

수학 교구 활용을 위한 교수학적 원리의 제안 및 적용

이 경 화 (서울대학교)

정 혜 윤 (서울대학교 대학원)[†]

강 완 (서울교육대학교)

안 병 곤 (광주교육대학교)

백 도 현 (서울대학교 대학원)

본 연구에서는 수학 교구 활용을 위한 교수학적 원리를 제안하고 교육과정과 연계하여 그 적용 방안을 도출하는 것에 목표를 두었다. 먼저 수학 교구의 활용을 위한 교수학적 원리를 제안하기 위해 관련 문헌을 메타적으로 분석하였으며, 그 결과에 기초하여 활동의 원리, 도구의 원리, 학습의 원리를 제안하였다. 이들 교수학적 원리를 염두에 두고 수학 교구를 활용한다면 단지 수학 교구가 흥미를 높이는 수단으로만 활용하는 사태를 피하는 데에 도움이 될 것으로 생각한다. 다음으로 이들 교수학적 원리를 적용하여 수학 교구를 활용한다는 의미를 교육과정과 관련지어 구체화하였다. 교육과정 문서에서 제시하는 기본적인 요소 중 영역, 핵심개념, 기능, 성취기준을 핵심적으로 고려하고 구체적인 활동 내용을 제시하는 방식을 따랐다. 마지막으로, 교수학적 원리를 적용하여 교육과정의 내용을 지도하는 방안을 삼각형의 내심과 외심 그리고 일차함수와 그래프를 예로 하여 제안하였다.

I. 서론

수학 교구¹⁾를 활용하면 수학 학습에 대한 흥미를 유발할 뿐만 아니라 수학적 지식을 심층적으로 이해하는 데에도 도움을 준다(고상숙, 박만구, 한혜숙, 2013; 김남희, 2000a; 손홍찬, 2011; 신종석, 표용수, 2011; 안병곤, 2003; 이강섭, 심상길, 2005; Hohenwarter & Jones, 2007; Saidu & Bunyamin, 2016). 수학 교구에 대한 선행연구는 크게 수학 교구의 분류, 수학 교구의 활용 방법, 그리고 수학 교구의 활용 효과에 대한 것으로 나눌 수 있다. 예를 들어, 김응태, 박한식, 우정호(2007), 강완, 백석운(1998), 최창우(2014)는 수학 교구의 분류를 시도하였다. 이들 연구에서는 교구의 물리적 형태 또는 수학적 구조의 내포 방식에 따라 교구를 분류할 수 있다고 보았다. 강문봉 외(2008, pp. 163-189), 최경식, 김동석(2013), 손홍찬(2011), 김남희(2000b, 2001), Hohenwarter와 Jones(2007)는 수학 교구의 활용 방법에 주목하였다. 지오지브라, 기하판, 스프레드시트, 탱그램 등 다양한 종류의 수학 교구를 활용하는 방법을 연구하고 적용 사례를 제시하였다. 유충현, 김한울, 박효민, 김태현, 김한솔

* 접수일(2017년 1월 7일), 심사(수정)일(2017년 3월 14일), 게재확정일(2017년 4월 26일)

* ZDM분류 : U73

* MSC2000분류 : 97U60

* 주제어 : 수학 교구, 교수학적 원리, 수학과 교육과정

* 본 논문은 2016년 정부(교육부)의 재원으로 한국과학창의재단의 지원을 받아 연구되었음(BG17020004)

† 교신저자 : hy0501@snu.ac.kr

1) 교구와 공학적 도구는 통상적으로 다른 자료를 지칭한다. 그런데 둘 다 수업의 효과성을 제고하기 위해 사용하는 도구라는 공통의 의미를 가진다. 이러한 의미만 놓고 보면 교구와 공학적 도구를 굳이 구분할 필요가 없다. 이에 본 논문에서는 교구를 수업의 효과성을 제고하기 위해 활용하는 도구라는 폭넓은 의미를 가지는 것으로 정의하고, 수학 교구의 교수학적 원리를 제안하고자 한다.

(2013), 황우형, 김명선(2001), 김영남(2002), 정동권(2001), Saidu와 Bunyamin(2016)은 인지적 측면과 정의적 측면에서 수학 교구 활용의 효과가 있음을 밝힌 연구들이다.

수학 교구에 대한 국내외 선행연구들에서 수학 교구를 활용하는 방법과 그 유용성이 상당 부분 확인되었다. 그러나 수학 교구의 활용에 관련된 이론적 논의, 특히, 교수학적 원리에 대한 논의는 거의 이루어진 바가 없다. 교수학적 원리는 개별 교육 현상에서 볼 수 있는 특징을 아우르는 보다 일반적인 관점으로 수학교육 실체에 관련된 연구의 성과를 체계화하여 이론화하는 데에 기여한다(Sierpiska & Lerman, 1997; Wittmann, 2001). 수학 교구의 교수학적 원리 역시 마찬가지로 수학 교구를 활용하여 수학을 지도하는 개별 현상을 이해하는 상위 관점을 뜻하며, 수학 교구의 활용에 관련된 연구들을 바탕으로 이론적인 논의를 시도하여 체계화 한 보편적인 관점이다. 수학 교구의 교수학적 원리는 한 차시, 한 단원, 한 학년 등 다양한 기간에 걸쳐 수학 교구를 활용한다고 할 때 바탕이 되는 근거이면서 동시에 교구 활용의 효과를 평가하기 위한 관점으로 볼 수 있다. 한편, 수학 교구의 활용에 대한 선행연구는 우리나라 수학과 교육과정과 전반적으로 관련되어 이루어지기보다는 개별 사례의 형태를 띤다. 이는 일상적인 상황에서 수학 교구를 활용하여 수업을 설계하고 실행하는 데에 참고할 기준과 자료가 아직 부족하다는 것을 시사한다. 본 연구에서는 수학 교구 활용의 교수학적 원리를 도출하고, 그 원리를 2015 개정 수학과 교육과정과 연계하여 적용하는 방안을 제시하고자 한다.

II. 수학 교구 활용을 위한 교수학적 원리

수학 교구 활용의 교수학적 원리는 수학 교구를 활용하여 수학을 지도하는 낱말의 현상을 이해하는 이론적 관점이다. 선행연구에서 이루어진 수학 교구 활용의 역할과 성격을 분석함으로써 일반적인 원리를 도출하여 제시하는 것이기 때문에 추측 또는 가설의 형태를 띤다. 일차적으로 도출한 추측 또는 가설로서의 교수학적 원리는 개별 연구 또는 설계 연구에서 추구하는 바와 일맥상통하며, 향후 수학 교구 활용 계획을 설계하고 적용하여 그 결과를 분석하는 기준이 되는 동시에 수정과 보완의 대상이 된다(Gravemeijer, 1994; Wittmann, 2001). 본 연구에서는 일차적인 추측 또는 가설의 형태로 수학 교구의 교수학적 원리를 도출하고 수학교육 전문가 3인의 검토를 거쳐 다음과 같은 세 가지 원리를 제안한다.

1. 활동의 원리

수학 교구의 첫 번째 교수학적 원리는 ‘활동의 원리’이며, 대부분의 연구에서 주장하는 바와 같이 활동을 통해 수학을 이해하고 학습하도록 한다는 뜻을 가진다. 교구를 이용하여 수학을 학습할 경우, 학생들은 구체적인 환경에서 추상적인 수학적 구조와 본질을 파악하는 기회를 얻게 된다(김수환 외, 2009; 정동권, 2001; 황혜정 외, 2012, p. 348; Boggan, Harper & Whitmire, 2010; Fennema, 1973; Heddens, 1986). 이 원리는 교구가 구체적이고 물리적인 경험으로서의 활동을 가능하게 하고 그 경험에 근거하여 수학을 이해하고 학습하도록 한다는 뜻이다. 교구 활용 원리의 근거가 되는 활동적 학습의 원리를 주장한 대표적인 학자는 Piaget이다. 그는 수학을 학습하려면 개념을 형성해야 하고, 개념 형성을 위해서는 먼저 무엇인가를 만져보는 등의 물리적 경험이 선행되어야 한다고 주장하였다(홍진곤, 2007, p. 10). 특히, Piaget는 아동들이 실제로 제시된 자료나 상황에 대해서만 조작적으로 생각할 수 있으며, 물리적 환경으로부터 구체적 표상의 형태로 개념에 대한 피드백을 얻을 수 있어야 한다고 하였다(강문봉 외, 2008, p. 62).

Dewey도 Piaget와 마찬가지로 실제적으로 만져보는 활동이 수 개념의 원천임을 주장하면서, 수 개념의 발생을 위해 구체물, 즉 사물을 눈으로 보거나 손으로 들어보는 등의 물리적인 활동을 강조하였다(홍진곤, 2007, pp.

