더 이상 고장이 나지 않으면($d_2 = 0$) 합격 시키며, 그렇지 않으면($d_2 \geq 1$) 불합격으로 처리된다.

이에 관한 시험방식이 <Figure 1>에 도시되어 있다.

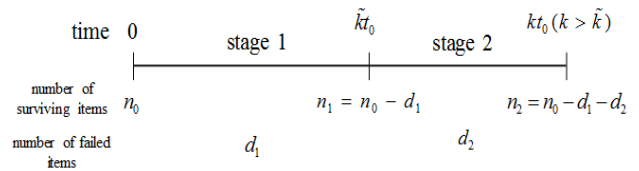


Figure 1. Outline of two-stage tests

3. 베이지언 2단계 시험계획의 통계적 설계

3.1 사전과 사후분포

베이지언 접근법은 순차적 과정으로 전개된다. 먼저 관심대상 모수의 사전분포가 설정된다면, 이때 사전분포의 모수는 이 분포의 평균, 분산, 이 외의 적률(moment) 등을 통해 추정 대상 신뢰성 척도에 대한 사전 지식을 보다 정확하게 반영할 수 있도록 규정된다.

확률변수 X 의 모수 θ 에 대한 사전 확률밀도함수를 $f_\theta(\theta)$ 라 나타내면 $X=x$ 로 주어질 때 θ 의 조건부 확률밀도인 사후 확률밀도함수는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$f_{\theta|X}(\theta|x) = \frac{f_{X,\theta}(x,\theta)}{f_X(x)} = \frac{f_\theta(\theta)f_{X|\theta}(x|\theta)}{f_X(x)} \quad (4)$$

베이지언 접근법은 과거 표본정보와 효율적인 결합을 할 수 있다. 보통 사전분포를 이와 관측된 정보가 결합된 사후분포가 모수만 다르지만 동일한 분포가 되도록 선택할 수 있는데, 이런 사전분포를 켈레 또는 공액(conjugate) 사전분포라 부른다. 즉, 이항분포일 때는 베타분포(Fitzgerald et al., 1999; Coolen and Coolen-Schrijner, 2006)를, 지수분포일 때 모수가 평균이면 감마분포(Martz and Waller, 1979), 고장률일 경우는 역감마(inverted gamma)분포(Fitzgerald et al., 1999; Ke, 2000; Kwon, 2014)가 켈레 사전분포로 채택되고 있다.

대상 모수를 t_0 시점의 신뢰도를 나타내는 확률변수 R 로 설정할 때 사전분포 $f_R(r)$ 는 켈레분포인 식 (5)의 베타분포($R \sim \text{Beta}(a, b)$)를 따른다고 가정한다.

$$f_R(r) = \frac{1}{B(a, b)} r^{a-1} (1-r)^{b-1}, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (5)$$

여기서, $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$, $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$

베타 사전분포의 두 상위모수(hyperparameter)를 $a = b = 1$ 로 균일분포로 설정하면 비정보적(noninformative) 사전분포로 나타낼 수 있으며, 이런 경우에도 기본 보기시험을 채택할 경우의 표본크기는 식 (2)에서 $k = 1$ 일 때의 n_0 보다 하나 줄어든다(Wasserman, 2003).

여기서 베타분포의 기댓값이 $a/(a+b)$ 인 점을 고려하면 신뢰도가 실증기준이 되므로 $a > b$ 인 경우가 주 대상이 될 수 있다. 즉, a 가 b 보다 상대적으로 커질수록 고 신뢰도에 대한 믿음이 큰 경우가 된다. a 와 b 를 설정하는 방법은 Kececioglu(1994), Kleyer *et al.*(1997), 사전 정보의 불확실성이나 유사성을 보정하는 Krolo and Bertsche(2003)와 Yates and Mosleh(2006) 등을 참조하면 된다.

