

적합 직교 분해와 그 응용: 파라메트릭 차수 축소 모델

Proper Orthogonal Decomposition and Its Applications: Parametric Reduced Order Models

1. 머리말

2000년대 초, 컴퓨터의 급속한 발달에 힘입어, 유한요소 기반의 수치 해석 방법은 기계, 토목, 건축, 항공 등의 여러 분야에 걸쳐 다양한 공학적 문제 해결에 널리 활용되어 왔다. 특히, 컴퓨터를 이용한 모델링이 더욱 정교해지고 복잡해짐에 따라서, 대형 구조체의 정확하고 효율적인 해석과 최적 설계에 대한 수요는 끝없이 증가하고 있는 추세이다. 이에 수백~수천만 자유도에 이르는 구조 해석뿐만 아니라, 유체-고체 연성, 음향-고체 연성 등의 여러 다물리(multi-physics) 문제들의 해결이 가능해 졌지만, 대형 시스템의 구조 최적 설계 문제는 여전히 방대한 양의 계산을 필요로 하며, 특히 다자유도 문제의 동적, 또는 비선형 구조의 최적 설계는 많은 양의 전산자원을 필요로 하기 때문에 실질적인 수행이 쉽지 않은 상황이다.

이와 같이 시스템은 커지고 다루어야 하는 데이터나 변수의 양 자체가 많아지는 상황에서 내가 원하는 것만을 빠르고 정확하게 확인할 수 있는 방법은 아주 매력적일 것이다. 예를 들어 대형 시스템의 경우에도 모든 상황과 위치에서 모든 변수 값을 다 확인하는 것은 오히려 비효율적인 작업이라고 볼 수 있다. 주어진 하중에서만 유효한 결과, 또는 특정 위치에서만 필요한 데이터 등과 같이 목적에 부합하는 결과를 선택적으로 볼 수 있는 방법이 있다면 대형 시스템의 전산자원 문제에 대한 부담이 많이 줄어들 수 있을 것이다.

차수 축소 모델(reduced order model)은 대형 시스템 해석/설계에서 발생하는 문제를 해결하기 위한 가장 효과적인 방안이다. 차수 축소 모델의 가장 중요한 특징은 ‘복잡한 여러 결과 중에서) 내가 원하는 것을 쉽게 볼 수 있도록’ 모델을 만드는 것이라고 할 수 있다. 즉, 불필요한 결과들은 제외하고 필요한 내용만 볼 수 있도록 모델을 구축하면 결과를 빨리 확인할 수 있을 것이며, 효율이 높아질 것이다. 혹자는 전체 모습을 보고싶어 할 수도 있고, 또 다른 누군가는 아주 작은 일부가 궁금할 수도 있을 것이다. ‘나무를 보지 말고 숲을 보라’는 말이 있지만, 때로는 다른 모든 부분은 제외하고 나무 하나만을 유심히 관찰할 필요도 있기 때문이다.

당연히 얻는 것이 있으면 잃는 것도 있겠다. 축소 모델을 사용하는 과정에서 제한이 되는 부분은 바로 불필요하다고 생각했던 결과들이 필요해질 경우, 처음부터 다시 시작해야 한다는 점이다. 즉, 축소 모델을 다시 만들어야 한다(근래에는 이러한 축소 모델의 한계를 극복하기 위한 연구 또한 다양하게 시도되고 있



이 재 훈

경남대학교 기계공학부 조교수

다). 하지만 요지는 대형 시스템문제를 효율적으로 해결하는 솔루션이 바로 차수 축소 모델이라는 것이다.

모델 축소에 대한 연구는 유한요소법에 대한 연구와 그 역사를 같이 한다. 그만큼 오랜 기간동안 연구되었기 때문에 많은 방법들이 존재하지만 근래에 가장 많이 사용하는 방법은 바로 적합 직교 분해(proper orthogonal decomposition, POD)일 것이다. 본 기사에서는 적합 직교 분해에 대해 알아보고, 간단한 예시를 통해서 계산을 수행해 볼 것이다. 이어서 적합 직교 분해를 이용한 차수 축소 모델에 대해 살펴보고, 일반적으로 사용해오던 동적 시스템의 축소 모델이 아닌, 파라미터에 따른 축소 모델을 구축하는 방법에 대해 정리해 볼 것이다.

