韓國數學敎育學會誌 시리즈 E <數學敎育 論文集>
https://doi.org/10.7468/jksmee.2017.31.2.223
제 31집 제 2호, 2017. 5. 223-239

J. Korea Soc. Math. Ed. Ser. E:
Communications of Mathematical Education
Vol. 31, No. 2, May. 2017. 223-239

초등영재 학생의 수학화 학습을 위한 교수단원 설계: 삼·사각형의 등주문제 탐구

최 근 배 (제주대학교)

이 논문에서는 초등 영재학생들에게 수학화의 경험을 주기 위한 교수단원 〈삼·사각형의 등주문제〉를 설계하는 것이 목적이다. 이를 위해서, 각 조별 학생들의 문제 해결과정 중에 나타나는 사고과정을 바탕으로 교사와 수업관찰자(연구자)가 수업분석을 통하여 교수단원 설계와 관련된 논의를 하였다. 교육적 시사점을 줄 수 있는 논의 내용을 요약하면 다음과 같다. 첫째, 학생들의 인지적인 간극을 줄이기 위한 교구활용을 고려해야한다. 둘째, 삼각형에서 삼각형이 지닌 속성인 변의 개념과 추상적인 속성인 높이 개념과의 관계를 심도 있게 다룰 필요가 있다. 셋째, 귀납적인 추론으로부터 시작하여 추론을 정당화하는 낮은 수준의 연역적인 논리가 필요하다. 끝으로, 도형을 보는 직관(spatial sense)에 영향을 줄 수 있는 도형의 개념이미지를 조사할 필요성이 있다.

Ⅰ. 서론

이 연구는 삼각형과 사각형의 등주문제(isoperimetric problem)를 학습소재로 한 교수단원(teaching units) 설계와 관련되어 있다. 이 교수단원 설계에 바탕이 되는 교수학습 이론은 Freudenthal의 '수학화(mathematisation; Freudenthal, 1973)'이다.

수학적 개념은 현상을 이해하기 위한 조직화의 과정을 통해서 만들어진다. 이러한 조직화의 과정이 바로 수학화라고 할 수 있다. 수학자들은 주어진 임의의 '현상'을 이해하기 위한 수단으로서의 '본질'을 만든다. 본질이 현상을 조직화하고 나면, 그 본질을 다시 새로운 현상으로 보고 이를 조직화 하는 새로운 본질을 만드는 연속된 수학화의 활동이 일어날 수 있다 (박교식, 1992; 정영옥, 1997). 결국, 수학화는 '수학자가 수학을 만드는 과정'과 같은 활동이라고 할 수 있다. 순수수학에서는 수학화의 과정보다 결과물을 중시하는 경향이 있지만, 수학교육의 관점에서는 조직화의 과정이 결과보다 더 강조되어야한다. 다시 말해서, 학습자 스스로가 수학자가 되어 자신만의 결과물을 만들어 가는 과정을 경험할 수 있도록 하는 것이 수학교육의 핵심이 되어야 한다는 것을 의미한다. 2009 개정 교육과정에서 수학의 과정(mathematical process)을 강조하고 있는 것도 이와 같은 맥락으로 볼 수 있다.

교수단원은 어떤 특정한 수학 지식의 교수라는 목표를 성취할 수 있도록 체계적으로 디자인해 놓은 교수·학습 내용 전체를 의미한다고 볼 수 있다(Wittmann, 1984, 1995, 2001; 김진환, 박교식, 2006에서 재인용). Wittmann(1995, pp.365-366)에 의하면 교수 단원은 다음과 같은 성질의 것으로 특징화 할 수 있다. 첫째, 수학교수의 핵심적인 목적, 내용 및 원리를 나타낸다. 둘째, 수학적 활동을 위한 풍부한 자원을 제공한다. 셋째, 특수한 교실 상황에 쉽게 적용될 수 있을 뿐만 아니라 융통성이 있다. 넷째, 교수·학습의 수학적, 심리학적, 교육학적 측면을 전체적인 방법으로 포함한다. 따라서 경험적 연구를 위한 광범한 잠재력을 제공한다. Wittmann(1995)의

---

* 접수일(2017년 1월 5일), 심사(수정)일(2017년 3월 31일), 게재확정일(2017년 4월 3일)
* ZDM분류 : M19, D59, G19
* MSC2000분류 : 97D50, 97B50
* 주제어 : 교수단원, 등주문제, 수학화

용어로 ‘실속 있는’ 교수 단원은 설계하는 사람의 능력에 많은 영향을 받으며, 또한 충실한 ‘사고실험(Freudenthal, 1991)’의 소산이며, 교수단원의 평가는 그 교수단원을 사용한 수학 교수·학습의 과정을 통해서 이루어질 수 있다(김진환, 박교식, 1991).

한편, 이 논문의 교수단원 학습소재인 등주문제 (Blasjo, 2005; Demjanenko, 2008; Hildebrandt & Tromba, 1996; Tapia, 2009)는 고대 그리스까지 거슬러 올라가는 긴 역사를 가진 최적화 문제이다. 특히, 다각형 등주문제의 기하적인 방법을 이용한 문제해결 전략은 다음과 같은 점에서 교수단원으로서 가치를 지닌다. 첫째, 도형과 관련된 직관 즉, 공간감각(spatial sense)을 알아볼 수 있는 좋은 소재 (최근배, 2009, 2011; 최근배, 채정림, 2014)이다. 둘째, 과거 수학자가 문제해결에 사용한 수학적 사고와 학생들의 수학적 사고를 비교해 볼 수 있는 경험을 우리에게 준다. 끝으로 도형의 넓이와 둘레 사이의 관계를 이해하는데 도움을 주는 학생들에게 친숙한 학습소재이다.

이 연구에서는 초등영재 학생의 수학화 학습을 위한 교수단원 〈삼·사각형의 등주문제〉 설계에 관한 수학적 논의를 목적으로 한다. 특히, 이 교수단원은 초등영재교육을 목적으로 하는 교사를 대상으로 한다. 영재 담당 교사가 초등영재학생을 대상으로 한 교수·학습에서 학생들의 효율적인 수학화를 안내 할 수 있기 위해서는 교사 자신의 실제적인 수학화의 경험이 있어야 한다. 교수단원 〈삼·사각형의 등주문제〉에서 ‘현상’은 학생들의 특정한 현실로 삼각형과 사각형의 넓이와 둘레와 관련된 지식들이다. 또한 각 탐구문제에서 삼각형의 넓이와 둘레의 길이와의 관계를 추측하는 과정을 수평적 수학화(Treffers, 1987)로 그 관계를 정당화하는 과정을 수직적 수학화(Treffers, 1987)로 본다.