먼저 1단계에서 합격할 사상을 $E_1 = \{d_1 = 0\}$ 로 두면 이 확률은

$$\Pr(E_1) = \int_0^1 \frac{r^{n_0} r^{a-1} (1-r)^{b-1}}{B(a, b)} dr = \frac{B(a+n_0, b)}{B(a, b)} \quad (6)$$

가 되므로 사후분포의 확률밀도함수는 켈레분포 형태(Beta($a+n_0, b$))로 다음과 같이 된다.

$$f(r | E_1) = \frac{r^{a+n_0-1} (1-r)^{b-1}}{B(a+n_0, b)}, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (7)$$

한편 베이지언 1단계 무고장 시험계획의 시험시간을 $k_0 t_0$ 로 두면 식 (7)로부터 사후분포는 Beta($a+n_0 k_0^\beta, b$)가 되므로 다음을 만족하도록 k_0 를 구할 수 있다.

$$\int_{R_0}^1 \frac{r^{a+n_0 k_0^\beta-1} (1-r)^{b-1}}{B(a+n_0 k_0^\beta, b)} dr = CL \quad (8)$$

<Figure 2>에는 $a = 2, b = 1$ 일 때 식 (8)로부터 구한 R90/CL90 베이지언 1단계 무고장 실증시험계획의 β 와 n_0 에 따른 k_0 가 도시되어 있는데, β 또는 n_0 가 커질수록 k_0 는 감소되고 있다.

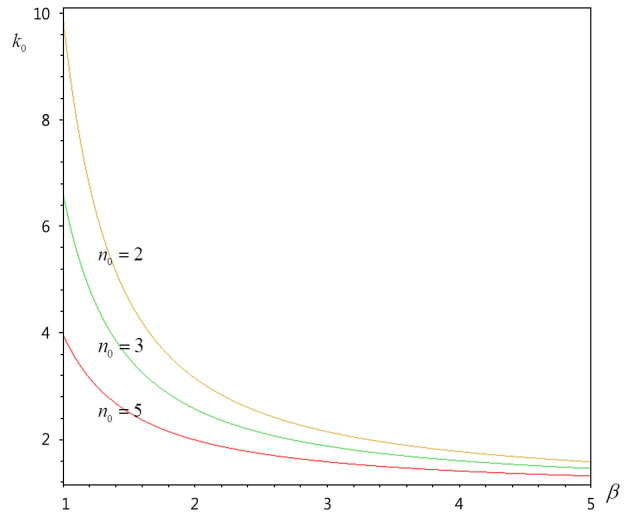


Figure 2. Bayesian zero-failure test plans : R90/CL90

상기와 같이 사후분포는 무고장 시험(기본과 확장 보기시험)을 채택하면 항상 베타분포가 된다. 하지만 2단계 RDT에서 시험시간이 $\tilde{k} t_0$ ($\tilde{k} \neq 1$)일 때 무고장이면 사후분포는 베타분포가 되지만, 고장이 발생하면 $\tilde{k} t_0$ 시점의 불신뢰도는 $1 - R_0^{\tilde{k}^\beta}$ 가 되어 베타분포가 되지 않는 점에 유의해야 한다. 따라서 베이지언 2단계 RDT에서 <Figure 1>의 \tilde{k} 는 '1'로 설정한다.

이에 따라 2단계 시험에서 2단계로 시험이 속행될 사상을 $E_2 = \{d_1 = 1\}$ 로 두면 이의 발생 확률은

$$\begin{aligned} \Pr(E_2) &= \int_0^1 \frac{n_0 r^{n_0-1} (1-r) r^{a-1} (1-r)^{b-1}}{B(a, b)} dr \\ &= \frac{n_0 B(a+n_0-1, b+1)}{B(a, b)} \end{aligned} \quad (9)$$

가 되므로, 사후분포는 Beta($a+n_0-1, b+1$)가 되어 확률밀도함수가 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} f(r | E_2) &= \frac{n_0 r^{a+n_0-2} (1-r)^b}{B(a, b)} \frac{B(a, b)}{n_0 B(a+n_0-1, b+1)} \\ &= \frac{r^{a+n_0-2} (1-r)^b}{B(a+n_0-1, b+1)}, \quad 0 \leq r \leq 1 \end{aligned} \quad (10)$$

또한 1단계인 t_0 까지 생존한 시험단위에 대한 잔여 신뢰도 $R(kt_0 | t_0)$ 는 식 (11)과 같이 되므로,

$$R(kt_0 | t_0) = \frac{R(kt_0)}{R(t_0)} = r^{k^\beta-1}, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad k > 1 \quad (11)$$

2단계로의 시험속행(E_2) 조건하에 2단계에서 합격할 사상($E_3 = \{d_2 = 0\}$)의 조건부 확률과 결합확률은 다음과 같이 된다.