2. 적합 직교 분해의 계산과 의미

적합 직교 분해는 1940년대에 Karhunen, Kosambi, Love, Obukhov, Pougachev가 각각 개별적으로 제안한 방법으로, POD는 ‘카루넨-루베 분해(Karhunen-Love decomposition, KLD)’으로도 불리며, 유한 차원으로 제한할 때는 ‘주성분 분석(principal component analysis; PCA)’과도 동일한 방법이다.^{1,2)} 좀 더 엄밀히 말하자면, POD가 적용되는 분야에 따라서 각각 다른 명칭으로 불려졌다고 볼 수 있겠다. 이를테면, 통계 분야에서는 주성분분석, 해양 및 기상학 분야에서는 ‘선택적 직교함수(empirical orthogonal function)’, 심리학과 경제학에서는 ‘인자 분석(factor analysis)’ 등의 표현으로 사용되어 왔다. 특히, 꼭 언급해야 할 방법으로는 선형 대수학에서 배우는 ‘특잇값 분해(singular value decomposi-

tion, SVD)’이다. 간략히 표현하자면, 유클리드 공간에서의 POD는 SVD와 같은 의미이다.²⁾ 따라서, 필드 변수가 유클리드 공간에서 표현되는 구조역학 문제에 POD를 적용하기 위해서는 일단 SVD를 계산하면 되는 것이다(MATLAB에서는 ‘svd’, 또는 ‘svds’ 함수를 사용하면 된다).

POD의 의미와 특성을 좀 더 자세히 살펴보기 위해서 다음과 같이 성분이 0과 1로 이루어진 5 × 3 행렬을 이용한 간단한 SVD 계산을 수행해보기로 한다.

$$X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

위 행렬의 랭크는 3이며, 랭크 1과 2의 최적 근사 행렬을 계산해보는 것이 목적이다. 행렬 X_0 에 SVD를 적용하면 다음과 같이 좌특이행렬 Φ , 특잇값 행렬 Σ , 우특이행렬 A 를 얻을 수 있다. 지면 관계상 Φ , A 행렬값은 생략한다.

$$X_0 = \Phi \Sigma A^T \quad (2)$$

여기서 각 행렬의 크기는,

$$\Phi \in R^{5 \times 5}, \Sigma \in R^{5 \times 3}, A \in R^{3 \times 3} \quad (3)$$

하지만 행렬 X_0 는 3개의 특잇값을 가지므로, 일반적으로

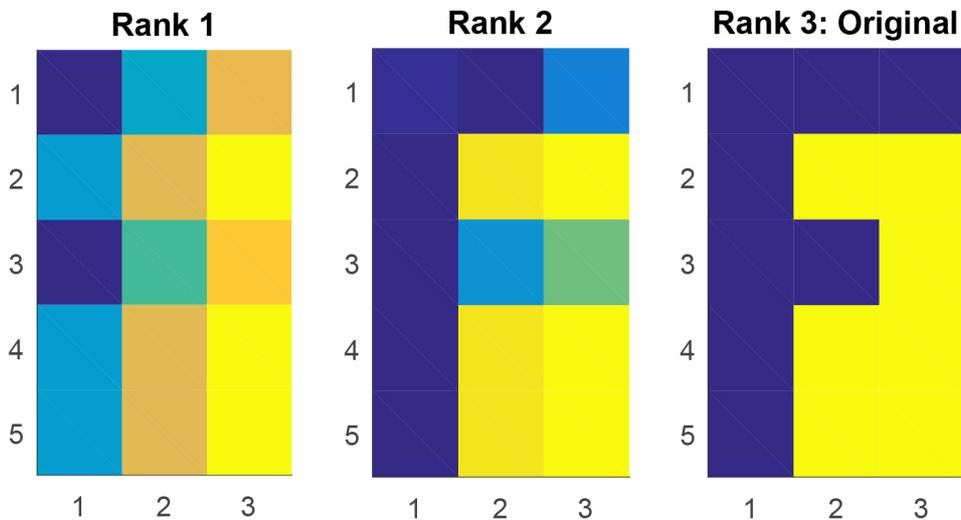


그림 1 SVD로 계산한 근사 행렬의 이미지

는 의미있는 형태의 약식 SVD(short form, 또는 thin SVD)를 사용한다.