5-6; 우정호, 2011, p. 229). Skemp는 교구를 이용한 조작적인 활동을 추상화함으로써 수학적 개념이 형성된다고 설명하면서, 교구 이용 활동이 수학에서 핵심적인 역할을 한다고 하였다(박경선, 2008). Piaget의 영향을 받은 Dienes 역시 수학적 개념이 교구를 이용한 인간의 활동을 통하여 형성된다고 하였다(강문봉 외, 2008, p. 71). 특히, Dienes는 역동성의 원리와 놀이에 기반 한 수학의 구성을 주장하면서, 이를 실현하기 위해 디즈블럭, 종이와 같은 교구를 이용한 활동을 고안하였다(김남희, 1999). 쌓기 나무나 종이 등의 교구를 이용한 활동을 많이 하는 것이 도형 개념의 형성에 크게 기여한다는 구체적인 증거도 제시하였다(강문봉 외, 2008, p. 71).

요컨대 Dewey, Piaget, Dienes, Skemp 등 많은 학자들이 수학 학습의 원리로 활동을 강조하고, 그 활동을 구체적인 상황의 언어로 제안하려고 하였다. 수학 교구는 이와 같은 제안들을 반영하기 위한 조치로 만들어진 것이며, 이 제안들을 적절하게 고려하지 않는 방식으로 수학 교구를 활용한다면 활동적 학습 원리를 구현할 수 없다. 구체물을 활용하는 것이 반드시 추상화에 필요한 것도 아니고 수학 학습에 도움이 되지 않는 방식으로 구체물을 활용하는 경우도 있다(임영빈, 홍진곤, 2016). 수학 교구 활용의 첫 번째 교수학적 원리로 활동의 원리를 제안하는 것은, 수학 교구를 도입하면 무조건 수학 학습이 촉진되는 것으로 가정하는 사태를 경계하기 위한 의도가 있다. 수학 교구를 활용하면 수학 수업의 성격이 급격하게 변하며 그 활용 방법에 따라 수학 학습의 내용도 달라진다. 그러므로 수학 교구를 활용한 수학 수업을 계획할 때 어떤 의도와 경로에 의해 학습 기회를 만들고자 하는지를 고려해야 하며, 이 때 활동적 학습의 의미를 깊이 천착해야 한다.

활동적 학습의 의미를 살리는 방식으로 수학 교구를 활용하려면, 가르치고자 하는 수학 내용, 학생의 심리 발달, 수학 수업에 영향을 미치는 제반 요인 등을 균형 있게 고려해야 한다. 임영빈과 홍진곤(2016)의 연구에서 지적한 바와 같이 가르치고자 하는 수학 내용과 긴밀하게 관련되지 않는 구체물 활용은 수학 학습을 촉진할 수 없다. 학생의 심리 발달 단계는 Piaget가 제시한 여러 단계를 뜻하기도 하고, 내용-특수의 발달 단계를 가리키기도 한다. 가령, 기하학적 사고 수준이나 확률 개념의 발달 단계 등을 고려하여 해당 내용의 지도 과정에 수학 교구의 활용을 접목시켜야 한다는 뜻이다. 수학적인 개념 정의를 직접적으로 학습하기보다는 다양한 물체를 보고 조작한 경험을 바탕으로 유익한 개념 이미지를 형성하도록 돕는 것(Vinner, 2002)이 학생들의 심리 발달을 고려한다는 의미이다. 수학 수업에 영향을 미치는 제반 요인에는 학생들의 수학 학습 배경, 성향, 성적이나 진도 압박 등 외적 요인, 등이 포함된다. 동일한 수학 교구가 동일한 방식으로 활동적 학습 원리를 충족시키지 못하는 이유는 이와 같은 제반 요인들이 복잡하게 얽혀 있기 때문이다. 활동의 원리를 고려하여 수학 교구를 활용한 수업을 계획할 때 이와 같은 제반 요인들을 선택적으로 고려하여 합리적인 안을 마련할 필요가 있다.

2. 도구의 원리

수학 교구의 두 번째 교수학적 원리는 활용되는 수학 교구가 도구로서 기능과 역할을 해야 한다는 의미에서 '도구의 원리'이다. 수학 교구가 효과적인 수학 수업을 위한 도구라는 의미를 갖지만 수학 교구의 활용이 이 의미에 부합되는 방식으로 이루어지지 않는 경우가 있을 수 있다. 도구의 원리는 그와 같은 사태를 지양하기 위한 것이며, 다음 글에서 알 수 있는 바와 같이 적절한 정도의 숙련에 의해 만족될 수 있다.

망치를 사용해본 경험이 없거나 누군가 망치를 사용하는 것을 본 적이 없는 초심자에게 망치는 본래의 의미로 인식되지 않는다. 망치가 필요하다는 것을 인식하고 망치를 사용하는 경험을 해본 후에야, 망치로 하는 활동이 가치가 있는 것으로 바뀌며 망치가 유용한 도구가 된다. 점차 망치 사용에 숙련되면 망치를 사용하는 간편한 기능을 발달시키고, 어떤 환경에서 망치가 유용할지도 알게 된다(Drijvers, 2003, p. 96).

수학 교구의 경우에도 마찬가지로 상황을 생각해볼 수 있다. 수학 교구를 처음 접하게 되면 수학 교구의 바탕

에 들어 있는 수학적 구조와는 다른 것들에 주목하게 되고, 수업의 초점이 이동하여 오히려 수학 학습에 방해가 되는 경우도 가능하다. 이는 메타인지 이동 현상으로 경계해야 하는데 이에 실패하면 수학 교구를 다루느라 오히려 수학 학습을 소홀히 하는 사태가 발생한다(임영빈, 홍진곤, 2016). 그러나 위의 인용문에서 말하듯이 학생들로 하여금 수학 교구의 필요성을 파악하도록 하고 숙련된 솜씨로 교구를 활용하도록 한다는 주장은 선뜻 받아들이기 어려운 면이 있다. 수학 교구가 필요하다는 것을 교사가 인식하고 도입하면 되는 것이지 왜 학생들이 그 필요성을 인식해야 하는지 의문을 가질 수 있기 때문이다. 위의 글에서 말하는 필요성은 교구 자체의 필요성을 가리키기보다는 교구가 제공하는 특정 기능 또는 활동의 필요성을 뜻한다고 보아야 한다. 예를 들어, 삼각형의 내각의 합이 180° 라는 것을 지도하기 위해 공학적 도구를 활용한다고 하자. 이 때 교사가 해당 소프트웨어를 어떻게 활용하면 삼각형의 내각의 합이 180° 라는 것을 귀납적으로 확인할 수 있는지를 알려준다면 이 교구를 도구로 하여 수학을 학습하도록 한 것이라고 보기 어렵다. 이와 달리, 학생 스스로 소프트웨어의 다양한 기능을 숙련한 후, 그 중 삼각형의 세 내각의 합을 구해보아겠다는 생각을 하게 되고 그것을 다양한 삼각형들에 대해 적용해보도록 할 수 있다. 이 활동에 의해 학생들이 모든 삼각형의 내각의 합이 180° 라는 명제가 참일 것 같다고 추측하는 기회를 얻을 수 있다면 도구의 원리를 만족시키는 방식으로 교구를 활용한 것이 된다. 몇몇 삼각형의 세 내각의 합을 구해볼 때도 삼각형의 종류를 의미 있게 구분해보면서 소프트웨어를 간편하게 활용하는 경지에 이르게 되면 그 소프트웨어가 학생들에게 도구로 발전한 것이다.

도구의 원리를 만족시키는 방식으로 수학 교구를 활용하여 수업을 설계하려면, 사전에 해당 수학 교구가 잠재적으로 포괄하고 있는 개념과 절차를 분석하고 학생들의 반응을 예측하는 등 철저한 사고 실험을 거쳐야 한다. 이 단계를 거치지 않으면 수학 교구가 학습의 매개체로 작용하지 않는다(장경윤, 2015; 조정수, 2015; 한세호, 장경윤, 2009; Drijvers, 2003; Drijvers & Gravemeijer, 2005; Haspekian, 2005; Trouche, 2004). 사고 실험을 거쳐 설계한 수업이라고 해도 학생들이 수학 교구를 충분히 이해하지 못하여 도구로 활용하지 못하는 일이 발생할 수 있다. 이는 일종의 교육적 유추(Pedagogical analogy)에 의해 형성되어야 하는 의미망이 수업에서 구축되지 못한 것으로, 해당 교구와 수학적 구조 사이의 유추를 성공적으로 구현하지 못했을 때 발생하는 사태이다(English, 2004). 수학 교구와 수학적 구조 사이의 유추를 성공적으로 구현하려면 교사가 자신이 가르치는 내용과 학생을 고려하여 세심하게 교구 도입 시기와 방법을 설계하고 실행해야 한다. 이렇게 함으로써만 교육적 유추의 단단한 유대가 구축되며, 교구가 도구로 바뀐다(Drijvers & Gravemeijer, 2005).