$$\Pr(E_3 | E_2) = \int_0^1 \frac{r^{(k^\beta-1)(n_0-1)} r^{a+n_0-2} (1-r)^b}{B(a+n_0-1, b+1)} dr \quad (12)$$

$$= \frac{B(a+(n_0-1)k^\beta, b+1)}{B(a+n_0-1, b+1)}$$

$$\Pr(E_2 \cap E_3) = \frac{n_0 B(a+(n_0-1)k^\beta, b+1)}{B(a, b)} \quad (13)$$

따라서 이 경우의 사후분포는 다음과 같이 $\text{Beta}(a+(n_0-1)k^\beta, b+1)$ 가 된다.

$$f(r | E_2 \cap E_3) = \frac{r^{a+(n_0-1)k^\beta-1} (1-r)^b}{B(a+(n_0-1)k^\beta, b+1)}, \quad 0 \leq r \leq 1 \quad (14)$$

본 논문에서 제안된 RDT를 순차적으로 수행할 때 전술된 각 경우의 사후분포를 사전분포로 설정하여 다음 RDT 시험계획을 선택하는데 활용하면, 후속 시험의 시험시간이나 표본크기를 보다 줄일 수 있을 것이다.

3.2 사후 위험

비베이지언 RDT 계획의 설계 기준인 식 (1) 또는 식 (3)과 대응할 수 있는 베이지언 척도로 평균 위험(average risk)과 사후 위험(posterior risk) 등을 들 수 있는데, 후자가 보다 적절한 척도로 추천되고 있다(Hamada *et al.*, 2008). 전 소절의 결과로부터 이 시험방식이 실증하는 사후 소비자 위험(posterior consumer's risk)을 2단계로 구분하여 구할 수 있다.

먼저 1단계의 사후 실증확률 $\Pr(D_1)$ 은 식 (7)로부터

$$\Pr(D_1) = \int_{R_0}^1 f(r | E_1) dr = \int_{R_0}^1 \frac{r^{a+n_0-1} (1-r)^{b-1}}{B(a+n_0, b)} dr \quad (15)$$

가 되며, 2단계의 사후 실증확률은 $\Pr(D_2 \cap D_1^c)$ 는 식 (14)로부터 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \Pr(D_2 \cap D_1^c) &= \int_{R_0}^1 f(r | E_2 \cap E_3) dr \\ &= \int_{R_0}^1 \frac{r^{a+(n_0-1)k^\beta-1} (1-r)^b}{B(a+(n_0-1)k^\beta, b+1)} dr \end{aligned} \quad (16)$$

따라서 2단계 실증시험의 사후 실증확률을 구하면 $\Pr(D_1) + \Pr(D_2 \cap D_1^c)$ 가 되므로 사후 소비자 위험은 $\Pr(D_1^c)1 + \Pr(D_2^c \cap D_1)$ 가 된다.

3.3 베이지언 2단계 시험계획

2단계 실증시험 계획은 n_0, R_0, α 가 주어진 조건하에서 a 와 b 가 규정되면

$$\Pr(D_1) + \Pr(D_2 \cap D_1^c) = 1 - \alpha \quad (17)$$

이 되는 $k (> 1)$ 를 구하는 문제로 정식화 할 수 있다. 따라서 이 시험계획은 다음과 같이 변형할 수 있으며, 사후 소비자 위험률을 α 이하로 제어하는 셈이 된다.

$$\Pr(D_1^c) + \Pr(D_2^c \cap D_1) = \alpha$$

따라서 이 문제는 먼저 $\Pr(D_1) = \int_{R_0}^1 f(r | E_1) dr$ 을 구한 후에

$$\Pr(D_2 \cap D_1^c) = \int_{R_0}^1 f(r | E_2 \cap E_3) dr = \alpha - \Pr(D_1)$$

를 만족하는 k 를 구하는 비선형 적분방정식 문제가 되므로 수치해법으로 이를 구할 수 있다.

이런 절차로 베이지언 무고장 시험에서 $k_0 > 1$ 이 되는 $n, \beta, a, b, R_0, 1 - \alpha$ 의 조합의 일부분에 대해 k 를 구해 <Table 1>에 정리하였다. 이를 보면 사전분포의 기댓값($a/(a+b)$) 또는 형상모수가 커짐에 따라 k 는 감소하며, 목표 신뢰도와 신뢰수준에 따른 k 의 경향도 증가할 것이라는 직관적 판단과 일치한다.

또한 2단계 시험계획의 기대 시험시간은 R 이 R_0 일 때 식 (9)를 이용하면 $[1 \cdot (1 - \Pr(E_2)) + k \Pr(E_2)]t_0$ 가 되며, R 이 확률적으로 변할 경우도 구할 수 있다.