행렬 X_0 의 특잇값 행렬 Σ 는 3개의 특잇값 $\sigma_1 = 2.518$, $\sigma_2 = 1.138$, $\sigma_3 = 0.605$ 를 대각항으로 가지므로, 행렬 X_0 의 이항 분해(dyadic decomposition) 표현은 다음과 같다.³⁾

$$X_0 = \sigma_1 \phi_1^T + \sigma_2 \phi_2^T + \sigma_3 \phi_3^T. \quad (4)$$

여기서 벡터 ϕ , \mathbf{a} 는 각각 좌특이행렬과 우특이행렬을 구성하는 열벡터로서 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \Phi &= [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_3], \\ \mathbf{A} &= [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3]. \end{aligned} \quad (5)$$

식 (4)에서 첫 번째 특잇값까지의 합이 랭크 1 최적 근사, 두 번째 특잇값까지 합이 랭크 2 최적 근사가 된다. 근사 행렬은 다음과 같이 얻어진다.

$$X_{r_1} = \sigma_1 \phi_1^T = \begin{bmatrix} 1.33 & 0.70 & 0.38 \\ 0.74 & 0.39 & 0.21 \\ 1.12 & 0.59 & 0.32 \\ 0.74 & 0.39 & 0.21 \\ 0.74 & 0.39 & 0.21 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$X_{r_2} = \sigma_1 \phi_1^T + \sigma_2 \phi_2^T = \begin{bmatrix} 0.98 & 1.17 & 0.76 \\ 0.99 & 0.05 & -0.06 \\ 1.04 & 0.70 & 0.41 \\ 0.99 & 0.05 & -0.06 \\ 0.99 & 0.05 & -0.06 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

랭크 3 최적 근사는 원래 행렬 X_0 와 같다.

$$X_{r_3} = X_0. \quad (8)$$

위의 근사 계산 결과의 의미를 살펴보기 위해서 각각 행렬을 그림 1과 같이 표시하였다. 그림 1에서 파란색은 1을 나타내고, 노란색은 0을 나타낸다. 행렬에서 1보다 크거나 0보다 작은 값은 각각 1과 0으로 근사하였으며, 1과 0 사이의 값들 따라서 두 색의 중간 색을 표현한다. 랭크 1 근사의 경우, 알파벳 F의 모양을 희미하게 띄는 것을 알 수 있으며, 랭크가 증가할수록 뚜렷한 F 모양으로 변하는 것을

확인할 수 있다. 여기서, X_{r_1} 과 X_{r_2} 는 각각, 랭크 1과 랭크 2를 가지는 행렬 중에서 X_0 와 ‘가장 근사한(best approximant)’ 행렬이다. 좀 더 엄밀히 말하자면, X_0 와 X_r 행렬 차에 대한 유도 놈(2-induced norm)을 최소화하는 랭크 1의 행렬이 바로 식 (6)의 X_{r_1} 이다. 이는 식으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$X_{r_k} = \arg \min_{\text{rank } X \leq k} \|X_0 - X\|_{2\text{-ind}}. \quad (9)$$

행렬의 2-induced norm에 대한 계산은 Antoulas의 문헌³⁾에 잘 나타나 있다. 식 (9)에서 계산한 X_{r_k} 과 X_0 와의 차에 대한 놈이 바로 앞서 계산했던 특잇값이 된다. 즉,

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \|X_0\|_{2\text{-ind}}, \\ \sigma_2 &= \|X_0 - X_{r_1}\|_{2\text{-ind}}, \\ \sigma_3 &= \|X_0 - X_{r_2}\|_{2\text{-ind}}. \end{aligned} \quad (10)$$

따라서 위 식으로부터 특잇값의 의미를 정리해 보자면, 그림 2로 표현한 근사 행렬 X_{r_1} , X_{r_2} 가 원래 행렬 X_0 와 차이가 나는 정도를 나타낸 지표라고 볼 수 있을 것이다.