수학 교구가 도구의 원리를 만족하면서 학습의 매개체로 바뀌는 것을 ‘도구의 발생(instrumental genesis)’ 개념으로 설명할 수 있다. Trouche(2004)에 의하면, 주체와 도구는 두 가지 유형의 상호작용을 거치면서 도구의 발생을 완성한다. 먼저 주체는 도구를 사용하게 되는데, 이 때 도구 자체가 가진 다양한 기능과 용법이 주체에게 인식된다. 이를 ‘도구 사용(instrumentation)’이라고 표현한다. 도구 사용에 숙련되면 될수록 주체는 복합적이고 입체적인 도구 활용법을 고안하게 되는데, 이를 ‘도구화(instrumentalization)’라고 표현한다. 주체와 도구 사이의 관계가 정적인 상태에 머무르지 않고 지속적으로 상호작용하며 새로운 도구 활용의 경지로 나아가는 것은 이 두 가지 상호작용의 교대에 의해 도구의 발생이 이루어지기 때문이다(Haspekian, 2005). 수학 교구를 활용할 때도 학생들이 해당 교구의 구조와 기능을 충분히 익히는 기회가 필요한데 이를 도구 사용 단계로 볼 수 있다. 다음으로 숙련된 교구 사용을 바탕으로 수학 학습을 진행하는 단계로 나아가게 되는데 이를 도구화 단계로 볼 수 있다. 결국 학생들이 수학 교구를 충분히 익히고 스스로 필요에 따라 적용하는 것이 가능하도록 하는 일련의 과정을 수학 교구의 도구 발생으로 볼 수 있다(Haspekian, 2005; Trouche, 2004). 도구 사용으로서의 교구 활용 단계와 도구화로서의 교구 활용 단계가 구분될 수 있으며 두 단계 모두 중요하다는 것을 감안하여 유연하고 의미 있게 교구를 활용하여 수학을 학습하도록 하는 것이 필요하다(김남희, 2008; Artigue, 2001; Drijvers & Gravemeijer, 2005; Haspekian, 2005).

3. 학습의 원리

수학 교구 활용의 세 번째 교수학적 원리로 수학 교구 활용 결과가 학습 촉진이어야 한다는 의미에서 '학습의 원리'를 제안한다. 이미 활동의 원리와 도구의 원리에 대해 논의할 때 학습 촉진을 궁극적인 목표로 하여 수학 교구를 활용해야 한다는 것을 언급하였다. 여기서 다시 독립적으로 학습의 원리를 제안하고자 한다. 그만큼 수학 교구 활용이 유목적적으로 이루어져야 한다는 것을 강조하기 위해서이다. 이미 언급한 바와 같이 Dewey, Piaget, Dienes, Skemp는 활동적 학습 원리를 제안하였으며, 이들 모두 경험으로서의 활동과 더불어 사고 활동의 중요성을 역설하였다. 수학 교구의 활용에 이 입장을 적용하면, 수학 교구를 경험적으로 익히는 단계에 못지 않게, 아니 그보다 훨씬 더 중요하게 경험에 대한 사고 활동을 구현해야 한다는 것을 알 수 있다. 학습은 교구로 하는 경험 자체에서 일어나는 것이 아니라 경험에 대한 사고 활동에 의해 가능하기 때문이다.

수학 교구를 활용하여 수업할 때 교구 활용 경험에 대한 사고 활동을 적절히 이끌지 않으면 학생들은 수학과 무관한 몇몇 고립된 활동에 대한 기억만 하게 될 수도 있다. 학생들이 교구 활용 경험에서 무엇을 알게 되었고, 알아낸 것을 어떻게 표현할 수 있는지, 그 표현이 뜻하는 바가 무엇이며 어떻게 상징화 또는 개념화 할 수 있는지를 긴밀하게 탐구하도록 해야 한다. 이로써만 수학적 개념 형성에 도달하도록 할 수 있다(김수미, 2000; 강문봉 외, 2008, p. 186). 교구로 했던 경험에 대해 사고하도록 이끌 때 문제해결, 개념 이해, 추론과 정당화, 등 다양한 이론적 입장과 관련지어 세부적인 사고 경로를 설계하고 실행할 수 있다(고상숙 외, 2013; 김남희, 2000a, 2000b; 손홍찬, 2011; 신종석, 표용수, 2011; 이강섭, 심상길, 2005; Boggan et al., 2010; Saidu & Bunyamin, 2016). 각 내용영역마다 고유한 특성을 가지고 있는 만큼, 수학 교구를 활용하여 각 내용영역의 소주제들을 지도할 때도 그 고유한 특성을 적절히 고려할 수 있어야 학습을 촉진할 수 있다. 다시 말하여 대수영역 또는 확률과 통계영역의 소주제들을 지도할 때 각 영역의 주요 지식이 가지고 있는 특성을 감안하여 수학 교구를 활용하는 것이 필요하다. 이와 관련하여 김성준(2010)은 학교수학 내용의 영역별로 교구를 나누어 제시할 수 있으며 각 영역별로 특화된 교구들에 의해 수학 학습이 효과적으로 뒷받침될 수 있다고 하였다. Boggan 외(2010) 역시 수학의 각 내용별 학습에 알맞은 교구들이 존재하며, 내용에 맞추어 알맞게 선택되어진 교구는 수학 개념의 이해를 도와준다고 하였다. 즉, 교구는 수학의 특정한 개념과 원리에 연결되며, 교구의 선택은 학습하고자 하는 수학 학습내용에 따라 달라져야 한다. 수학적 개념과 원리, 법칙을 가장 효과적으로 지도할 수 있는지 여부가 교구 선택의 중요한 판단기준이 되는 것이다(최창우, 2014, p. 10).

지금까지 수학 교구의 활용을 위한 교수학적 원리를 제안하였다. 앞서 논의한 바와 같이 수학 교구 활용에 관련된 선행연구를 분석하여 도출한 교수학적 원리는 활동의 원리, 도구의 원리, 학습의 원리이다. 이 세 원리 사이에는 위계가 없으며 상호 관련성이 있다. 그러므로 어느 원리가 더 기본적이고 어느 원리는 더 고차적이라고 할 수 없으며, 한 원리를 만족시키기 위해 노력하다보면 다른 원리도 얼마간 만족시키게 될 것으로 생각한다. 가령, 활동의 원리를 만족시키는 방향으로 수학 교구의 활용을 설계하고 실행하면 학습의 원리도 상당 부분 만족시키게 될 것으로 생각한다. 이들 세 원리에 입각하여 수학 교구를 활용한다면 수학교육의 이슈를 피상적으로 다루는 데에 그치지 않고 심층적인 논의의 근거와 계기를 마련하여 수학교구의 교육적인 가치와 효과를 제고하는 계기가 될 것으로 기대한다.

III. 교육과정과 연계하여 교구 활용에 기초한 수학 수업 설계하기

이하에서는 본 논문에서 제안한 교수학적 원리를 우리나라 교육과정과 관련지어 이해한다. 이어서 삼각형의 내심과 외심, 일차함수와 그래프 관련 수업에서 교구를 활용할 때 교수학적 원리를 고려한다는 의미와 그 구체

적인 내용을 제시한다.

1. 수학 교구 활용을 위한 교수학적 원리와 교육과정

2015년 교육부는 제2차 수학교육 종합계획을 발표하였다. 제2차 수학교육 종합계획(교육부, 2015)은 2015년부터 2019년까지의 수학교육 발전을 위한 중장기 계획으로, 제1차 수학교육 종합계획에 대한 반성과 함께 앞으로 수학교육이 나아가야 할 방향을 제시하고 있다. 수학 교구를 활용한 수학 수업은 여기서 핵심 추진 과제 중 하나로 제시되었다. 우리나라 교육과정에서 교구의 활용에 관해 명시적으로 언급한 것은, 제6차 교육과정 때 복잡한 계산이나 문제 해결력 향상 등을 위하여 계산기나 컴퓨터를 활용할 수 있다고 했던 것이 처음이었다(교육부, 1992, p. 42). 이후 활동적 학습의 이념은 지속적으로 반영되었고, 가장 최근에 고시된 2015 수학과 교육과정(교육부, 2015)에서는 ‘다양한 자료와 정보를 수집, 정리, 분석, 활용하고 적절한 공학적 도구나 교구를 선택, 이용하여 자료와 정보를 효과적으로 처리하는 능력(교육부, 2015, p. 4)’이라고 매우 구체적인 지침을 제시하였다. 아울러 각 내용영역에서 수학 교구의 활용에 대한 적극적인 입장을 찾아볼 수 있다. 예를 들어, 함수, 기하 및 통계 영역에 대한 교수·학습 방법 및 유의사항(교육부, 2015, pp. 33-36)에 제시된 입장은 다음과 같다.

- 함수의 그래프를 그리고 여러 가지 성질을 탐구할 때 공학적 도구를 이용할 수 있다.
- 간단한 입체도형의 단면을 관찰하는 활동과 전개도를 접어 간단한 입체도형을 만드는 활동을 통해 평면도형과 입체도형의 관계를 직관적으로 이해하게 할 수 있다.
- 공학적 도구나 다양한 교구를 이용하여 합동과 닮음의 의미를 이해하게 한다.
- 공학적 도구나 다양한 교구를 이용하여 도형을 그리거나 만들어보는 활동을 통해 도형의 성질을 추론하고 토론할 수 있게 한다.
- 대푯값과 산포도를 구할 때 공학적 도구를 이용할 수 있다.

교수·학습 방법에서도 다음과 같이 수학 교구의 적극적인 활용을 강조하고 있다(교육부, 2015, pp. 37-39).