Ⅱ. 연구 방법

이 연구는 삼각형과 사각형의 등주문제를 소재로 한 수업에서 ‘실제적인 초등 영재학생들의 수학화의 결과물’과 ‘수업 후의 담당교사와 연구자(수업관찰자)의 논의’를 통해서 영재 강사들의 실제적인 수학화 경험을 주기위한 교수단원 설계에 관한 논의를 진행하였다.

교수단원 〈삼·사각형의 등주문제〉 설계의 기본적인 연구 방법은 다음과 같다. 먼저, 등주문제와 관련된 탐구문제를 학생들에게 제시하였다. 실제로, 학생들에게 투입된 총 수업시수는 9시수로 삼각형의 등주문제 6시수, 사각형의 등주문제 3시수이었다. 이 단계에서는 탐구문제와 관련된 각 조별 해결과정을 살폈고(수업관찰자, 연구자) 또한 그 결과를 발표시켰다. 이를 통해서 학생들의 사고과정을 알아보았다. 둘째, 첫 번째 단계에서 나타난 학생들의 사고과정을 바탕으로 교사와 연구자(수업관찰자)가 수업분석을 통하여 교수단원 설계와 관련된 실제적 논의를 진행하였다. 여기에는 교사와 연구자의 다양한 관점에서의 사고실험이 일어난다.

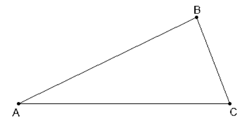
Ⅲ. 연구의 실제

1. 삼각형의 등주문제

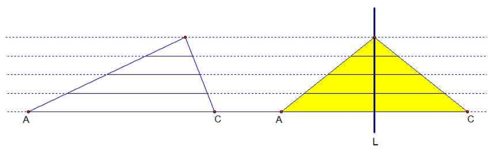
학교수학에서는 삼각형 및 직사각형, 정사각형, 평행사변형, 사다리꼴, 마름모와 같은 특수한 형태의 사각형의 넓이와 둘레의 길이를 다루고 있으며, 특히 넓이의 경우는 도형의 변형의 과정을 통해서 공식을 유도하고 있다. 예를 들어, 삼각형의 넓이는 같은 모양의 삼각형 두 개를 사용하여 평행사변형으로 변형하여, 이미 학습한 평행사변형넓이를 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다. 이는 학습에서 도구적 이해(instrumental understanding)보다는 관계적 이해(relational understanding)의 관점을 취하고 있음을 알 수 있다. 그러나 주어진 다각형의 넓이와 둘

레의 길이와의 관계를 취급하지 않는다. 따라서 이 연구에서는 초등 영재학생을 위한 수학화 교수·학습에서 '현상'을 학교수학에서 배운 다각형의 넓이와 둘레와 관련된 내용(탐구문제 1, 여기서는 생략)으로, 적절한 조건하에서 주어진 다각형의 넓이와 둘레의 길이 사이의 관계를 조직화하는 것 또는 그 과정을 '본질'로 본다. 이 논문에서는 교수단원 설계에 본질적인 측면만 논의한다.

탐구문제 2: 다음에 주어진 삼각형을 변형하여, '둘레의 길이는 더 짧지만 넓이는 같은' 삼각형을 그리고 이유를 설명하여라.



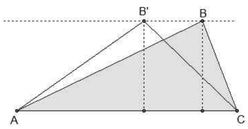
등주문제의 역사적 관점에서, 탐구문제 2를 살펴보면 [그림 Ⅲ-1]과 같은 Steiner의 대칭화(Treibergs, 2008)와 깊은 관련성이 있다. 실제로, 주어진 직선에 관한 대칭화는 도형의 넓이는 변화시키지 않고 둘레의 길이를 짧게 만드는 변형을 초래한다.



[그림 Ⅲ-1] Steiner의 직선 L에 관한 대칭화(Symmetrize about line L)

학생들의 반응 분석: 위의 탐구문제 2에서, 2조를 제외한 모든 다른 조는 귀납적인 방식으로 문제를 해결하였다. 즉, 주어진 삼각형과 넓이가 같은 특수한 삼각형을 만들어 둘레의 길이를 비교하였다. 삼각형 넓이의 두 변수인 밑변과 높이를 고정시키고 넓이의 변화를 생각해보는 사고를 하지 못하였다. 반면, 2조인 경우는 비록 문제는 해결하지 못 했지만 [그림 Ⅲ-2]와 같이 밑변과 높이를 고정시키고 두 삼각형 둘레 길이의 변화를 살펴보는 사고를 하였다. 다음은 2조의 에피소드이다.

S_1: 밑변의 길이를 고정하고 생각해보자. 넓이가 같으려면 높이가 같아야 되지.

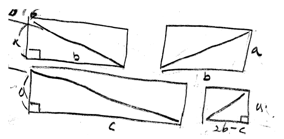


[그림 Ⅲ-2] 삼각형 등적변형과 둘레의 길이

여기서 삼각형 ABC의 두 변의 합 $AB+BC$와 삼각형 $AB'C$의 두 변의 합 $AB'+B'C$의 크기를 비교해 보면 되지.

S_2: 어떻게 비교하지?

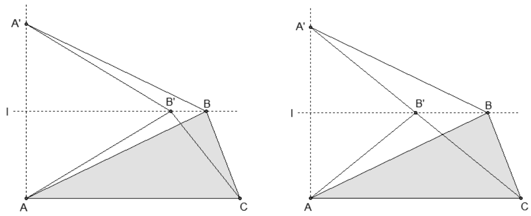
S_1: 음. ([그림 Ⅲ-3]를 가리키며) 두 삼각형 ABC와 $AB'C$를 각각 두 개의 직각삼각형의 합으로 보고..피타고라서의 정리를 사용하면...계산이 복잡하고...



[그림 Ⅲ-3] 직사각형의 대각선을 이용한 아이디어

T: 두 점사이의 거리를 생각해 보면 어떨까? 언제 최단거리지?
S: ...
T: 평면에 두 점을 고점하고, 두 점을 각 삼각형의 두 변을 이어서 비교하는 방법을 생각해 보세요.
S: ...