SVD는 고윳값 분해(eigenvalue decomposition)와도 같은 의미이다. 일반적으로 X_0 행렬 모양은 직사각형이며, 이러한 경우는 SVD 보다 고윳값 분해를 사용하는 것이 더 효율적이다. 행렬 X_0 의 SVD로부터, 아래의 식을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} X_0 X_0^T &= \Phi \Sigma^2 \Phi^T, \\ X_0^T X_0 &= \mathbf{A} \Sigma^2 \mathbf{A}^T. \end{aligned} \quad (11)$$

X_0 행렬의 크기가 따라서, 식 (11)의 첫 번째 식이나 두 번째 식을 선택해서 사용할 수 있다. 위 예제에서 X_0 는 5×3 행렬이므로, 두 번째 식을 이용하면 3×3 행렬의 고윳값, 고유벡터를 계산하기 때문에 SVD 보다 빨리 결과를 얻을 수 있다. 그 이후, 좌특이행렬 Φ 는 식 (2)로부터 아래와 같이 계산할 수 있다.

$$\phi_i = \frac{1}{\sigma_i} X_0 \mathbf{a}_i, \quad i=1, 2, 3 \quad (12)$$

좌특이행렬 Φ 는 적합 직교 모드(proper orthogonal mode, POM)이라고 불리며, 고차원 문제를 저차원으로 투영

(projection; 차수 축소와 동일한 의미)하는 기저(basis) 역할을 한다.

3. 적합 직교 분해를 이용한 차수 축소 모델

앞 절에서는 POD의 계산 방법과 특성에 대해서 알아 보았으며, 본 절에서는 이러한 POD를 이용해서 차수 축소 모델을 어떻게 이끌어 내는지 살펴본다. 기본적으로는 갤러킨 투영(Galerkin projection)을 이용하는 방법인데, 이는 앞 절의 행렬 X_0 에 대한 SVD로부터 얻어진 적합 직교 모드 Φ 를 이용해서 시스템의 차수를 축소하는 것이다. 즉, 적합 직교 모드 Φ 중에서 시스템의 거동을 지배하는 R 개의 일부 모드를 선택해서 필드 변수를 투영하는 것이며, 이는 유클리드 공간에서부터 일반좌표계로의 좌표변환과 같은 의미를 가진다.⁴⁾

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &\approx \sum_{k=1}^R [u_r]_k(t) \phi_k \\ &= \mathbf{T} \mathbf{u}_r(t). \end{aligned} \tag{13}$$

동시에, 외력도 동일한 모드를 이용해서 투영할 수 있으며, 비감쇠 선형 동적 시스템의 경우, 아래와 같은 축소된 지배방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M}_r(\boldsymbol{\mu}) \ddot{\mathbf{u}}_r(t) + \mathbf{K}_r(\boldsymbol{\mu}) \mathbf{u}_r(t) = \mathbf{F}_r(t). \tag{14}$$

일반적으로 유한요소 지배방정식에서 자유도를 N 이라고 하면, 투영 T 의 크기는 NR 이므로, 축소된 시스템 행렬 M_r ,

K_r 의 크기는 $R \times R$ 이 된다. 이 방법은 기존에 널리 사용되어 온 모드 기반 축소법과 동일하다. 하지만 가장 큰 차이점은 바로 축소행렬, 혹은 변환행렬, 투영 등으로 일컬어지는 T 의 특성이다. T 를 구성하는 가장 기본적인 방법으로는 먼저, 질량행렬과 강성행렬에 대한 고유 벡터를 계산해서 고차 고유진동수에 해당하는 항을 제외하고 사용하는 방법이 있다. 이 방법의 가장 큰 약점으로는, 외력은 고려하지 않은 채로 T 를 계산하기 때문에 문제에 따라 정확도가 달라진다는 점이다. 이와는 대조적으로, 리츠 벡터를 이용한 모드 중첩의 경우는 하중으로부터 모드를 계산하기 때문에 위의 방법과는 다르다. 물론 이 방법도 강체 모드와 직교화 문제를 가지고 있다(물론 언급한 두 방법 모두 그 이후에 개발된 더 정확한 방법들이 많이 있으나, 근본적인 특성이 그렇다는 정도의 의미로 생각하면 될 것이다).⁵⁾