- 매체 및 도구 활용 학습은 학생의 수준과 학습 내용에 적합한 매체와 도구를 활용하여 흥미를 유발하고 학습의 효율성과 다양성을 도모하는 교수·학습 방법으로, 시청각 자료, 멀티미디어나 인터넷 등의 컴퓨터 활용 매체와 교구, 계산기, 교육용 소프트웨어 등의 도구를 이용한다.
- 교수·학습 과정에서 적절한 교구를 활용한 조작 및 탐구 활동을 통해 수학의 개념과 원리를 이해하도록 한다.
- 계산 능력 배양을 목표로 하지 않는 교수·학습 상황에서의 복잡한 계산 수행, 수학의 개념, 원리, 법칙의 이해, 문제 해결력 향상 등을 위하여 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구를 이용할 수 있게 한다.

더욱이 평가 방법에서도 ‘평가 내용이나 방법에 따라 학생에게 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구와 다양한 교구를 이용할 수 있게 한다(교육부, 2015, p. 41)’라고 밝히고 있다. 이와 같은 전반적인 기조는 수학 교구 활용의 교수학적 원리 중 활동의 원리와 밀접하게 관련된다. 위에서 살펴본 교육과정의 해당 언급은 모두 활동의 원리에 의해 수학 교구를 활용할 것을 시사하는 것으로 볼 수 있다. 교구의 조작이나 탐구를 통해 수학의 개념과 원리를 이해하도록 해야 한다는 취지의 언급은 도구의 원리와 학습의 원리에도 정확히 부합되는 것으로 볼 수 있다. 교구를 조작하는 것으로 도구 사용 단계를 거칠 수 있으며, 탐구 활동에 의해 수학의 개념과 원리를 파악하는 것으로 도구화의 단계를 수행하도록 할 수 있다. 이러한 일련의 과정은 모두 수학 학습을 촉진하도록 진행해야 한다는 것으로 학습의 원리와 밀접하게 관련된다. 문제는 이러한 교육과정의 전반적인 기조 그리고 세부적인 지침에 반영된 교수학적 원리를 실제 수업에서 어떻게 구현할 것인가 하는 것이다.

주목할 점은 2015 수학과 교육과정에서 수업 후 학생들이 할 수 있거나 할 수 있기를 기대하는 능력 또는 도달점을 ‘기능’이라고 하여 별도로 제시하였다는 것이다. 이 기능은 수학 교구를 왜 그리고 어떻게 활용하여 학습하도록 할 것인가라는 질문에 답하는 데에 중요한 힌트가 된다. 예를 들어, ‘이해하기’ 또는 ‘설명하기’ 기능을 학습 목표로 한다면 수학 교구를 활용한 수업을 설계함에 있어서도 이 기능이 중점적으로 함양되도록 해야 한다. 수학 교구는 이해하고 설명하는 기능을 익히는 데에 매우 효과적인 상황과 언어를 제공하기 때문에 도입해야 하며, 그 기회를 극대화하는 방향으로 수업을 설계해야 해당 기능을 학습하도록 도울 수 있다. 내용영역, 핵심개념, 성취기준 역시 수학 교구를 활용한 수학 수업을 설계함에 있어 필수적으로 고려해야 하는 요소이다. 특히, 내용영역의 포괄적인 목표와 특성을 고려하여 교구 활용 계획을 세우고 교구를 다룬 경험에 대한 사고 활동을 촉진하여 핵심개념과 성취기준에 부합되는 언어와 표현 활동, 사고 활동을 이끌 수 있어야 한다. [표 1]은 교육과정 요소 중 영역, 핵심개념, 기능, 성취기준을 제시하고 앞서 논의한 교수학적 원리에 따른 활동 예시를 제시하여 수학 수업을 계획하는 틀이다. 이 틀은 수학 교구 활용을 위한 교수학적 원리와 우리나라 교육과정을 연계하여 수업을 계획하는 기본적인 입장을 나타낸다.

<표 III-1> 교육과정과 연계하여 수학 교구를 활용한 수학 수업을 설계하기 위한 틀

영역	핵심개념	기능	교구	사진	성취기준	활동예시

2. 수학 교구 활용을 위한 교수학적 원리에 따른 수학 수업 설계 예시


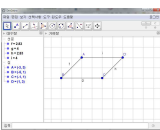
<표 III-1>에서 교육과정과 연계하여 수학 교구를 활용한 수학 수업을 설계하기 위해 고려해야 하는 요소를 제안하였다. 이들 요소 그리고 전체적인 틀은 향후 지속적인 적용과 그 효과를 분석한 후 수정과 보완을 거쳐야 한다. 이하에서는 <표 III-1>에 따라 수학 교구를 활용한 수학 수업을 설계한다는 의미를 구체적인 사례 중심으로 살펴본다.

가. 수학 교구를 활용한 삼각형의 내심과 외심 수업 설계

삼각형의 내심과 외심은 다양한 기하학적 개념을 포함하고 있어 학생들이 어려워하는 부분 중 하나로, 설명식 수업만으로는 학생들이 그 기저에 있는 수학적 원리를 충분히 이해하지 못하는 경우가 많다. 이로 인해 여러 교과서(고호경 외, 2013; 이준열 외, 2012; 정상권 외, 2013)에서는 삼각형의 내심과 외심 학습을 위하여 수학 교구인 삼각형 내외심기 등을 이용한 학습활동을 소개하고 있다.

<표 III-2> 수학 교구를 활용한 삼각형의 내심과 외심 수업 설계안의 일부

영역	핵심 개념	기능	교구	사진	성취기준	활동예시
① 기하	② 평면 도형	이해하기 설명하기 판별하기 추론하기 정당화하기	색종이		[9수04-10] 이등변삼각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.	- 색종이를 이용하여 이등변삼각형의 성질 탐구하기 ◎ 색종이를 접어서 이등변삼각형을 만들어 보는 활동을 통해, 이등변삼각형의 여러 가지 성질을 이해한다. 1) 색종이를 다양한 모양으로 접거나 잘라서 삼각형을 만들어 보도록 한다. 2) 색종이를 반으로 접고 대각선을 따라 잘라 본다. 3) 2)의 활동을 통해 자른 종이를 펼쳐 나오는 삼각형(△ABC)이 어떤 삼각형인지 확인한다. 4) △ABC에서 크기가 서로 같은 두 각을 확인한다. 5) 2), 3)의 활동을 바탕으로 2)에 제시된 방법과 다른 방법으로 이등변삼각형을 만들어 보도록 하고, 각각의 삼각형에서 크기가 서로 같은 두 각을 확인한다. 6) 이등변삼각형이 어떤 성질을 가지고 있는지 추론해보고 설명해 본다.
						- 삼각형 내외심기를 활용하여 삼각형의 내심의 성질 탐구하기 ◎ 모래를 이용하여 삼각형의 내심을 찾아보는 활동을 통해 삼각형의 내심의 성질을 이해한다.
		③ 이해하기 설명하기 추론하기 정당화하기	삼각형 내외심기		[9수04-11] 삼각형의 외심과 내심의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.	1) 삼각형 내외심기를 자유롭게 사용하면서 삼각형 내외심기의 조작법을 익힌다. ⑥ 2) 삼각형 판 위에 모래를 충분히 붓고, 삼각형 판 위에 모래가 흘러내리면서 만들어지는 선분과 꼭짓점을 관찰한다. ⑦ 3) 삼각형 위에 모래가 쌓인 모습을 사진기로 찍어본다. 이때, 사진기는 삼각형 위에서 똑바로 아래로 향하게 한다. ⑦ 4) 3)의 활동을 통해 얻은 사

						<p>진 위에 각도기를 이용하여 삼각형의 내심을 그려본다. ㉞</p> <p>5) 4)의 활동을 통해 얻은 삼각형의 내심과 모래를 부어 만들어지는 꼭짓점이 일치하는 것을 확인한다. ㉞</p> <p>6) 5)의 활동을 바탕으로 삼각형의 내심의 성질을 탐구한다. ㉞</p>
		이해하기 설명하기 작도하기 판별하기 추론하기 정당화하기	지오 지브라 (GeoGebra a)		[9수04-12] 사각형의 성질을 이해하고 설명할 수 있다.	<p>- 컴퓨터 프로그램을 이용하여 평행사변형의 성질 관찰하기</p> <p>㉞ 평행사변형을 그리고 관찰하는 활동을 통해 평행사변형의 성질을 이해한다.</p> <p>1) 학생들이 자유롭게 지오지브라를 조작해볼 수 있는 기회를 제공한다.</p> <p>2) 지오지브라를 통해 평행사변형 ABCD를 그려본다.</p> <p>3) 평행사변형 ABCD의 네 변의 길이를 측정하고 어떤 관계가 있는지 확인한다.</p> <p>4) 한 점을 선택하고 마우스를 이동하여 평행사변형의 모양과 크기를 변화시킨다.</p> <p>5) 4)의 활동을 통해 얻은 변화된 평행사변형의 각 변의 길이를 측정하고 평행사변형의 네 변의 길이를 관찰한다.</p> <p>6) 평행사변형의 두 쌍의 대변의 길이 사이의 관계를 추론하고, 설명해 본다.</p> <p>* 위의 활동을 GSP를 이용해서 할 수 있다.</p>
				...		