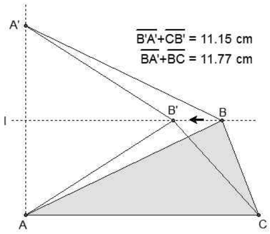
위의 에피소드에서, 학생 S_1은 두 삼각형의 공통변인 선분 AC를 제외한 두 변의 합을 비교하고자 피타고라서 정리(중학교과정을 이미 배운 듯)를 사용하고자 하였으나 아이디어를 찾지 못했다. 교사가 대칭성을 이용한 정당화의 방법([그림 Ⅲ-4] 참조)을 고려해 보도록 발문을 통한 도움을 주고 있지만 학생들은 별다른 아이디어를 보여 주지 못하였다.



[그림 Ⅲ-4] 대칭성을 이용한 아이디어

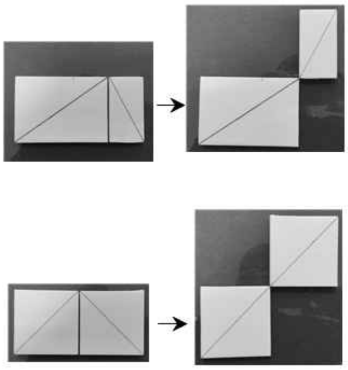
수업분석 및 논의: 탐구문제 2의 수업이 끝난 후, 교사(T)와 수업 관찰자(O)간의 수업분석을 통하여 교사의 의도와 학생들의 반응사이의 인지적 간극을 좁히기 위한 효율적인 학습 프로그램과 관련된 논의를 진행하였다. 원래 주어진 탐구문제의 의도는 학생들의 수학적 추론과 정당화의 능력을 알아보는 것이다. 이를 테면, 삼각형의 넓이를 결정하는 두 변수(밑변과 높이) 중 어느 한 변수를 고정하고 다른 변수의 평면에서의 위치에 고려해 보려는 사고와 관련된 것이다. 따라서 교수단원 설계에서 학생들의 반응과 대칭성을 이용하는 전략사이의 간극을 줄일 수 있는 방안을 고려하여야 한다.

먼저, 2조를 제외한 모든 다른 조는 귀납적인 방식으로 문제를 해결하고 있지만, 이는 교수·학습에서 의도하고자하는 수학화의 활동 없이 단순한 측정활동만이 있었을 뿐이다. 즉, 추론의 과정이 없었다. 이를 위한 하나의 방안으로 GSP(Geometer's Sketchpad) 프로그램을 이용한 귀납적인 추론의 방식을 도입한다. 즉, [그림 Ⅲ-5]에서 점 B를 좌·우로 움직여서 길이의 합을 살펴본다. 결국 동점 B'이 고정된 두 점 A'과 C를 잇는 직선과 직선 l이 만나는 곳에 위치하고 있을 때 길이의 합이 가장 짧다.



[그림 Ⅲ-5] GSP를 이용한 추론

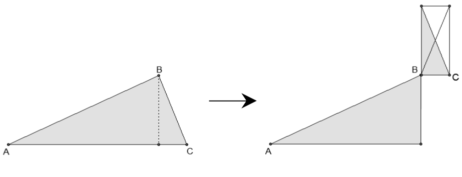
둘째, 2조의 학생 S_1이 피타고라서의 정리를 적용하기 위해서 각 삼각형을 두 개의 직각 삼각형으로 나누는 아이디어([그림 Ⅲ-3] 참조)를 이용하여, [그림 Ⅲ-6]와 같이 교구를 만들어 활용하는 방법이다.



[그림 Ⅲ-6] 교구활용

실제로, 교사는 수업 전(연구자와의 프로그램과 관련된 대화에서)에 대칭성을 이용한 증명의 아이디어([그림 Ⅲ-4] 참조)가 초등 영재 학생들에게서 발현되리라고는 생각하지 않았으며 항상 '어떻게 이 아이디어를 초등학생 수준에서 다룰 수 있을까?'라는 고민을 하고 있었다. 그러던 중에 2조의 학생 S_1의 '삼각형을 두 개의 직각 삼각형으로 나누는 아이디어를 관찰'하고 수업 중간에 이 방법을 적당히 수정하면 되리라고 생각했었든 것 같았다.

T: 학생 S_1의 아이디어를 생각해봅시다. 주어진 삼각형을 직각삼각형 두 개로 나누어 생각해 보세요.



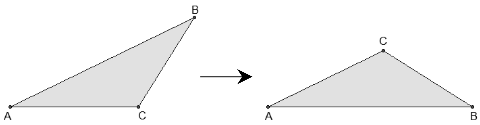
S: 두 조각을 내고...어떻게 하지?

T: 조각을 다양한 방법으로 움직여 보세요.

...

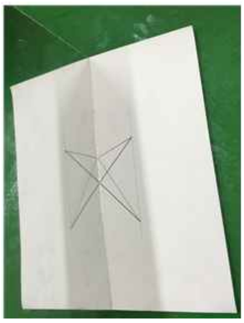
그러나 학생들에게 이러한 방법으로 설명을 시도하는 중간에 문득 [그림 Ⅲ-7]의 좌에서 같이 ‘주어진 삼각형에서 빗변이 아닌 두변이 이루는 각이 예각이 아닌 경우는 어떻게 조각을 내지?’라는 생각이 떠올랐었는지 두 개의 직각 삼각형 나누는 증명방법을 포기하고 원래 가지고 있던 대칭성을 이용한 증명([그림 Ⅲ-4] 참조)으로 되돌아갔다.

탐구문제 2의 수업이 끝난 후 ‘주어진 삼각형이 빗변이 아닌 두변이 이루는 각이 예각이 아닌 경우에는 [그림 Ⅲ-7]와 같이 빗변을 밑변으로 생각하면 된다.’는 사실을 교사는 관찰자와 논의 과정에서 발견했다.



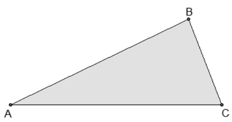
[그림 Ⅲ-7] 밑변의 선택

끝으로, 거울을 이용한 아주 유용한 방법이 있다. 수학에서의 대칭성 문제는 결국 [그림 Ⅲ-8]과 같이 거울상을 이용하는 것으로 귀결된다. 그러나 초등 수학 교육과정에서 공간감각 기르기의 일환으로 합동변환의 중요 요소인 ‘뒤집기(flip)’ 개념을 이해하기 위한 수단으로 거울상을 도입하고 있음에도 불구하고, 학생들은 물론 영재 담당 강사(교사)도 탐구문제 2를 해결함에 거울을 사용하는 아이디어를 쉽게 떠올리지 못하였다.