POD를 이용한 축소는 어떻게 이루어지는가? 앞의 방법들과 비교해 보면 T 를 계산하는 과정에 차이가 발생한다. SVD의 결과로부터 T 를 구하기 위해서는 가장 먼저 식 (1)에 주어져 있던 X_0 행렬이 필요하다. 이 행렬을 구성하는 과정이 바로 POD의 핵심이며, POD의 적용 분야가 매우 넓어지게 된 근본적인 원인이라고 할 수 있다. 구조동역학 문제에서 X_0 행렬을 구성하는 기본적인 방법은 변위 스냅샷(snapshot)을 이용하는 방법이다.⁶⁾ 그림 2는 끝단에서 동적 하중을 받는 외팔보의 거동을 나타낸다. 이 때, 시간 영역에서 특정 시간마다의 변위를 획득할 수 있는데, 획득한 각 변위 벡터가 바로 스냅샷이 된다. 식 (15)와 같이 모든 변위 열벡터로 구성되는 행렬이 바로 X_0 이며, 이 행렬을 스냅샷 행렬이라고 부른다.

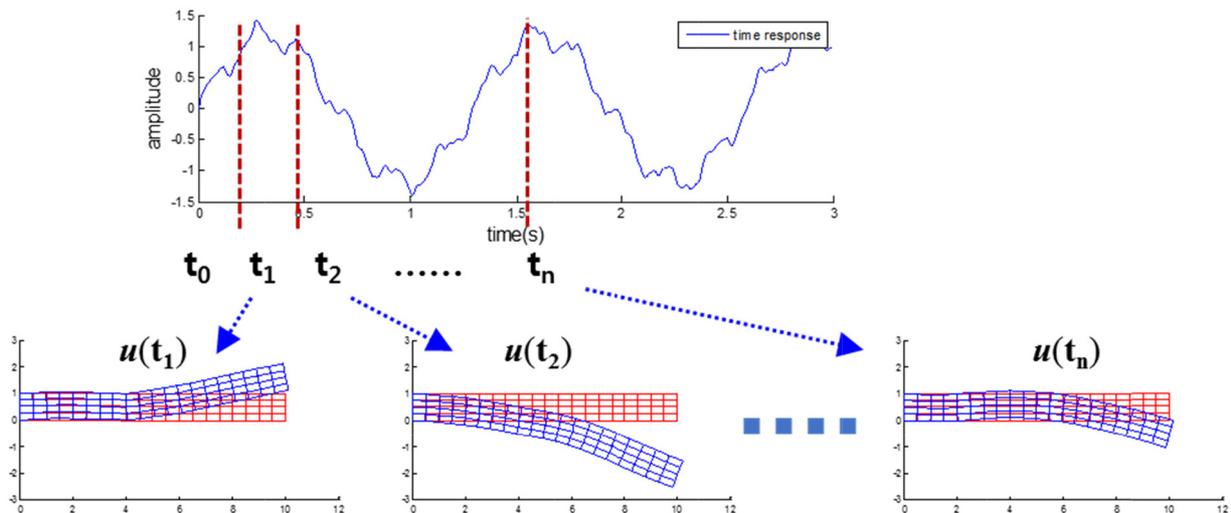


그림 2 끝단 하중을 받는 외팔보에서 시간에 대한 변위 스냅샷

$$\mathbf{X}_0 = [\mathbf{u}(t_1) \quad \mathbf{u}(t_2) \quad \cdots \quad \mathbf{u}(t_n)]. \quad (15)$$

4. 파라메트릭 차수 축소 모델과 보간

앞 절의 내용을 정리해보면, POD를 이용한 모델 축소는 먼저 변위 데이터를 획득한 다음, 그 데이터, 즉 스냅샷 행렬에 대한 SVD 계산을 통해서 투영 \mathbf{T} 를 얻는 과정으로 이루어진다. 그런데 여기서 딜레마가 발생한다. 축소를 위한 투영 \mathbf{T} 를 얻기 위해서는 변위 데이터가 필요한데, 그 변위 데이터는 전체 시스템의 해로부터 얻는 것이다. 그렇다면 축소 모델을 만드는 목적은 무엇인가? 전체 시스템의 크기가 커서 해를 구하는데에 많은 전산자원이 필요할 때, 적절히 축소 모델을 만들어서 효율적으로 원하는 답, 근사 해를 얻고자 함이 목적인데, 오히려 전체 시스템을 풀어야 하는 상황이 되는 것이다. 결론적으로 큰 문제를 단순히 작게 만들어서 한 번 풀고 마는 경우에는 POD를 이용한 축소는 큰 의미가 없다. 이것은 비선형 문제에서도 마찬가지이다. 특히 선형 시스템에서 계산하는 방식으로 구한 모드는 구조 비선형 문제에 직접 적용할 수 없기 때문에(강성행렬이 변위의 함수라면, 변위에 따라 모드가 변해야 한다) POD를 이용해서 비선형 거동에 대한 스냅샷을 계산하여 \mathbf{T} 를 얻게 되는데, 이 과정에서도 전체 시스템에 대한 비선형 해를 계산해야 스냅샷 행렬을 만들 수 있다.