<표 III-2>는 수학 교구인 삼각형 내외심기를 활용하여 삼각형의 내심과 외심 수업을 설계한 것의 일부이다. ㉞의 내외심기를 이용하여 학생들은 실제로 모래를 붓고, 만지고, 흘러내리게 하는 활동 등을 행함으로써 구체적이고 물리적인 다양한 경험을 할 수 있다. 하지만, 이와 같은 학생들의 활동이 무의미하게 전개되어서는 안 되며, 교사는 활동 목적에 따라 삼각형 내외심기를 이용한 다양한 방식의 활동을 설계해야 한다. 먼저, 교사는 <표 III-2>의 ㉞ ‘기하’에 속한 ㉞ ‘평면 도형’ 영역에 대한 사고활동을 이끌어내기 위한 활동을 설계해야 할 것이다. 이때, 어떠한 유형의 사고활동을 이끌어 낼 것인지에 대한 설계가 필요한데, 삼각형의 내심과 외심 영역과 관련해서는 <표 III-2>의 ㉞ 기능에 제시된 사고활동이 중점적으로 함양되도록 설계되어야 한다. ㉞에서 기능으로 제시하고 있는 ‘이해하기’, ‘추론하기’, ‘설명하기’, ‘정당화하기’는 교구를 활용한 수업 후 학생들이 수행할 수 있기를 기대하는 능력으로, 교사는 학생들이 해당 기능을 수행할 수 있도록 삼각형의 내외심기 활용 수업을 설계해야 할 것이다. 삼각형의 내외심기를 이용하여 설계한 활동의 최종 목적은 <표 III-2>의 ㉞에 제시된 성취기준이다. 교사는 학생들이 ㉞ 기하 영역의 ㉞ 평면 도형에 속한 핵심 개념을 ㉞ 이해하기, 추론하기, 설명하기, 정당

화하기 사고를 통해 익힘으로써, 최종적으로 ⑤ ‘삼각형의 외심과 내심의 성질을 이해하고 설명’할 수 있도록 삼각형의 내외심기를 이용한 활동을 설계하여야 할 것이다.

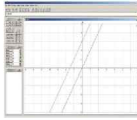
<표 III-2>의 ⑥에서는 교구 활용의 첫 번째 단계로 학생들이 삼각형 내외심기를 자유롭게 사용하면서 조작법을 익힐 수 있도록 설계하였다. 이는 도구 사용의 단계에 해당하는 것으로, 이를 통해 학생들은 삼각형 내외심기의 기능과 용법을 익히게 된다. 교구에 친숙해진 학생들의 활동은 <표 III-2>의 ⑦로 이어진다. 학생들은 삼각형 내외심기에서 삼각형 모양을 직접 찾고 원하는 모양을 만들어내기도 한다. 나아가, 학생들은 각자의 수준에 따라 다양한 종류의 삼각형을 만들고 각 삼각형의 내심과 외심을 찾아봄으로써 삼각형의 내심의 위치를 찾고 내심의 성질을 학습하는 단계로 나아가게 된다. 삼각형 내외심기의 도구화 단계가 진행되는 것이다. ⑥과 ⑦의 도구 사용과 도구화의 과정을 거치면서 삼각형의 내외심기는 학생들에게 학습의 매개체로 바뀌게 된다. 도구발생이 이루어지는 것이다.



삼각형 내외심기를 통해 시각적으로 확인하고 발견한 삼각형의 내심의 위치 및 성질은 추상적인 수학적 개념으로 이어지도록 해야 한다. ⑤의 성취기준을 목적으로 하여 설계된 ⑥과 ⑦의 활동이 궁극적으로 ⑧로 이어져야 하는 것이다. 이와 같은 연결은 삼각형 내외심기를 이용한 활동이 수학적 개념 형성으로 이어지는 유목적적 활동으로 설계되어야 하며, 나아가 수학 교구인 삼각형 내외심기와 수학적 개념인 삼각형의 내심과 외심 사이의 교육적 유추가 성공적으로 구현되도록 교구 도입 시기와 방법에 대한 설계와 실행이 이루어져야 함을 보여준다.

나. 수학 교구를 활용한 일차함수의 그래프 수업 설계

2015 수학과 교육과정에서는 함수 영역에 대한 교수·학습 방법 및 유의사항에 ‘함수의 그래프를 그리고 여러 가지 성질을 탐구할 때 공학적 도구를 이용할 수 있다.’고 언급하고 있다. 교육과정에 제시된 유의사항은 지오지브라와 같은 공학적 도구를 활용한 수업 설계의 필요성을 제안하는 바, 이하에서는 <표 III-1>을 적용하여 지오지브라를 활용한 일차함수의 그래프 수업을 설계하고자 한다.

<표 III-3> 수학 교구를 활용한 일차함수의 그래프 수업 설계안의 일부

영역	핵심 개념	기능	교구	사진	성취기준	활동예시
					...	
① 함수	② 함수와 그래프	그래프 그리기 탐구하기	GSP		[9수03-05] 일차함수의 의미를 이해하고, 그 그래프를 그릴 수 있다.	- 컴퓨터 프로그램을 사용하여 일차함수의 그래프 그리기 ◎ 일차함수의 의미와 그래프의 형태를 익힘으로써 일차함수의 그래프를 그린다. 1) 활성화 된 GSP 프로그램의 다양한 이모티콘을 눌러보고 점과 선을 그려보면서 GSP의 기능을 익힌다. 2) GSP를 이용하여 다양한 직선을 그려본다. 3) $y = 2x, y = 3x, y = 3x + 2$ 등 다양한 일차함수의 그래프를 그려본다. 4) 3)의 활동을 바탕으로 일차함수의 의미와 그래프의 모양을 확인한

					다. 5) 4)의 활동을 바탕으로 3)에 제시된 일차함수 외에 다양한 일차함수의 그래프를 그려본다. ※ 위의 활동과 동일한 활동을 지오지브라, 엑셀을 이용해서 할 수 있다.
③ 그래프 그리기 이해하기 탐구하기	지오지브라 (Geogebra)		④	⑤ [9수03-06] 일차함수의 그래프의 성질을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결할 수 있다.	<p>- 컴퓨터 프로그램을 이용하여 다양한 형태의 일차함수 그리기</p> <p>◎ 다양한 형태의 일차함수를 그려봄으로써 일차함수의 성질을 이해한다.</p> <p>1) 활성화된 지오지브라 프로그램의 다양한 이모티콘을 눌러보면서 점, 선, 도형 등을 그려보는 등 학생들이 자유롭게 지오지브라를 조작해볼 수 있는 기회를 제공한다. ⑥</p> <p>2) 기하창에 다양한 일차함수의 그래프를 그린다. ⑥</p> <p>3) 2)의 그래프에 대하여, 대수창에 나타나는 각 그래프의 기울기와 y절편을 확인한다. ⑦</p> <p>4) 2)의 활동과 반대로, 대수창에서 $y = ax + b$의 a와 b 값을 변화시킨다. ⑦</p> <p>5) 4)에서 변화된 식의 그래프가 기하창에 그려지는 형태를 살펴본다. ⑦</p> <p>6) a와 b 값을 동시에 변화시킬 필요는 없으며 학생의 생각과 수준에 따라 자유롭게 변화시킨다. ⑦</p> <p>7) 3)과 5)를 바탕으로 기울기와 a값과의 관계 및 y절편과 b값의 관계를 탐구한다. ⑧</p> <p>8) 7)을 바탕으로 일차함수의 그래프의 성질을 탐구한다 ⑧</p> <p>※ 위의 활동과 동일한 활동을 GSP를 이용해서 할 수 있다.</p>
그래프 그리기 추론하기	모눈종이판			[9수03-07] 일차함수와 미지수가 2개인 일차방정식의 관계를 이해한다.	<p>- 모눈종이판 위에 일차방정식의 해 나타내기</p> <p>◎ 일차방정식의 해를 좌표평면 위에 나타내는 활동을 통해 일차함수와의 관계를 이해한다.</p> <p>1) x, y의 값이 정수일 때, 일차방정식 $x + y - 1 = 0$을 만족시키는 해를 구하여 다음 표를 완성한다.</p>

						<table border="1"> <tr> <td>x</td> <td>...</td> <td>-2</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	x	...	-2	y		
x	...	-2										
y												
						2) 모눈종이판위에 좌표평면을 그린다. 3) 1)의 표에서 $x+y-1=0$ 을 만족시키는 순서쌍 (x, y) 를 2)의 좌표평면 위에 나타낸다. 4) 3)의 좌표평면 위에 나타내어진 점들을 모두 잇는다. 5) 일차함수 $y=-x+1$ 의 그래프를 모눈종이 판 위에 그린 뒤, 4)의 활동 결과 나타난 선과 비교해본다. ※ 위의 활동을 지오지브라, 엑셀, GSP를 이용해서 할 수 있다.						
					...							