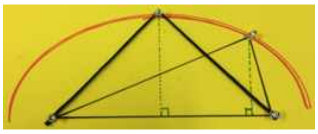
[그림 Ⅲ-8] 두 삼각형의 거울상

탐구문제 3: 다음에 주어진 삼각형을 변형하여, ‘넓이는 더 넓지만 둘레의 길이는 같은’ 삼각형을 그리고 이유를 설명하여라.



탐구문제 3은 탐구문제 2와 동치가 되는 명제이다. 문제해결 전략은 기본적으로 타원변형을 이용하는 것이다.

학생들의 반응 분석: 탐구문제 2와 마찬가지로 2조를 제외한 모든 조가 특수한 예를 들어서 귀납적 정당화를 시도하였다. 모든 조가 문제해결에 마땅한 아이디어를 찾지 못하고 있어 도움([그림 Ⅲ-9] 참조)을 주기 위해서 끈과 핀을 제공하였다. 그러나 모든 조가 주어진 교구를 활용하여 아이디어를 도출하는데 실패하였다.



[그림 Ⅲ-9] 높이의 변화

다음은 2조의 활동을 관찰한 에피소드이다.

S_1: $2+6=8, 3+5=8, 4+4=8$ 이고 $2\times 6=12, 3\times 5=15, 4\times 4=16$ 이니까...밑변과 높이의 차이가 작으면...

S: 무슨 말이지? 문제 해결?

S_1: 모르겠다.

위의 에피소드에서 학생 S_1은 삼각형의 넓이를 크게 만드는 활동에만 집중한 나머지 밑변과 높이와의 관계에만 신경을 쓰고, 둘레의 변화를 간과하고 있다. 이 학생은 밑변이 늘어나거나 줄면 높이도 그만큼 줄거나 늘어나 결국 둘레의 길이는 변화가 없을 것이라고 생각하고 있다. 실제로, 2+6=8, 3+5=8, 4+4=8에서 앞의 2, 3, 4는 밑변의 길이를 의미하고 또한 뒤의 숫자 6, 5, 4는 높이를 8은 고정된 둘레의 길이를 나타내고 있다.

수업분석 및 논의: 학생 S_1에게는 교구로 주어진 끈이 오히려 사고과정에 나쁜 영향을 준 것으로 보인다. 즉, 활동에서 '주어진 끈으로 삼각형을 만들고 밑변과 높이를 늘이거나 줄이는 활동에서 밑변이 늘어나면 높이는 줄고 또 밑변이 줄면 높이는 늘어나지만 끈의 길이 변화는 없기 때문'에 이러한 착각에 빠졌다. 따라서 교수단원 설계에서 밑변과 높이가 같은 크기로 변화할 때 둘레의 길이를 측정해보는 활동이 필요하다. 예를 들어, <표 Ⅲ-1>과 같이 '직각삼각형'과 '이등변 삼각형'인 경우에 한정하여 둘레의 변화를 살펴보는 활동을 한다.

<표 Ⅲ-1> 삼각형 둘레 길이의 변화

밑변	1	2	3	4
높이	7	6	5	4
직각삼각형 둘레의 길이	15.0711	14.3246	13.8310	13.6569
이등변 삼각형 둘레의 길이	15.0356	14.1655	13.4403	12.9443

한편, 한 변(밑변)을 고정([그림 Ⅲ-9]에서 변의 양 끝점을 핀으로 고정)하고 높이의 변화를 관찰하는 활동을 해야 아이디어를 얻을 수 있는데, 이 학생(S_1)은 밑변을 고정하지 않고 활동을 해서 문제해결 전략은 좋았지만

만족할만한 결과를 얻지 못하였다.

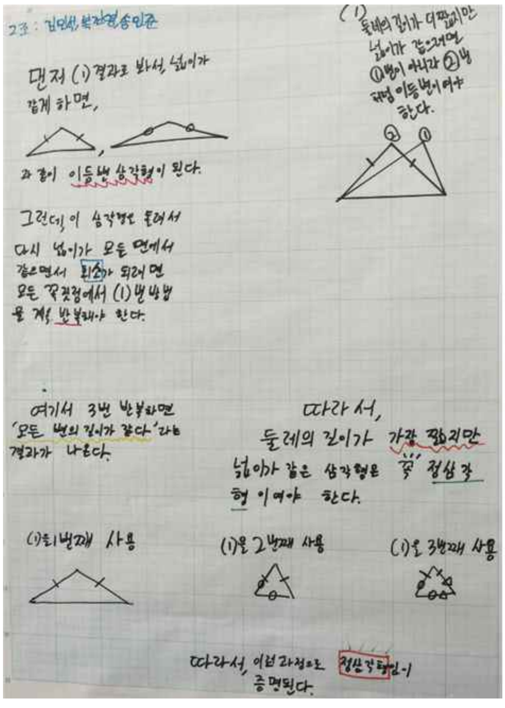
탐구 문제 4 (삼각형의 등주문제)

(1) 둘레의 길이가 같은 삼각형 중에서 넓이가 가장 넓은 삼각형은?

(2) 넓이가 같은 삼각형 중에서 둘레의 길이가 가장 짧은 삼각형은?

탐구문제 4는 실질적인 삼각형의 등주문제로 각 조에서 (1)과 (2) 중 하나를 선택해서 문제를 해결하도록 하였다. 실제로 (1)과 (2)는 동치인 문제이다. 이 탐구문제의 주된 관심사는 첫째, 앞선 탐구문제와의 관련성을 파악하고 이로부터 어떻게 문제를 해결하고 있는가? 둘째, 수학적 증명의 논리성에 관한 것이다.

학생들의 반응 분석 1: 2조의 문제해결 아이디어를 살펴보면 다음과 같다. 이 조는 탐구문제 4의 (2)을 선택해서 문제를 해결하려고 했다. 이러한 생각은 [그림 Ⅲ-10]에서처럼 기존에 학습했던 문제인 탐구문제 2번을 사용하려는 생각에서 기인된 것처럼 보인다.