그렇다면, 축소 모델을 구축하는 의미는 어디에 있는가? 그 해답은 바로 식 (14)에 있는 μ 에 있다. 여기서 μ 는 시스템을 구성하는 파라미터를 나타낸다. 이를테면, 밀도, 탄성 계수와 같이 재료에 의해 결정되는 값이나, 유한요소 종류에 따른 단면적, 길이, 두께 등의 기하학적 정보들이다. 이러한 시스템의 파라미터가 변하면, 질량과 강성이 변하기 때문에 전체 시스템 행렬을 다시 계산해야 한다. 대표적으로 무게를 최소화하는 구조최적설계 문제에서는 파라미터 값을 바꿔가면서 구속조건을 만족하는 최적 값을 찾는다.

이 때, 즉 시스템의 파라미터 값에 따라 반복연산을 수행할 때 축소모델은 큰 힘을 발휘할 수 있다. 반복연산에 의해 계산시간이 급격히 증가하기 때문에 전체 시스템을 매번 다시 구성하고 푸는 과정을 반복하는 것은 사람에게도 그리고 컴퓨터에게도 매우 지난한 과정일 것이다. 이는 시스템의 크기가 클수록, 파라미터의 종류가 많을수록 더 극대화된다. 따라서 축소 모델은 그 형태를 확장하여, 기존의 1차원적인 차수 축소 모델이 아닌 파라메트릭, 또는 파라미터화 차수 축소 모델(parametric, or parameterized reduced order model)이 되어, 시스템의 크기를 줄여서 효율성을 확보하는 동시에 파라미터의 변화도 같이 고려할 수 있게 되는 것이다.

파라메트릭 차수 축소 모델은 기존 축소법의 확장이라고 할 수 있다. 그 중 2008년도에 C. Farhat과 D. Amsallem이 개발한 보간(interpolation)을 이용한 ROM 적용법⁷⁾이 대표적이며, 이후에도 다양한 접근법이 현재까지도 활발하게 개발되고 있다. 보간법 기반의 파라메트릭 차수 축소 모델의 기본 개념을 살펴보면 다음과 같다. 먼저 파라미터에 대한 동작점(operating point)를 설정한다.

$$S_\mu = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\} \quad (16)$$

동작점은 파라미터의 변화 범위 내에서 샘플 역할을 하는 값을 의미한다. 예를 들어, 평판의 두께를 파라미터라고 하고, 2mm ~ 8mm 범위 내에서 최적의 두께를 찾겠다고 할 때, 3개의 샘플(동작점)은 $\mu_1 = 2\text{mm}$, $\mu_2 = 5\text{mm}$, $\mu_3 = 8\text{mm}$ 라고 할 수 있다. 샘플 개수는 변할 수 있으며, 동작점 위치도 균일하게, 혹은 다른 여러 방법으로 결정할 수 있다. 각 동작점에서 질량과 강성행렬을 얻은 다음, POD를 통해서 투영 \mathbf{T} 를 구한다. 즉, 3개의 동작점으로부터 \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 , \mathbf{T}_3 을 계산할 수 있다. 이 후 변하는 파라미터 값에 대해서는 다음 식과 같이 보간을 통해서 계산한다.