4. 적용 예

수명이 형상모수 $\beta = 2.0$ 인 와이블 분포를 따르는 자동차 기계 부품의 60,000사이클(t_0)에서 의 신뢰도가 각각 0.90과 0.97 이상 이 되도록 신뢰수준 90%에서 5개 시험단위로 2단계 실증시험을 실시하고자 한다(즉, R90/CL90과 R97/CL90 시험계획).

사전분포를 $\text{Beta}(2, 1)$ 로 규정하여 <Table 1>로부터 얻은 시험계획이 <Table 2>에 정리되어 있다. R90/CL90일 경우를 예시 하면 2단계 시험계획은 60,000사이클로 시험하여 무고장이면 합격, 2개 이상 고장이면 불합격, 1개 고장이면 $0.58 \cdot 60,000 = 34,800$ 을 추가적으로 시험하여 더 이상 고장이 없으면 합격시키고 그렇지 않으면 불합격시킨다.

또한 <Table 2>에는 개발된 시험계획과 비교하기 위해 비베이지언 접근법으로 구한 무고장, 1-고장 허용, 2단계 시험계획과 베이지언 무고장 시험계획도 포함되어 있다. 여기서 두 종의 베이지언 시험계획에는 가장 정보가 적은 경우인 균일분포($\text{Beta}(1, 1)$)일 경우도 추가되어 있다. 이를 보면 베이지언 시험계획이 대응되는 비베이지언 시험계획보다 시험시간이 단축됨을, 베이지언 2단계 시험계획의 기대 시험시간이 무고장 시험계획보다 작음을 확인할 수 있다.

Table 1. Bayesian two-stage RDT plans

n_0	a	b	β	R90/CL90	R90/CL70	R97/CL90	R97/CL70
2	1	1	1	18.76	1.28	99.66	66.47
			1.5	7.06	5.35	21.50	16.41
			2	4.33	3.52	9.98	8.15
			3	2.66	2.31	4.64	4.05
			5	1.80	1.65	2.51	2.31
	2	1	1	15.21	9.40	92.69	62.12
			1.5	6.14	4.45	20.48	15.68
			2	3.90	3.07	9.63	7.88
			3	2.48	2.11	4.53	3.96
			5	1.72	1.57	2.47	2.28
	4	1	1	9.45	4.16	80.92	54.14
			1.5	4.47	2.59	18.71	14.31
2			3.07	2.04	9.00	7.36	
3			2.11	1.61	4.33	3.78	
5			1.57	1.33	2.41	2.22	
3	1	1	1	8.10	5.20	46.84	31.56
			1.5	4.63	3.00	12.99	9.99
			2	2.85	2.28	6.84	5.62
			3	2.01	1.73	3.26	3.16
			5	1.52	1.39	2.16	1.99
	2	1	1	6.58	3.84	43.75	29.51
			1.5	3.51	2.45	12.42	9.55
			2	2.56	1.96	6.61	5.43
			3	1.87	1.57	3.52	3.09
			5	1.46	1.31	2.13	1.97
	4	1	1	4.00	1.39	38.41	25.72
			1.5	2.52	1.24	11.39	8.71
2			2.00	1.18	6.20	5.07	
3			1.59	1.11	3.37	2.95	
5			1.32	1.07	2.07	1.91	
5	1	1	1	3.11	1.79	20.98	14.28
			1.5	2.13	1.47	7.61	5.89
			2	1.76	1.34	4.58	3.78
			3	1.46	1.21	2.76	2.43
			5	1.25	1.12	1.84	1.70
	2	1	1	2.50	1.19	19.71	13.36
			1.5	1.84	1.12	7.30	5.63
			2	1.58	1.09	4.44	3.66
			3	1.36	1.07	2.70	2.37
			5	1.20	1.04	1.82	1.68

Table 2. R90/CL90 and R97/CL90 RDT plans : multiples of 60,000 cycles

target reliability	non-Baysian			Bayesian			
	zero-failure	zero or one failure	two-stage	zero-failure		two-stage	
				Beta (1, 1)	Beta (2, 1)	Beta (1, 1)	Beta (2, 1)
0.90	2.09	2.88	2.24/3.18 (2.47 ¹⁾)	2.04	1.99	1/1.76 (1.12)	1/1.58 (1.16)
0.97	3.89	5.37	4.17/5.91 (4.60)	3.86	3.84	1/4.58 (1.01)	1/4.44 (1.02)

1) Expected test times of two-stage test plans at target reliability.