<표 III-3>은 수학 교구인 지오지브라를 활용하여 설계한 일차함수의 그래프 수업의 일부를 제시하고 있다. <표 III-3>의 ④에 제시된 지오지브라의 도입은 그 자체로 학생들의 활동을 이끌어낼 수 있는 상황을 가져오게 된다. 하지만 지오지브라의 부적절한 도입은 활동이 활동으로서의 제 역할을 구현할 수 없게 만든다. 즉, 일차함수의 그래프 수업을 위해 사용되는 지오지브라 역시 학생들의 ‘일차함수의 그래프 성질 이해’에 목적을 두고 활용되어야 하는데, 이를 위해 교사는 <표 III-3> ① 함수 영역의 ② 함수와 그래프 개념에 대한 사고 활동을 구현해야 할 것이다. 나아가, 사고 활동의 구현 시 해당 내용 영역에 대한 사고 경로를 설계하고 실행할 수 있어야 한다. 본 연구에서 제안하는 수업의 경우 <표 III-3>의 ③에서 제시하고 있는 기능이 중점적으로 함양되도록 설계되었다. ③에서 제시하는 기능은 해당 수업 후 학생들이 할 수 있기를 기대하는 능력이기도 하다. 이를 고려하여 설계된 수업에서는 학생들이 직접 그래프를 그리고, 해당 개념을 이해하며, 탐구할 수 있도록 지오지브라가 활용되어야 하는 것이다. 지오지브라를 이용하여 설계한 활동의 목적은 최종적으로 <표 III-3>의 ⑤에 제시된 성취기준을 향하게 된다. ① ‘함수’ 영역의 ② ‘함수와 그래프’에 속한 핵심적인 수학적 개념을 ③ ‘그래프 그리기’, ‘이해하기’, ‘탐구하기’라는 사고과정을 통해 익히나감으로써 최종적으로 ⑤ ‘일차함수의 그래프의 성질을 이해하고, 이를 활용하여 문제를 해결’할 수 있어야 하는 것이다.

교사들이 <표 III-3>의 ⑤에 나타난 의도를 가지고 설계한 경로에 따라, 학생들은 지오지브라를 이용한 활동을 하게 된다.<표 III-3>의 ⑥에서 제시하고 있듯이, 지오지브라를 접한 학생들은 다양한 이모티콘을 눌러보고 점, 선, 도형 등을 그려보는 등 자유롭게 지오지브라를 조작해 볼 수 있는 기회를 갖게 된다. 이를 통해 학생들은 수학 교구로써 지오지브라가 갖는 다양한 기능과 용법을 익히게 된다. 이와 같이 지오지브라 본연의 역할과 목적이 무엇인지 살피게 되는데, 도구 사용의 단계를 거치게 되는 것이다. 이후 학생들의 활동은 <표 III-3>의 ⑦로 이어지게 된다. 지오지브라의 구조와 기능에 익숙해진 학생들은 기하창에 다양한 형태의 직선을 자유롭게 그려보거나, 대수창에 다양한 일차함수의 식을 적어보기도 한다. 학생들은 지오지브라 활용에 숙련될수록 지오지브라의 대수창에 나타난 $y=ax+b$ 식에서 a 와 b 값을 주체적으로 변화시키게 된다. 이 과정에서 학생들은 지오지브라 대수창에서 a, b 값을 다양하게 변화시키면서 기하창에서 $y=ax+b$ 그래프의 기울기와 y 절편이 변화하는 것을 시각적으로 확인하게 되며, 이를 바탕으로 일차함수의 그래프의 성질을 학습하는 단계로 나아간다. 지오지브라의 도구화 단계가 진행되는 것이다. 교사들이 설계한 활동을 통해 지오지브라는 학생들과 도구 사용,

도구화의 상호작용을 거치게 되고, 이는 지오지브라가 학생들에게 학습의 매개체로 바뀌는 도구발생으로 이어진다. 지오지브라를 이용한 활동이 학습으로 진행되는 것이다.

교사는 학생들의 발달 수준이나 실제 학습이 발생하는 환경에 따라 ⑥과 ⑦의 활동을 차별화하여 설계, 적용될 수 있다. 즉, 일차함수의 그래프라는 수학적 개념을 이해할 수 있도록, 수학 교구인 지오지브라가 효과적인 상황과 언어를 제공하는 기회를 극대화하는 방향으로 수업을 설계해야 할 것이다. 예컨대, 지오지브라를 평소 접해본 경험이 많은 학생들을 대상으로 할 때에는 ⑥의 활동을 줄일 수 있으며, 추상화 수준이 부족한 학생들을 대상으로 할 때에는 ⑦의 활동들을 좀 더 세분화하거나 활동 시간을 늘릴 수 있는 것이다. ⑤의 성취기준을 활동의 목적으로 두고, ⑥과 ⑦의 도구발생 과정을 거친 학생들은 궁극적으로 ⑧의 개념형성 단계에 도달하게 된다. 교사가 유목적적으로 설계한 활동을 경험하고 그 경험에 대해 사고하게 됨으로써 ‘일차함수의 그래프’를 이해하고, 관련 문제를 해결할 수 있는 능력을 기르게 될 것이다.

IV. 결론

본 연구에서는 수학 교구 활용을 위한 교수학적 원리를 제안하고 교육과정과 연계하여 그 적용방안을 도출함으로써 교구의 실제적인 활용을 지원하는데 기여하고자 하였다. 그 결과, 수학 교구 활용을 위한 교수학적 원리로 활동의 원리, 도구의 원리, 학습의 원리를 제안하였으며, 이들 교수학적 원리를 2015 수학과 교육과정(교육부, 2015)과 연계하여 살펴보았다. 나아가 교육과정과 연계하여 수학 교구 활용에 기초한 수학 수업 설계 사례를 제시함으로써, 수학 교구를 활용한 수업에서 교수학적 원리를 고려한다는 것의 의미를 구체적으로 논의하였다. 이를 통해, 실제 수업에서의 교구 활용 시 앞서 논의된 각각의 교수학적 원리가 함께 작용하며, 또한 함께 적용될 때 교구 활용의 효과가 제고될 수 있음을 보여주었다. 이하에서는 본 연구의 의의를 선행연구와의 비교를 통해 좀 더 구체적으로 살펴보하고자 한다. 특히, 기존의 연구결과를 어떻게 보완, 확장하는지와 관련하여, 본 연구에서 제시하고 있는 수학 교구 활용을 위한 교수학적 원리, 교육과정과의 연계, 구체적인 수업 설계의 세 가지 측면의 의의를 논하고자 한다.

먼저, 본 연구에서 주목할 만한 것은 이론적 원리인 교구 활용을 위한 교수학적 원리이다. 수학 교구 활용과 관련한 기존의 연구들(정동권, 2001; 최경식, 김동석, 2013; Hohenwarter & Jones, 2007)은 주로 기하판, 탭그램 등 특정 교구의 활용법 및 효과만을 제시하였는데, 본 연구는 이전 연구들의 교구활용을 뒷받침할 이론적 근거를 체계화하였다. 예를 들어, 정동권(2001)의 연구에서 나타난 기하판을 활용한 구적 공식의 지도 사례 중 ‘기하판을 다루어본 경험이 전혀 없는 학생들이 기하판 위에 고무줄을 걸치면서 각자 만들고 싶은 도형을 만드는 활동’을 하게 하는 것은 본 연구에서 제안한 ‘활동의 원리’가 반영된 것으로 볼 수 있다. 그리고 ‘기하판에서 못과 못 사이의 길이나 못으로 둘러싸인 영역의 넓이를 약속하고, 각자 구성한 도형의 넓이를 알아보는 활동’을 하게 하는 것은 학생들이 기하판 본연의 기능을 알고 활용할 수 있도록 유도하는 것으로, 본 연구에서 제안한 ‘도구의 원리’가 반영된 것으로 볼 수 있다. 또한 ‘사다리꼴의 구적 공식 발견 및 그 정당화를 학습’하게 하는 것은 ‘학습의 원리’가 반영된 것으로 볼 수 있다. 이처럼 본 연구는 이전 연구들에서 제시한 수학 교구 활용에 내포된 핵심적인 교수학적 원리를 도출하였으며, 더불어 수학 교구 활용의 교육적인 가치가 제고되는 계기를 마련하였다.

본 연구에서는 수학 교구 활용을 위한 교수학적 원리를 수학과 교육과정 연계함으로써 교육과정에서 제시하고 있는 교구 활용 방안의 실행 가능성을 제고하였다. 선행연구에서도 평행사변형의 넓이, 삼각형의 내심과 외심, 미적분 등(장훈, 2008; 최경식, 2012)을 교구 활용에 의해 지도하는 방법을 다루고 있지만, 달라진 교육과정과 연계하여 체계적으로 접근할 필요가 있었다(김수미, 2000). 그 동안 공학 도구 활용에 대한 연구도 풍부하게 이루어져왔기 때문에 본 논문에서 제안한 교구 활용을 위한 교수학적 원리에 의해 이들 연구를 재조명하여 실행

가능한 수업 설계 방안을 도출하는 데 무리가 없을 것으로 생각한다. 본 연구에서는 삼각형의 내심과 외심 및 일차함수의 그래프를 교구 활용에 의해 지도하는 수업을 설계하면서 이와 같은 재조명이 어떻게 가능한지 논의하였다.