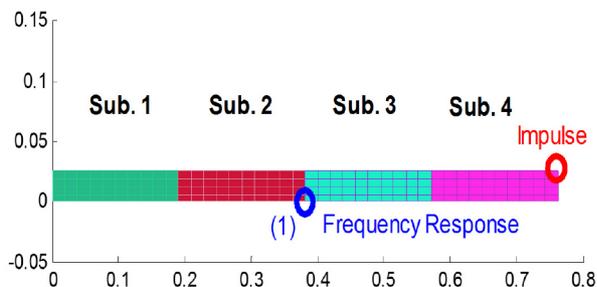
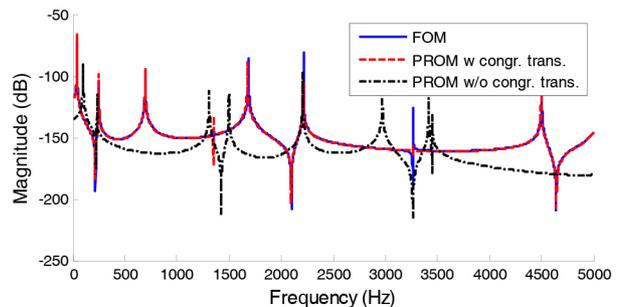


그림 3 외팔보 모델(좌)과 합동 변환 유무에 따른 주파수 응답 변화(우)



$$\mathbf{T}(\mu) = \sum_{i=1}^N W_i(\mu) \mathbf{T}_i \quad (17)$$

여기서, W_i 는 합이 1이 되는 보간 함수를 나타낸다. 하지만 여기서 중요한 문제가 발생한다. 각각의 투영 행렬들은 일반좌표계의 기저이기 때문에 투영은 곧 서로 각기 다른 공간으로의 변환을 의미한다. 즉, 보간을 위해서는 그 대상이 동일한 공간 내에 존재해야 보간에 의미가 있는데, 서로 다른 공간에 있는 경우는 보간이 아무런 의미를 가지지 못한다. 따라서, 각각 다른 공간에 있는 투영 행렬을 동일한 공간으로 변환해 주는 과정이 필요하다.⁸⁾ 이것을 합동(또는 일치) 변환(congruence transformation)이라고 부른다. 다행히도 합동 변환 행렬은 그 해가 존재한다. 합동 변환의 해를 구하는 과정은 고전적 직교 프로크루스테스 문제(classical orthogonal Procrustes)를 푸는 과정과 동일하다. 재미있게도 이 문제 역시 식 (9)과 유사하게 행렬의 놈(정확히는 Frobenius norm)을 최소화 하는 것이어서, 해는 SVD를 통해서 얻을 수 있다. 합동 변환을 위해서는 변환될 목표 공간이 있어야 하기 때문에, 앞서 3개의 투영 행렬 중에서 \mathbf{T}_2 를 목표 공간으로 정해 보기로 한다. 그러면 다음과 같이 투영 행렬의 곱을 계산할 수 있다.

$$\mathbf{P}_{\alpha,2} = \mathbf{T}_{\alpha}^T \mathbf{T}_2, \quad \alpha = 1, 3. \quad (18)$$

위의 $\mathbf{P}_{\alpha,2}$ 에 SVD를 적용하면, 다음과 같이 좌·우 특이행렬을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{P}_{\alpha,2} = \mathbf{U}_{\alpha,2} \boldsymbol{\Sigma}_{\alpha,2} \mathbf{V}_{\alpha,2}^T, \quad \alpha = 1, 3. \quad (19)$$

여기서 얻어진 좌우 특이행렬의 곱이 바로 직교 프로크루스테스 문제의 해가 되며, 각 투영을 동일 공간으로 한번 더 변환해 주는 행렬이 된다.

$$\mathbf{R}_{\alpha} = \mathbf{U}_{\alpha,2} \mathbf{V}_{\alpha,2}^T, \quad \alpha = 1, 3. \quad (20)$$

변환행렬 \mathbf{R} 을 투영 \mathbf{T} 에 곱해주면, 식 (17)에서의 보간이 아래와 같이 가능해진다.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{T}}(\mu) &= \sum_{i=1}^N W_i(\mu) \tilde{\mathbf{T}}_i, \\ \tilde{\mathbf{T}}_i &= \mathbf{T}_i \mathbf{R}_i. \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 우변의 아래첨자 i 는 dummy index가 아님을 유의한다. 그림 3은 외팔보 예제에서 합동 변환을 수행 유무

에 따라서 보간 이후 축소 모델이 전체 모델을 잘 표현하는지를 나타낸 주파수 응답 그래프이다. 결과에서 알 수 있듯이 합동 변환을 하지 않는 경우에는 아예 다른 결과를 보여준다.