그리고 베이저언 2단계 시험계획의 사후 합격확률 $P_a(r)$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$P_a(r) = \Pr(D_1 | R_0 = r) + \Pr(D_2 \cap D_1^c | R_0 = r), \quad (18)$$

$$R_0 \leq r \leq 1$$

이를 이용하여 구한 베이저언 2단계 실증시험계획(R90/CL90)의 사후 합격확률을 베이저언 무고장 시험계획 비교한 그림이 <Figure 3>인데, r 이 R_0 보다 커질수록 전자의 합격확률이 후자보다 꽤 높아 2단계 실증시험의 유용성을 보여 주고 있다. 만약 이 실증시험에서 1단계에서 고장이 하나 발생하여 2단계로 넘어가 최종적으로 합격이 되었다면 이 경우의 사후분포가 식 (14)로부터 Beta(11.99, 2)가 되므로, 원형 개선이나 설계 변경에 의해 개발된 제품에 대해 실증시험계획을 설정할 때 사전분포로 활용할 수 있을 것이다.

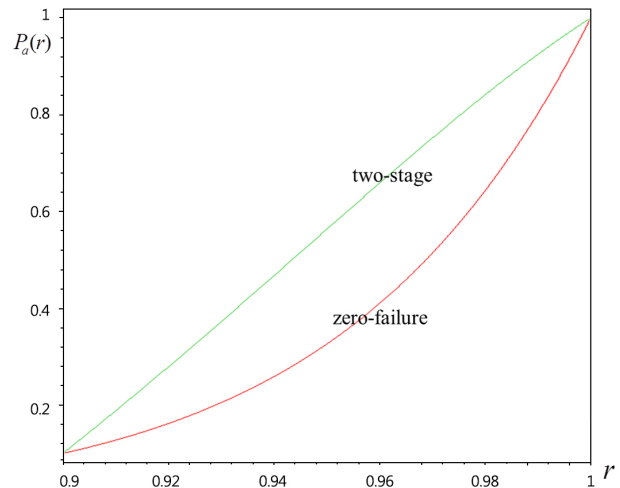


Figure 3. Acceptance probabilities of Bayesian test plans : R90/CL90

5. 결론

본 논문에서는 개발·설계와 양산단계에서 신뢰성 평가나 보증을 위해 널리 쓰이는 무고장 신뢰성 실증방식보다 합격(실증)확률 측면에서 우수하면서 기대 시험시간을 줄일 수 있는 새로운 베이저언 2단계 시험계획을 제안하였다. 와이블 수명 분포를 대상으로 목표 신뢰도를 특정 신뢰수준으로 보증하는 실증시험방식에서 베타분포를 사전분포로 채택하여 무고장과 1-고장 허용 시험방식의 장점(또는 단점)을 절충한 2단계 실증시험 방식에 베이저언 접근법을 도입한 새로운 실증시험계획을 개발하였다. 또한 개발된 베이저언 2단계 시험계획의 특성을 기 개발된 비베이저언과 베이저언 실증시험계획과 비교하였다.

그리고 제시된 2단계 시험계획을 비베이저언 1단계와 2단계 시험계획과 베이저언 1단계 무고장 시험계획을 예제를 통해 비교

하여 제시된 2단계 시험계획의 우수성을 예증하였다. 하지만 컬레분포의 장점을 살리기 위해 도출된 시험계획의 1단계 시험시간을 t_0 로 고정한 점을 개선할 수 있는 후속 연구가 필요하다.

따라서 본 논문에서 개발된 축적된 관련정보나 전문가의 의견을 활용하는 베이지언 2단계 실증시험계획은 우리나라 신뢰성 규격의 표준 시험계획으로 채택되고 있는 무고장 시험방식의 대안으로 널리 활용될 수 있을 것이며, 베이지언 접근법을 채택한 연구가 그리 많지 않은 우리나라 신뢰성시험 분야의 학문적 관심을 촉진하는 계기가 될 수 있을 것이다.