수학 교구 활용이 다양한 수준과 성향의 학생들로 하여금 수학 수업에 참여하도록 하는 기회를 제공한다는 데에는 폭넓은 합의가 이루어지고 있다. 본 논문에서 살펴본 바와 같이 여러 연구에서 그 구체적인 효과를 확인하였고, 교구 활용 자체만으로 학습이 일어나지 않는다는 우려도 있었다. 이에 본 논문에서는 어떤 교수학적 원리에 의해 수학 교구를 활용해야 효과적이고 동시에 우려되는 바를 극복할 수 있는가의 문제를 살펴보았다. 본 논문에서 제안한 교수학적 원리가 더 많은 교육과정 내용과의 연계 및 실행을 통해 수정되고 보완되기를 기대한다.

참 고 문 헌

- 강문봉·강홍규·김수미·박교식·박문환·서동엽·송상현·유현주·이종영·임재훈·정동권·정은실·정영옥 (2008). 초등수학교육의 이해. 서울: 경문사.
- Kang, M. B., Kang, H. K., Kim, S. M., Park, K. S., Park, M. H., Seo, D. Y., Song, S. H., Yoo, H. J., Lee, J. Y., Lim, J. H., Jeong, D. G., Jeong, E. S. & Chong, Y. O. (2008). *Understanding of Elementary Mathematics Education*. Seoul: Kyung Mun Sa.
- 강완·백석윤 (1998). 초등수학교육론. 서울: 동명사.
- Kang, W., Baek, S. Y. (1998). *The Theory of Elementary Education*. Seoul: Dong-Myeong-Sa.
- 교육부 (1992). 중학교 교육과정. 교육부 고시 제 1992-11호.
- Ministry of Education (1992). *Curriculum of Middle school*. Ministry of Education Notice No. 1992-11.
- 교육부 (2015). 수학과 교육과정. 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8].
- Ministry of Education (2015). *Curriculum of Mathematics*. Ministry of Education Notice No. 2015-74 [Separate Book 8].
- 교육부(2015). 제2차 수학교육 종합계획. Retrieved from <http://www.moe.go.kr/boardCnts/view.do?boardID=294&lev=0&statusYN=W&s=moe&m=0503&opType=N&boardSeq=58701>.
- Ministry of Education (2015). *2nd Mathematics Education Comprehensive Plan*. Retrieved from <http://www.moe.go.kr/boardCnts/view.do?boardID=294&lev=0&statusYN=W&s=moe&m=0503&opType=N&boardSeq=58701>.
- 고상숙·박만구·한혜숙 (2013). 교구 및 공학도구를 활용한 수학적 과정중심 평가에 관한 교사들의 인식. 한국학교수학회논문집, **16(4)**, 675-694.
- Choi-Koh, S. S., Park, M. G. & Han, H. S. (2013). Teachers' Perceptions on Process-Focused Mathematics Assessment Using Manipulatives and Technological Devices, *Journal of the Korean School Mathematics*, **16(4)**, 675-694.
- 고호경·김응환·양순열·권세화·권순학·정낙영·장인선·임유원·최수영·이성재·노술·백형윤·홍창섭 (2013). 중학교 수학2. 서울: 교학사.
- Ko, H. K., Kim, E. H., Yang, S. Y., Kwon, S. H., Kwon, S. H., Jeong, N. K., Chang, I. S., Lim, Y. W., Nho, S. Baek, H. Y. & Hong, C. S. (2013). *Middle School Mathematics 2*. Seoul: Kyo-Hak-Sa.
- 김남희 (1999). 수학의 기본 구조 지도와 디즈블럭. 학교수학, **1(1)**, 305-324.
- Kim, N. H. (1999). Teaching the basic structure of mathematics and Dienes block, *School Mathematics*, **1(1)**, 305-324.
- 김남희 (2000a). 교구이용에 대한 교수학적 논의: 대수모델의 활용사례를 통한 교구의 효과 분석을 중심으로. 학교수학, **2(1)**, 29-51.
- Kim, N. H. (2000a). A Didactical Discussion on the Use of Mathematical Manipulatives, *School Mathematics*, **2(1)**, 29-51.

- 김남희 (2000b). 교구: 탱그램 활용을 통한 수학적인 생각의 구체화. 학교수학, **2(2)**, 563-587.
- Kim, N. H. (2000b). Manipulative: Reification of mathematical thinking through the use of tangram, *School Mathematics*, **2(2)**, 563-587.
- 김남희 (2001). 교구: 기하판을 활용한 학교수학의 지도. 학교수학, **3(1)**, 155-184.
- Kim, N. H. (2001). Manipulative: Teaching the School mathematics using geoboards, *School Mathematics*, **3(1)**, 155-184.
- 김남희 (2008). 예비교사와 현직교사를 위한 학교수학과 교구. 서울: 경문사.
- Kim, N. H. (2008). *School Mathematics and Manipulatives for Pre-service Teachers and In-service Teachers*. Seoul: Kyung-Mun-Sa.
- 김성준 (2010). Maths With Attitude 교구 프로그램 활용에 관한 소고. 한국초등수학교육학회지, **14(1)**, 153-176.
- Kim, S. J. (2010). A Study on the Using of 'Maths With Attitude' Programs in Elementary Mathematics Lessons, *Journal of Elementary Mathematics Education in Korea*, **14(1)**, 153-176.
- 김수미 (2000). 수학교육에서의 조작교구에 관한 연구. 학교수학, **2(2)**, 459-474.
- Kim, S. M. (2000). A Study on Manipulative Materials in Mathematics Education, *School Mathematics*, **2(2)**, 459-474.
- 김수환 · 박성택 · 신준식 · 이대현 · 이의원 · 이종영 · 임문규 · 정은식 (2009). 초등학교 수학교육론. 경기도: 동명사.
- Kim, S. H., Park, S. T., Shin, J. S., Lee, D. H., Lee, U. W., Lee, J. Y., Lim, M. G. & Jeong, E. S. (2009). *The Theory of Elementary mathematics education*. Gyeonggido: Dong-Myeong-Sa.
- 김영남 (2002). 구체적 조작물을 이용한 도형 프로그램이 아동의 문제해결력, 수학적 자기효능감, 수학불안에 미치는 효과를 알아보기 위한 분석적 연구. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **13**, 193-214.
- Kim, Y. N. (2002). An analytical study to investigate the effect of figure programs using concrete manipulations on children's problem solving ability, mathematical self-efficacy and mathematics anxiety, *J. Korean Soc. Math Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **13**, 193-214.
- 김응태 · 박한식 · 우정호 (2007). 수학교육학개론. 서울: 서울대학교출판부.
- Kim, E. T., Park, H. S. & Woo, J. H. (2007). *An Introduction to mathematics education*. Seoul: SNU press.
- 박경선 (2008). Skemp 이론에 따른 곱셈구구 놀이 활동이 수학적업성취도 및 수학적 태도에 미치는 영향. 서울교육대학교 교육대학원 석사학위논문.
- Park, K. S. (2008). *The Effect of Multiplication Table Play-activities According to Skemp's Theory on Achievements of and Attitudes Towards Mathematics Learning*. Master Thesis of Seoul National University of Education.
- 손홍찬 (2011). 우리나라 수학교육에서 공학 활용의 역사와 현황. 학교수학, **13(3)**, 525-542.
- Son, H. C. (2011). Trend and Prospect on Using Technology in Mathematics Education in Korea, *School Mathematics*, **13(3)**, 525-542.
- 신종석 · 표용수 (2011). 수학교구를 활용한 수업의 흥미도 및 문제해결력 신장에 관한 연구. East Asian Mathematical Journal, **27(2)**, 117-139.
- Shin, J. S. & Pyo, Y. S. (2011). A Study on the Improvement of Interest in Lessons and Problem Solving Ability Using Mathematical tools, *East Asian Mathematical Journal*, **27(2)**, 117-139.
- 안병곤 (2003). 초등수학수업에서 활동중심 교수학습자료 활용에 대한 조사연구. 학교수학, **5(2)**, 241-257.
- Ahn, B. G. (2003). A Study of Instructional Materials for Activity-Centered Teaching in Elementary Mathematics, *School Mathematics*, **5(2)**, 241-257.
- 우정호 (2011). 학교 수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판부.
- Woo, J. H. (2007). *Educational Basis of School Mathematics*. Seoul: SNU press.