이렇게 보간을 통해서 도출한 축소모델의 계산 효율성을 단순히 비교해 보면 축소 모델을 이용한 방법의 경우, 전체 시스템을 동작점의 개수만큼 풀고, 그 외 과정은 보간을 통해서 축소 시스템을 풀기 때문에, 실질적인 계산 시간은 (전체 시스템 1회 계산 시간) (동작점 개수) + (축소 시스템 계산시간)으로 나타낼 수 있다. 이 과정에서 실제로 축소 시스템 계산시간은 거의 소모되지 않는다. 반면에 전체 시스템을 그대로 푸는 경우는 (전체 시스템 1회 계산 시간) × (설계변수 값 변화 횟수)이기 때문에 상당한 계산시간의 차이가 발생한다. 실제 구조최적설계 문제 등에 위의 방법에 기초한 축소 모델을 적용하여 효율성을 확인해 본 결과, 고윳값에 대한 정확도를 상대오차 $O(10^{-4})$ 정도로 유지하였을 때, 전체 시스템 대비 계산 시간이 수십분의 1 정도로 줄어드는 것으로 나타났다. 효율성과 정확도에 대한 엄밀한 비교는 지면 관계상 생략하며, 여러 문헌^{4),7),8),9),11)}을 참고하길 바란다.

5. 맺음말

본 기사에서는 예제를 통해서 POD를 계산하는 방법과 그 의미, 그리고 차수 축소 모델에는 어떻게 적용하는지에 대해 살펴보았다. 차수 축소 모델에의 적용 과정에서 근래 다양한 연구가 활발히 진행되고 있는 파라메트릭 차수 축소 모델에 대한 소개로부터, 보간을 통해서 축소 모델을 구축하는 방법을 간략히 살펴보았다.

파라메트릭 차수 축소 모델에 관한 국내 연구는 상대적으로 활발하지 못한 것으로 보인다. 반면 해외 연구자들의 상황은 다르다. 2015년도 해외 저널(Int. J. Numer. Methods Eng.)에 차수 축소 모델과 관련한 특별호가 발간¹⁰⁾되어 차수 축소 모델에 대한 다양한 향후 연구 방향을 제시하였고, 현재 많은 연구가 수행되어 각종 전산 역학 저널에 발표되고 있다. 필자의 기사가 국내의 파라메트릭 차수 축소 모델 연구 활성화에 부족하게나마 보탬이 되길 바라는 바이다.

References

1. Kerschen G, Golinval JC, Vakakis AF, Bergman LA. The

- method of proper orthogonal decomposition for dynamical characterization and order reduction of mechanical systems: an overview. *Nonlinear dynamics*, 2005; 41(1), 147-169.
2. Liang YC, Lee HP, Lim SP, Lin WZ, Lee KH, Wu CG. Proper orthogonal decomposition and its applications Part I: Theory. *Journal of Sound and vibration*, 2002; 252(3), 527-544.
 3. Antoulas AC. Approximation of large-scale dynamical systems. 2005; Society for Industrial and Applied Mathematics.
 4. Amsallem D. Interpolation on manifolds of CFD-based fluid and finite element-based structural reduced-order models for on-line aeroelastic predictions. 2010. Ph. D. Dissertation, Department of Aeronautics and Astronautics, Stanford University, USA.
 5. Cook RD. Concepts and applications of finite element analysis. 2007; John Wiley & Sons.
 6. Sirovich L, Kirby M, Winter M. An eigenfunction approach to large scale transitional structures in jet flow. *Physics of Fluids A*, 1990; 2(2), 127-136.
 7. Amsallem D, Farhat C. Interpolation method for adapting reduced-order models and application to aeroelasticity. *AIAA Journal*, 2008; 46(7), 1803-1813.
 8. Amsallem D, Farhat C. An online method for interpolating linear parametric reduced-order models. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2011; 33(5), 2169-2198.
 9. Amsallem D, Cortial J, Carlberg K, Farhat C. A method for interpolating on manifolds structural dynamics reduced-order models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009; 80(9), 1-16.
 10. Amsallem D, Farhat C, Haasdonk B, Special issue on model reduction, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2015; 102 (5), 931-932.
 11. Lee J, Cho M. An interpolation-based parametric reduced order model combined with component mode synthesis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2017; (in press). 