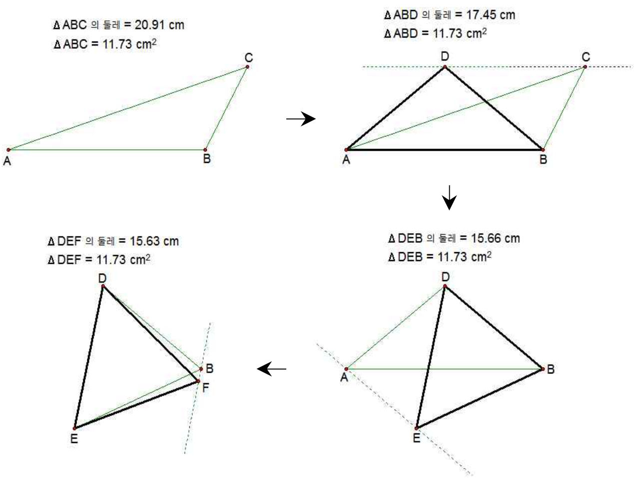
[그림 Ⅲ-10] 2조의 문제해결 아이디어

T: 3번의 과정을 통해서 정삼각형을 만들 수 없는 경우도 생기죠? [그림 Ⅲ-11]의 3번의 과정을 통해서 만들어진 삼각형(왼쪽 밑의 삼각형)은 정삼각형인가요?

S: 아니요.

T: 그럼. 계속 같은 행위를 시도할 수도 있겠네요? 무한루프에 빠질 수도 있겠네요? 언제 끝날까요?[1)]
S: 정삼각형?
O: 그럼. 3번의 과정을 통해서 알 수 있는 사실은 무엇인가요?[2)]
S: 넓이는 같지만 둘레의 길이는 점점 짧아져요.
O: 만일 이러한 활동을 계속하면 어떻게 될까요?
S: 음. 넓이는 같지만 둘레의 길이는 점점 짧아지겠죠.
O: 만일 둘레의 길이가 계속 짧아지면([그림 Ⅲ-11] 참조) 그 길이가 0이 될 수 있겠네요.
S: 뭐지? 그러면 넓이도 0이 되잖아요. 이 활동은 넓이를 변화시키지 않는데...
T: 더 이상 둘레의 길이를 (짧게)변화시킬 수 없는 경우는 어떤 경우인가요?
S: 정삼각형이요.

수업분석 및 논의 1: [그림 Ⅲ-10]의 증명 아이디어를 살펴보자. 기존에 알고 있는 지식(탐구 문제 2)을 잘 사용하고 있지만 논리적인 문제점이 나타나있다. 실제로, [그림 Ⅲ-10]은 넓이를 보존하면서 인접한 두 변을 같게 만드는 변형을 3번 반복하면 '모든 변의 길이가 같다'라는 사실을 이야기하고 있지만, 항상 정삼각형이 되는 것은 아니다. 하지만 '넓이를 보존하면서 인접한 두 변을 같게 만드는 변형을 연속적으로 충분히 많이 사용하면 어떻게 될까?' 라는 수열과 관련된 흥미로운 수학적 추측(담당교사는 인식하지 못하고 수업관찰자가 아이디어 제공)을 낳을 수 있다는 점에서 좋은 교육적 시사점을 찾을 수 있다.



[그림 Ⅲ-11] 넓이 보존 연속된 변형

탐구문제 4의 수업이 끝난 후 담당교사(T)와 연구자(O)간의 좀 더 수학적인 논의가 진행되었다.

O: 학생들과의 대화에서 탐구 문제 4의 답이 정삼각형이라는 결론을 내렸는데 확신할 수 있나요?
T: 그냥 직관적으로...

1) 교사는 둘레의 길이변화를 고려하고 있지 않고 있으며, 직관적인 접근을 하고 있다.
2) 수업관찰자(연구자)가 좀 더 구체적인 접근을 시도하고 있다.

O: 음. 무한 루프에 빠질 수 있겠네요?
T: 그런가요?
O: 혹시 단조 수렴 정리에 대해서 들어 본적 있나요?
T: ???

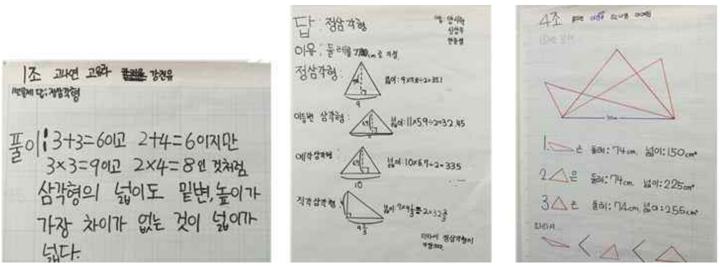
수학적으로 보면, 넓이를 보존하면서 인접한 두 변을 같게 만드는 변형에 따른 둘레의 길이를 나타내는 수열은 유계인 단조 감소 수열(bounded monotone decreasing sequence)임을 알 수 있다. 따라서 이 수열은 수렴함을 알 수 있고, 수렴 값에 대응되는 삼각형은 정삼각형임을 알 수 있다.

O: 좀 더 논리적인 접근을 해볼까요. 편의상, 넓이가 같은 삼각형 중에서 둘레의 길이가 가장 짧은 삼각형을 P 라고 합시다. 만일 P 가 정삼각형이 아니라면?
T: P 에는 서로 다른 길이의 두 변이 존재하겠지요.
O: 계속해 보세요.
T: 음...탐구 문제 2에서와 같은 넓이를 보존하면서 인접한 두 변을 같게 만드는 변형을 사용하면 P 와 넓이는 같지만 둘레의 길이가 더 짧은 삼각형 Q를 만들 수 있어요. 이는 모순이고 따라서 P 는 정삼각형이여야만 합니다.
O: 선생님의 논리에 미비한 점은 없는가요?
T: 예. 없는 것 같아요.

위의 대화에서 넓이가 같은 삼각형 중에서 둘레의 길이가 가장 짧은 삼각형 P 의 존재성 문제를 교사가 인식하지 못하고 있음을 알 수 있다. 엄밀히 따지면 위의 논리는 존재성을 가정하고 시작된 논리이다. 등주문제의 존재성과 관련된 수학적인 논의는 Spivak (1979)에 나타나있다.

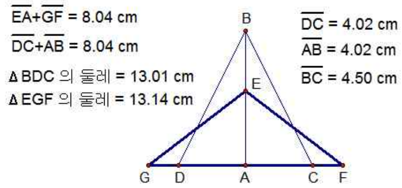
학생들의 반응 분석 2: 1조의 문제해결 전략을 살펴보면 다음과 같다. [그림 Ⅲ-12]에 의하면 탐구문제 4의 (1)을 증명하고자 하고 있다. 탐구문제 3에서 2조가 사용한 아이디어로 문제를 귀납적으로 해결하고자 하고 있지만, 주어진 문제의 해결에는 도움을 주지 못하고 있음을 알 수 있다.