참고문헌

- Abernethy, R. B. (2004), *The New Weibull Handbook*, 5th ed., Published by R. B. Abernethy, North Palm Beach, USA.
- Beyer, R. and Lauster, E. (1990), Statistische Lebensdauerprüfpläne Bei Berücksichtigung von Vorkenntnissen, *Qualität und Zuverlässigkeit*, **35**(2), 93-98.
- Coolen, F. P. A. and Coolen-Schijner, P. (2006), On Zero-Failure Testing for Bayesian High-Reliability Demonstration, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O : Journal of Risk and Reliability*, **220**(1), 35-44.
- Fitzgerald, M., Martz, H. F., and Parker, R. L. (1999), Bayesian Single-Level Binomial and Exponential Reliability Demonstration Test Plans, *International Journal of Reliability Quality and Safety Engineering*, **6**(2), 123-137.
- Hamada, M. Wilson, A., Reese, S., and Martz, H. (2008), *Bayesian Reliability*, Springer, New York, USA.
- Guo, H. and Liao, H. (2012), Methods of Reliability Demonstration Testing and Their Relationships, *IEEE Transactions on Reliability*, **61**(1), 231-237.
- Ke, H.-Y. (2000), A Bayesian/Classical Approach to Reliability Demonstration, *Quality Engineering*, **12**(3), 365-370.
- Kececioglu, D. B. (1994), *Reliability & Life Testing Handbook*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, USA.
- Kleyner, A., Bhagath, S., Gasparani, M., Robinson, J., and Berder, M., (1997), Bayesian Techniques to Reduce the Sample Size in Automotive Electronics Attribute Testing, *Microelectronics Reliability*, **37**(6), 879-883.
- Kleyner, A., Elmore, D., and Boukai, B. (2015), A Bayesian Approach to Determine Test Sample Size Requirements for Reliability Demonstration Retesting after Product Design Change, *Quality Engineering*, **27**(3), 289-295.
- Krolo, A. and Bertsche, B. (2003), An Approach for the Advanced Planning of a Reliability Demonstration Test Based on a Bayes Procedure, *Reliability and Maintainability Symposium (RAMS) Proceedings*, 288-294.
- Kwon, Y. I. (2006), A Two-Stage Reliability Demonstration Test for Mechanical Components, *Journal of the Korean Society for Quality Management*, **34**(1), 20-26.
- Kwon, Y. I. (2014), Design of Bayesian Zero-Failure Demonstration Test for Products with Weibull Lifetime Distribution, *Journal of Applied Reliability*, **14**(4), 220-224.
- Martz, H. F. Jr. and Waller, R. A. (1979), A Bayesian Zero-Failure (BAZE) Reliability Demonstration Testing Procedure, *Journal of Quality Technology*, **11**(3), 128-138.
- McKane, S. W., Meeker, W. Q., and Escobar, L. A. (2005), Sample Size and Number of Failure Requirements for Demonstration Tests with Log-Location-Scale Distributions and Failure Censoring, *Technometrics*, **47**(2), 182-192.
- Meeker, W. Q. and Escobar, L. A. (1998), *Statistical Methods for Reliability Data*, John Wiley & Sons, New York, USA.
- Sarakakis, G., Gerokostopoulos, A., and Mettas, A. (2011), Special Topics for Consideration in a Design for Reliability Process, *Reliability and Maintainability Symposium (RAMS) Proceedings*, 6.
- Seo, S.-K. (2011), Statistical Design of Two-Stage Reliability Demonstration Tests, *Journal of the Korean Society for Quality Management*, **39**(2), 313-319.
- Seo, S.-K. (2015), Development of Mixed Reliability Demonstration Test Plans, *Journal of Applied Reliability*, **15**(3), 170-175.
- Wang, C. J. and Lu, M. W. (1992), A Two-Stage Sampling Plan for Bogey Tests, *Quality and Reliability Engineering International*, **8**(1), 29-35.
- Wasserman, G. S. (2003), *Reliability Verification, Testing, and Analysis in Engineering Design*, Marcel Dekker, New York, USA.
- Yang, G. (2009), Methods of Reliability Demonstration Through Degradation Bogey Testing, *IEEE Transactions on Reliability*, **58**(4), 604-610.
- Yang, G. (2013), Heuristic Degradation Test Plans for Reliability Demonstration, *IEEE Transactions on Reliability*, **62**(1), 305-311.
- Yates, S. W. and Mosleh, A. (2006), A Bayesian Approach to Reliability Demonstration for Aerospace Systems, *Reliability and Maintainability Symposium (RAMS) Proceedings*, 611-617.
- Yum, B.-J., Seo, S.-K., Yun, W. Y., and Byun, J.-H. (2014), Trends and Future Directions of Quality Control and Reliability Engineering, *Journal of the Korean Institute of Industrial Engineers*, **40**(6), 526-554.
- Zhang, J. and Geiger, C. (2015), Leveraging Prior Knowledge into Life Test Design, *Reliability and Maintainability Symposium (RAMS) Proceedings*, 5.