- 유충현 · 김한울 · 박효민 · 김태현 · 김한솔 (2013). 지오지브라를 이용한 수학적 흥미 및 동기유발. 한국수학교육학회 2013 춘계학술대회 프로시딩, 335-341.
- Yu, C. H., Kim, H. U., Park, H. M., Kim, T. H. & Kim, H. S. (2013). Inducing Mathematical Interest and Mathematical Motivation Using GeoGebra, *The Korean Society of Mathematical Education 2013 Spring Conference Proceedings*, 335-341.
- 이강섭 · 심상길 (2005). 창의성 증진을 위한 수학 활동 프로그램과 평가 방법의 소개. 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, **19(1)**, 101-110.
- Lee, K. S. & Shim, S. K. (2005). An Introduction to Mathematics Activity Programs and Evaluation Methods for Improving Creativity, *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. E: Communications of Mathematical Education*, **19(1)**, 101-110.
- 이준열 · 최부림 · 김동재 · 송영준 · 윤상호 · 황선미 (2012). 중학교 수학2. 서울: 천재교육.
- Lee, J. Y., Choi, B. R., Kim, D. J., Song, Y. J., Yoon, S. H. & Hwang, S. M. (2012). *Middle School Mathematics 2*, Seoul: Chun-Jae education.
- 임영빈 · 홍진곤 (2016). 구체물의 추상화와 추상적 개념의 구체화에 나타나는 초등학생의 수학적 사고 분석. 학교수학, **18(1)**, 159-173.
- Yim, Y. B., & Hong, J. G. (2013). Primary Students' Mathematical Thinking Analysis of Between Abstraction of Concrete Materials and Concretization of Abstract Concepts. *School Mathematics*, **18(1)**, 159-173.
- 장경윤 (2015). 수학교육과 테크놀로지: 연구의 추세와 쟁점. 고상숙(편). 수학교육에서 공학적 도구 (24-39). 서울: 경문사.
- Chang, K. Y. (2015). Mathematic Education and Technology: Trends and Issues in Research, Choi-Koh, S. S(Ed), *Technology in Mathematical Education* (pp. 24-39). Seoul: Kyung-Mun-Sa.
- 장훈 (2008). 체험수학-교구를 이용한 삼각형의 내심과 외심 지도. 한국수학교육학회 학술논문발표집, **2008(1)**, 37-45.
- Chang, H. (2008). Experience Mathematics - Teaching a Circumcenter and an Incenter of Triangle Using Manipulatives, *Proceeding of the korean society of mathematical education conference on mathematical education*, **2008(1)**, 37-45.
- 정동권 (2001). 수학교실에서 기하판의 활용 의의와 활용 사례 분석. 학교수학, **3(2)**, 447-473.
- Jeong, D. G. (2001). Significance and Analyzing Episode on Using Geoboards in Mathematics Classroom, *School Mathematics*, **3(2)**, 447-473.
- 정상권 · 이재학 · 박혜숙 · 홍진곤 · 박부성 · 강은주 · 오화평 (2013). 중학교 수학2. 서울: 금성출판사.
- Chung, S. K., Lee, J. H., Park, H. S., Hong, J. K., Park, P. S., Kang, E. J. & Oh, H. P. (2013). *Middle School Mathematics 2*, Seoul: Kum-Sung publisher.
- 조정수 (2015). 공학적 도구 활용에서 통합적 관점. 고상숙(편). 수학교육에서 공학적 도구 (40-51). 서울: 경문사
- Cho, C. S. (2015). An Integrated Perspective in the Use of Technology, Choi-Koh, S. S(Ed), *Technology in Mathematical Education* (pp. 40-51). Seoul: Kyung-Mun-Sa.
- 최경식 (2012). 지오지브라를 활용한 통계, 미적분, 3차원 기하교육. 한국수학교육학회 학술논문발표집, **2012(2)**, 261-268.
- Choi, K. S. (2012). Statistics, Calculus, 3D Geometry Education using GeoGebra, *Proceeding of the korean society of mathematical education conference on mathematical education*, **2012(2)**, 37-45.
- 최경식 · 김동석 (2013). 지오지브라를 활용한 미적분학 교육. 한국수학교육학회 학술논문발표집, **2013(1)**, 467-472.
- Choi, K. S. & Kim, D. S. (2013). Calculus, Education using GeoGebra, *Proceeding of the korean society of mathematical*

- education conference on mathematical education*, **2013(1)**, 467-472.
- 최창우 (2014). *수학교육과 교구*. 서울: 경문사.
- Choi, C. W. (2014). *Mathematics Education and Manipulatives*, Seoul: Kyung-Mun-Sa.
- 한세호 · 장경윤 (2009). 고등학교 수학 문제해결에서 CAS의 도구발생. *학교수학*, **11(3)**, 527-546.
- Han, S. H. & Chang, K. Y. (2009). Instrumental Genesis of Computer Algebra System(CAS) in Mathematical Problem Solving among High School Students, *School Mathematics*, **11(3)**, 527-546.
- 황우형 · 김명선 (2001). 학습부진아의 수학지도시 구체적 조작물의 효율성에 관한 연구: Unit Cubes를 활용한 중학교 1학년 기수법 지도. *학교수학*, **3(2)**, 215-231.
- Hwang, W. H. & Kim, M. S. (2001). A Study on the Effectiveness of the Manipulatives in Teaching of Sstudents with Mathematics Learning Disability, *School Mathematics*, **3(2)**, 215-231.
- 황혜정 · 나귀수 · 최승현 · 박경미 · 임재훈 (2012). *수학교육학 신론*. 서울: 문음사.
- Hwang, H. J., Na, G. S., Choi, S. H., Park, K. M., & Yim, J. H. (2007). *The Theory of Mathematics Education*. Seoul: Moon-Um-Sa.
- 홍진곤 (2007). 수와 연산. 김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤(편). *수학교육과정과 교재연구* (2-50). 서울: 경문사.
- Hong, J. G. (2007). Numbers and . Kim, N. H., Na, G. S., Park, K. M., Lee, K. H., Jeong, Y. O., & Hong, J. G. (Eds). *Curriculum of Mathematics and Materials Research* (pp. 2-50). Seoul: Kyung-Mun-Sa.
- Artigue, M. (2001). What can we learn from educational research at the university level?. In *The teaching and learning of mathematics at university level*(207-220). Springer Netherlands.
- Boggan, M., Harper, S., & Whitmire, A. (2010). Using Manipulatives to Teach Elementary Mathematics. *Journal of Instructional Pedagogies*, **3**, 1-6.
- Drijvers, P. H. M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter*. Doctoral Dissertation, Freudenthal Institute, Utrecht University, the Netherlands.
- Drijvers, P., & Gravemeijer, K. (2005). *Computer algebra as an instrument: Examples of algebraic schemes*. In *The didactical challenge of symbolic calculators* (pp. 163-196). Springer US.
- English, L. D. (2004). *Mathematical and analogical reasoning in early childhood*. In *Mathematical and analogical reasoning of young learners*, (pp. 1-22). Mahwah : Lawrence Erlbaum Associates.
- Fennema, E. (1973). Manipulatives in the classroom. *Arithmetic Teacher*, **20**, 350-352.
- Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for research in Mathematics Education*, **25(5)**, 443-471.
- Haspekian, M. (2005). An “instrumental approach” to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: the case of spreadsheets. *International journal of computers for mathematical learning*, **10(2)**, 109-141.
- Heddens, J. (1986). Bridging the Gap Between the Concrete and the Abstract. *Arithmetic Teacher*, **33(6)**, 14-17.
- Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of Linking Geometry and Algebra: The Case of Geogebra, *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, **27(3)**, 126-131.
- Saidu, S., & Bunyamin, S. (2016). Effects of Geoboard and Geographical Globe on Senior Secondary School Students’ Performance in Mathematics in Kaduna State. *Journal of Science, Technology & Education*, **4(1)**, 140-148.

- Sierpinska, A., & Lerman, S. (1997). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In A. J., Bishop (Ed.). *International handbook of mathematics education* (pp. 827-876). Springer Netherlands.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for mathematical learning*, **9(3)**, 281-307.
- Vinner, S. (2002). *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics*. In Advanced mathematical thinking (pp. 65-81). Springer Netherlands.
- Wittmann, E. C. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics*, **48(1)**, 1-20.

Suggestion and Application of Didactical Principles for Using Mathematical Teaching Aids

Lee Kyeong Hwa

Seoul National University
E-mail : khmath@snu.ac.kr

Jung Hye Yun[†]

Graduate School, Seoul National University
E-mail : hy0501@snu.ac.kr

Kang Wan

Seoul National University of Education
E-mail : wkang@snu.ac.kr

Ahn Byoung Gon

Gwangju National University of Education
E-mail : bgahn@gnue.ac.kr

Baek Do Hyun

Graduate School, Seoul National University
E-mail : dhbaek910@snu.ac.kr

The purpose of this study is to suggest didactical principles for using mathematical teaching aids and to applicate didactical principles in a relation with curriculum. First, we meta-analyzed related literature to suggest didactical principles for using mathematical teaching aids. And we suggested didactical principles as follows: principle of activities, principle of instruments, principle of learning. Using mathematical teaching aids with didactical principles in mind would help avoiding situations in which mathematical teaching aids are only used as interesting tools. Second, we concretized the meaning to applicate didactical principles and use mathematical teaching aids in a relation with curriculum. We considered domain, key concept, function, achievement standard, which were presented in the curriculum of mathematics, and suggested concrete activities. Third, we produced two designs for lessons on incenter and circumcenter of triangle and linear function's graph using mathematical teaching aids.

* ZDM Classification : U73

* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U60

* Key words : mathematical teaching aids, didactical principles, curriculum of mathematics

[†] Corresponding author