한편, 3조와 4조도 [그림 Ⅲ-12]에서와 같이 탐구문제 4의 (1)을 증명하고자 하고 있으며, 두 조 모두 특수한 형태의 삼각을 예로 귀납적 증명을 하고 있다. 3조의 경우는 학교에서 배운 삼각형의 종류를 중심으로 예를 택하고 있으며, 4조는 한 변의 길이를 고정하고 삼각형들의 변화를 살펴보고 있다.



[그림 Ⅲ-12] 1조, 3조 및 4조의 문제해결 아이디어

수업분석 및 논의 2: 1조의 풀이 과정을 살펴보면 '밑변과 높이의 합을 고정'하고 '밑변과 높이의 곱'로 문제를 해결하고 있다. 이러한 전략은 둘레의 일부분인 밑변을 늘이거나 줄이면 그 만큼의 크기로 높이가 늘어나거나 줄어들고 이에 따라 그 만큼의 크기로 밑변이 아닌 두 변의 크기가 늘어나 둘레의 길이가 보존된다는 생각을 내포하고 있지만 [그림 Ⅲ-13]에서처럼 둘레의 길이가 보존되지 않는다. 또한 답이 정삼각형이라는 결론을 내릴 때 사용된 아이디어인 '밑변, 높이가 가장 차이가 없는 것이 넓이가 넓다.'는 것도 잘못된 명제이다. 실제로 [그림 Ⅲ-13]의 $\triangle DBC$에서 밑변과 높이가 같지만 정삼각형은 아니다.



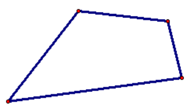
[그림 Ⅲ-13] 밑변과 높이의 합을 고정 변형

3조와 4조인 경우는 앞선 탐구문제와의 관련성을 인식하지 못 하고 있으며 또한 증명에 논리성이 잘 나타나지 있지 않음을 볼 수 있다. 따라서 교수단원을 설계할 때 탐구문제들의 연결성을 항상 염두에 두어야 한다.

2. 사각형의 등주문제

삼각형의 등주문제 수업 일주일 후 사각형에 대한 등주문제를 학생들에게 제시하였다.

탐구 문제 5: 다음에 주어진 사각형을 변형하여,



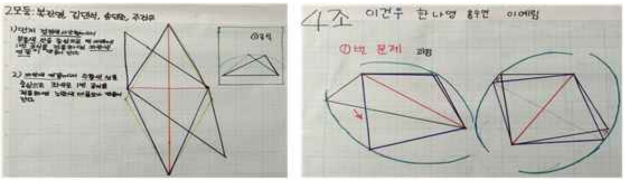
(1) 넓이는 더 넓지만 둘레의 길이는 같은 연꼴(kite)을 그리고 이유를 설명하여라.
(2) 넓이는 더 넓지만 둘레의 길이는 같은 마름모를 그리고 이유를 설명하여라.

이 문제는 지난주에 배운 내용을 적절히 사용하면 쉽게 풀 수 있는 문제이다. 위 탐구문제에서 초등학교 교육과정에 나오지 않는 연꼴의 개념은 이 탐구문제를 풀기 전에 미리 학습을 하였다.

학생들의 반응 분석: 1조와 3조는 이 문제를 지난주에 배운 내용과 연관성이 없는 것으로 보고 특수한 예를 가지고 시도하였지만 문제해결에 효과적인 아이디어를 생각해 내지 못하였다. 반면, [그림 Ⅲ-14]와 같이 2조와 4조는 지난주에 배운 내용을 잘 사용해서 문제해결의 아이디어를 만들어 내었다. 다음은 2조의 문제해결 에피소드이다.

S: 어떻게 하지?
S_1: 음...지난주에 배운 것을 사용하면 될 것 같은데. (잠시 후 같은 조원에게 설명) 이렇게...이렇게...

S: 아이디어를 내가 발표 용지에 적을 께



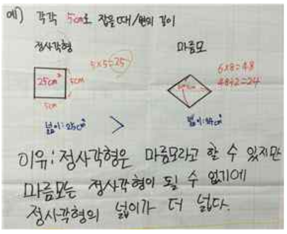
[그림 Ⅲ-14] 사각형 → 연꼴 → 마름모

수업분석 및 논의: 탐구문제 5는 [그림 Ⅲ-14]의 결과물을 살펴보면 학생들이 비교적 잘 이해하고 해결하고 있다. 이유는 [그림 Ⅲ-14]에 나타나 있듯이 일주일 전에 배운 삼각형의 등주문제와 관련된 탐구 활동이 많은 도움을 주고 있기 때문이다. 수학화의 관점에서 보면 '현상'은 이미 배워서 알고 있는 삼각형의 등주문제를 포함하는 학생들이 처한 현실로, '본질'은 사각형의 등주문제 해결과정을 조직화하는 것으로 볼 수 있다.

탐구 문제 6: 둘레의 길이가 같은 마름모와 정사각형 중에 어느 것이 넓이가 더 넓은가요? 이유를 설명하여라.

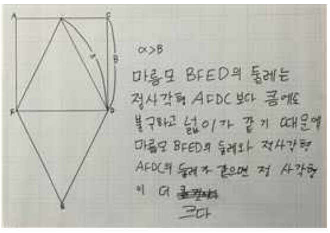
이 문제는 사각형의 등주문제를 해결하는 마지막 단계문제이고 또한 학생들의 두 도형사이의 관계적 이해를 묻는 문제이기도 하다. 또한 마름모와 관련된 개념이미지(concept image)와도 깊은 관련이 있다.

학생들의 반응 분석: 대부분의 학생들이 [그림 Ⅲ-15]처럼 특수한 예를 가지고 자신의 정당화 활동을 하고 있었다. [그림 Ⅲ-15]의 학생은 마름모의 한 변의 길이가 $5cm$가되는 예를 세변의 길이 비(3:4:5)로 해결하고 있음을 보여주고 있다. 이는 중학교과정의 피타고라스 정리와 관련된 내용을 이미 배운 것으로 여겨진다. 또한 [그림 Ⅲ-15]의 이유를 적기 전에 '선생님 정사각형이 마름모예요?'라는 질문을 선생님에게 하였고, 이에 선생님은 두 도형의 포함관계를 답해주었다.



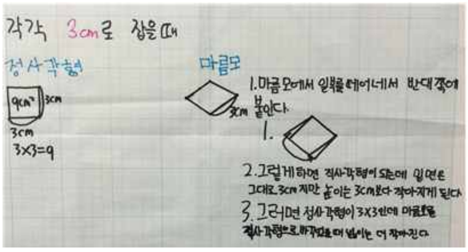
[그림 Ⅲ-15] 마름모와 정사각형

[그림 Ⅲ-16]의 학생반응을 살펴보면, '주어진 정사각형과 정사각형의 한 변의 길이를 대각선의 길이로 가지는 마름모'사이의 넓이비교를 통해서 문제를 풀고 있다. 일반적인 논의는 아니지만 이 학생은 흥미로운 추론을 하고 있다. 즉, 넓이가 같음에도 불구하고 마름모의 둘레의 길이가 더 길기 때문에 결국, 정사각형과 마름모 모두 둘레의 길이가 같으면 정사각형의 넓이가 더 크게 된다는 추론을 하고 있다.



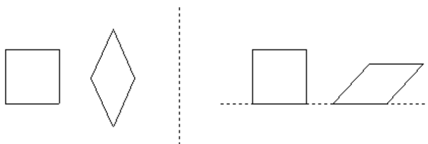
[그림 Ⅲ-16] 넓이가 같은 마름모와 정사각형

[그림 Ⅲ-17]과 같은 반응을 보인 학생은 실제로 주어진 문제를 잘 해결한 경우이다. 마름모를 적당히 잘라 붙이는 활동으로 직사각형으로 변형한 후 직사각형의 높이를 정사각형의 높이와 비교함으로써 문제를 해결했다. 이는 평행사변형을 직사각형으로 변형하여 넓이를 구하는 학교수학에서 배운 등적변형 활동을 보여 주고 있다.



[그림 Ⅲ-17] 마름모의 등적변형

수업분석 및 논의: 탐구문제 6은 도형과 관련된 개념이미지와 직관 능력을 알아보려고 제시한 문제이다. 대부분의 학생들은 [그림 Ⅲ-18]의 왼쪽처럼 마름모와 관련된 개념이미지로 소위 말하는 '다이아몬드 ◇'로 고착되어 있었다. 이러한 영향으로 인하여 둘레의 길이가 같은 정사각형과 마름모의 넓이비교를 어려워했다. [그림 Ⅲ-18]의 오른쪽은 두 도형의 직관적인 비교를 보여주고 있다.



[그림 Ⅲ-18] 마름모의 개념이미지와 넓이비교

S_1: 한 변의 길이를 $5cm$라고 하면...
S_2: 마름모의 넓이를 구하려면 대각선의 길이를 알아야 하는데. 어떻게 구하지?
S: 어떻게 하지?
T: ([그림 Ⅲ-18]의 오른쪽 그림을 칠판에 그리면서) 마름모를 이렇게 그리면?[3)]

3) 사실, 이 프로그램을 진행하기 전에는 교사도 마름모에 대한 개념이미지는 '다이아몬드 ◇'였다.

S: 우와!
S_3: 왜. 저렇게 생각하지 못했을까? 머리를 열어야해!

IV. 결론 및 교육적 시사점

이 논문에서는 초등 영재학생들의 수학화 경험을 위한 교수단원 〈삼·사각형의 등주문제〉를 설계하는 것이 목적이다. 이를 위해서, 각 조별 학생들의 문제 해결과정 중에 나타나는 사고과정을 바탕으로 교사와 수업관찰자(연구자)가 수업분석을 통하여 교수단원 설계와 관련된 논의를 하였다. 이로부터 교수단원 〈삼·사각형의 등주문제〉 설계에 교육적인 시사점을 줄 수 있는 논의 내용을 요약하면 다음과 같다.

첫째, 삼각형 등주문제의 문제해결 전략에 사용될 수 있는 [그림 Ⅲ-6]과 같은 교구를 만드는 새로운 아이디어를 발견하였다. 실제로, 이 아이디어는 학생들이 탐구문제 2를 해결하는 과정에서 우연히 도출된 것이다.

둘째, 학생들은 삼각형에서 추상적인 속성인 높이의 변화를 직관적으로 사용하는 경향이 있었다. 탐구문제 3에서 둘레의 길이가 고정된 삼각형에서 '밑변의 길이(x)와 밑변이 아닌 변의 길이(y)'는 선형적으로 변화($x+y=k$(상수))하는 관계이지만, '밑변의 길이와 높이'는 비선형적으로 변화한다. 그러나 학생들에게서 밑변의 길이와 높이와의 관계가 선형적인 것으로 착각하는 오류가 많이 발견되었다. 이유는 삼각형의 변은 삼각형이 지닌 속성이지만 높이는 삼각형이 지니지 않은 추상적인 속성이기 때문에 변화를 직접적으로 보기 힘들기 때문이다.

셋째, 삼각형의 등주문제를 해결하는 과정에서 조작의 연속성과 관련되어 나타날 수 있는 수열의 개념과 귀류법을 이용한 증명에서 존재성의 문제를 교수단위 〈삼·사각형의 등주문제〉를 설계할 때 고려해야 한다. 실제로, 탐구문제 4에서는 학생의 문제해결 과정에서 교사도 예상하지 못한 단조 감소 수열의 개념이 나타났다. 역사적으로 살펴보면, 이것은 Steiner의 눈송이 만들기 증명(Blasjo, 2005, pp. 536-537)에 나타나는 대칭화(symmetrization) 전략과도 깊은 관련성이 있다. 또한 논리적인 측면에서 보면 순수수학을 전공하지 않은 교사는 수학에서의 존재성 문제를 크게 중요하게 생각하지 않고 있음을 알 수 있다. 실제로, 수학자인 Steiner 조차도 등주문제와 관련된 자신의 증명에서 존재성을 가정하고 있다.

넷째, 수학화의 연속성의 관점에서, 필요하다면 교육과정에서 다루지 않는 개념을 도입할 필요가 있다. 이를테면, 탐구문제 5는 문제 (2)가 주된 것인데, 학생들의 인지적인 능력을 고려해서 중간에 현행 교육과정에서 다루지 않는 연꼴(kite)의 개념을 도입하였다. 결과적으로 중간에 연꼴의 개념을 도입함으로서 학생들은 탐구문제 5의 원래 목적인 문제 (2)를 비교적 잘 해결하였다.

다섯째, 도형과 관련된 개념이미지를 조사할 필요하다. 대학생들에게 탐구문제 6을 제시하면 일반적으로 대부분의 학생들은 넓이 공식을 이용하는 대수적인 방법을 이용하여 문제를 해결하고자 한다. 즉, 도형의 문제를 측정의 문제로 환원한다. 그러나 초등학생인 경우에는 제곱근 개념을 배우기 전이기 때문에 대수적인 방법으로 문제를 해결하기가 힘들고, 따라서 문제해결을 위해서 학생들의 공간감각이 요구된다. 실제로, 탐구문제 6의 원래 목적은 학생들의 공간감각과 관련된 것으로 또한 이는 도형과 관련된 개념 이미지와도 관련된다. 학생들의 반응을 보면 마름모에 대한 이미지가 한 가지로 고착되어 있음을 알 수 있다. 따라서 마름모를 평행사변형의 범주에서 인식하게 하는 활동이 필요하다.

끝으로, 초등 영재학생 대부분은 정당화의 방법으로 특수한 예를 사용하는 귀납적인 방식을 택하고 있음을 알 수 있다. 따라서 귀납적인 추론으로부터 시작하여 추론을 정당화하는 낮은 수준의 연역적인 논리를 사용할 수 있게 하는 교수단원 설계가 필요하다. 예를 들어, 탐구문제 4에서 정당화의 방법으로 귀류법을 이용하는 내용과 또한 [그림 Ⅲ-18]과 같은 '마름모는 평행사변형이다.'라는 일반적인 명제를 문제해결에 사용하고 있음을 볼

수 있다.

참 고 문 헌

김진환・박교식 (2006). 예비중등교사의 수학화 경험을 위한 교수단원의 설계: 수 분할 모델의 탐구. 한국학교수학회논문집, 9(1), 57-76.

Kim, J. H. & Park, Kyosik. (2006). A design of teaching units for experiencing mathematising of secondary pre-service teachers: Inquiry into number partition models. *Journal of the Korean School Mathematics Society,* 9(1), 57-76.

박교식 (1992). 함수 개념 지도의 교수현상학적 접근. 서울대학교 대학원 박사학위 논문

Park, Kyosik. (1992). *(The) didactically phenomenological approach in instruction of function concept*, Doctoral Thesis, The Graduate School of Education, Seoul National University.

정영옥 (1997). Freudenthal의 수학화 학습-지도론. 서울대학교 대학원 박사학위 논문

Chong, Y. O. (1997). *A Study on Freudenthal's Mathematising Instruction Theory*, Doctoral Thesis, The Graduate School of Education, Seoul National University.

최근배 (2009). 초등수학 영재를 위한 평면에서의 등주문제 고찰(게슈탈트 관점을 중심으로). 학교수학, 11(2), 227-241.

Choi, Keunbae. (2009). A Study on the Isoperimetric Problem in a Plane focused on the Gestalt's View for the mathematically gifted Students in the elementary School, *Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics School Mathematics*, 11(2), 227-241.

최근배 (2011). 초등 영재 교수・학습을 위한 평면에서의 등주문제 내용구성 연구-기하적인 방법을 중심으로-. 한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 50(4), 441-466.

Choi, Keunbae. (2011). A Study on the Teaching Design of the Isoperimetric Problem on a Plane for Mathematically gifted students in the Elementary School -focused on the geometric methods-, *J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education*, 50(4), 441-466.

최근배・채정림 (2014). 등주문제 분석을 통한 공간감각 계발을 위한 학습자료 추출 연구. 학교수학, 16(4), 677-690.

Choi, Keunbae. & Chae, J. L. A Study on the Abstraction of Learning Materials from the Isoperimetric Problem to Develop a Spatial Sense, *Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics School Mathematics*, 16(4), 677-690.

Blasjo, V. (2005). The Evolution of the Isoperimetric Problem, *The American Mathematical Monthly, 112*, 526-566.

Demjanenko, S. (2008). The Isoperimetric Inequality: A History of the Problem, Proofs and Applications. *http://astrophysicsgeek.files.wordpress.com/2008/04/paper_final.pdf*

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Reidel: Dortrecht.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting mathematics education. (China Lectures) Dortrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hildebrandt, S. & A. Tromba (1996). *The Parsimonious Universe: Shape and Form in the Natural World*, Springer-Verlag New York, Inc.

Spivak, M. (1979), A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, vol. 4, 2nd ed., Publish or Perish, Berkeley, CA.

Tapia, R. A. (2009). The Remarkable Life of the Isoperimetric Problem: The World's Most Influential Mathematics Problem. *http://www.princeton.edu/~wmassey/CAARMS15/PDF/Tapia.pdf*

Treibergs, A. (2008). Steiner Symmetrization and Applications, *http://www.math.utah.edu/~treiberg/Steiner/SteinerSlides.pdf*

Treffers, A. (1987). Tree dimensions: a model of goal and theory description in mathematics education. Reidel: Dortrecht.

Wittmann, E. (1984). Teaching units as the integrating core of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* 15(1), 25-36.

Wittmann, E. (1995). Mathematics education as a 'design science'. *Educational Studies in Mathematics,* 29(4), 355-374.

Wittmann, E. (2001). Developing Mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics,* 48(1), 1-20.

A design of teaching units for experiencing mathematising of elementary gifted students: inquiry into the isoperimetric problem of triangle and quadrilateral

Keunbae Choi
Dept. of Math. Edu., Teachers College, Jeju National University, Jeju 690-781, Korea
E-mail: kbchoe@jejunu.ac.kr

In this paper, it is aimed to design the teaching units 'Inquiry into the isoperimetric problem of triangle and quadrilateral' to give elementary gifted students experience of mathematization. For this purpose, the teacher and the class observer (researcher) made a discussion about the design of the teaching unit through the analysis of the class based on the thought processes appearing during the problem solving process of each group of students. The following is a summary of the discussions that can give educational implications. First, it is necessary to use mathematical materials to reduce students' cognitive gap. Second, it is necessary to deeply study the relationship between the concept of side, which is an attribute of the triangle, and the abstract concept of height, which is not an attribute of the triangle. Third, we need a low-level deductive logic to justify reasoning, starting from inductive reasoning. Finally, there is a need to examine conceptual images related to geometric figure.

* ZDM Classification : M19, D59, G19
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97D50, 97B50
* Key words : teaching units, isoperimetric problem, mathematisation