대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 27 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 27, No. 2, 171 ~ 189. May 2017

중학교 2학년 학생들의 지수법칙 발견을 위한 교수 설계 및 적용

강 정 기*

본 연구는 학생의 지수법칙 개발을 골자로 하는 교수법을 설계 및 적용해봄으로써 수업의 실제를 파악해 보고자 하였다. 이를 위해 중학교 2학년 54명의 학생을 대상으로 지수법칙에 대한 발견식 수업을 계획하여 적용해 보았다. 그 결과 지수법칙 사례 개발 측면에서는 단조로운 법칙의 과다 생산, 선행학습의 경험이 없는 학생일수록 개발 유형이 다양하며 오류 가능성이 높아지는 경향, 여러 형태의 오류 등을 목격할 수 있었다. 법칙의 일반화와 표현 측면에서는 $a^m \div a^n$ 유형의 일반화 표현에 모두 실패하였으며, 밑이나 지수 중 하나만 문자로 일반화한 표현이 적지 않게 등장하였다. 또한 일반성이 제한된 오류나 변수와 등호를 사용하지 않은 표현 오류를 접할 수 있었다. 수업의 설문에서는 창조의 막연함을 호소하는 입장과 창조의 즐거움을 이야기하는 상반된 두 입장이 있었다. 이러한 결과에 기초하여 지수법칙 발견과 관련한 교수학적 시사점에 대해 논의하였다.

I. 서 론

가장 오랜 역사를 지닌 수업형태는 설명식 수업이다. 설명식 수업은 학습자가 주어진 학습과제에 포함된 수업목표를 달성할 수 있도록 교사가 체계적으로 학습내용을 조직하여 안내하는 수업이다. 설명식 수업은 지식습득의 과정보다 결과 즉, 본질적인 지식 그 자체의 습득을 더 강조한다. 본질적인 지식을 습득하고 나면 그것을 적용하고 연습하는 활동이 주가 된다(김현동, 2011).

설명식 수업은 학습내용을 기계적으로 암기하고 연습하는 과정에 초점을 두므로 학습자를 수동적으로 만든다. 따라서 학습자의 능동적인 지식 구성을 주장하는 구성주의자는 설명식 수업을 수동적 학습이라는 점을 들어 강하게 비판하였다.

구성주의는 학습자가 스스로 지식을 구성해야 한다는 가정에 기반하므로 구성주의는 기본적으로 발견적 수업을 지향한다(Lefrancois, 1997, p206). 발견적 수업은 학습자로 하여금 사실이나 정보가 아닌 원리를 이해하도록 하는 교육방법이며, 교사의 지시를 최소로 제한하거나 혹은 전혀 교사의 지시 없이 학생이 독립적으로 학습목표를 달성하도록 하는 수업이다(김윤숙, 2001).

발견적 수업은 학습자로 하여금 어떤 결과를 외우는 것보다 그러한 결과의 과정을 발견하는 것을 중요시한다. 다시 말해, 발견적 수업은 교사가 수업과 관련한 몇 가지 사실을 제시해 주고 학습자가 자발적이고 능동적인 지적활동을 통하여 스스로 개념이나 원리를 찾아가는 교수-

* 진영중학교, jeonggikang@gmail.com

학습형태이다(김대성, 2005).

이때 발견은 기본이 되는 개념이나 원리에서부터 시작되어야 한다. 다시 말해, 기본에서부터 발견의 노하우와 경험이 축적되어 보다 고차원의 영역으로 이행해가는 것이 바람직하다.

그러나 수학교과서를 보면 기본에 대한 발견 기회를 제공하지 않고, 설명식 교수로 개념을 정리하는 방식을 쉽게 접할 수 있다. 대표적인 예로 지수법칙이 있다. 현재의 교과서(고호경 외, 2013; 신항균 외, 2013; 이강섭 외, 2013; 황선욱 외, 2013)는 지수법칙을 소개하고, 지수법칙을 적용하여 문제를 해결하는 활동이 주가 되는 설명식 교수법을 지향하는 것으로 보인다.

본 연구는 수학학습의 기본이 되는 개념이나 원리에서부터 발견의 경험이 축적되어야 한다는 입장을 취한다. 그래야 새로운 개념이나 원리를 탄생시킬 수 있는 힘을 갖게 됨으로써 개척자로서의 역량을 기를 수 있을 것이다.

이러한 입장에 입각하여 본 연구에서는 설명식 교수법을 지양하고, 지수법칙을 학생 스스로 개발할 기회를 제공하는 것을 주요 특징으로 하는 교수법을 설계하여 적용해 보고자 한다. 이 과정에서 학생들의 반응을 관찰함으로써, 지수법칙 개발과 관련한 교수학적 시사점을 얻고자 한다.

II. 이론적 배경

1. 발견식 수업

발견식 수업은 1960년대 Bruner(1961)의 주장으로 유행한 방법으로, 결과 습득에만 치중해 왔던 설명식 수업의 한계를 탈피하고자 등장한 과정 지향적 교수법이다. Burner(1966)는 새로운 규칙과 아이디어 발견으로 특징지어진 발견식 수업에서 지식 자체보다 지식 습득 과정, 즉 발견의 과정을 더 중요시하는 태도를 보인다. Burner (1966)는 발견식 수업의 목표를 다음과 같이 밝힘으로써, 교수-학습에서 지식 습득 과정의 중요성을 역설하였다.

> 교수이론은 지식의 성질만을 다루는 것이 아니라, 학습자와 지식습득과정의 성질을 반영한 것이다. 어떤 지식체는 과거 지식인들의 활동의 결과이나, 이것을 학생에게 가르친다는 것은 그 결과를 암기하게 하는 것이 아니다. 오히려 지식을 확립하는 과정에 학생을 참여시키도록 가르쳐야 한다. 가르친다는 것은 학생들로 하여금 교과 지식을 과학적으로 사고하게 하고, 학자들이 한 것처럼 생각하게 함으로써 지식 습득의 과정에 참여시키려는 것이다. 다시 말해, 안다는 것은 하나의 과정이지 그 소산이 아니다.

발견식 수업은 사실로부터 출발하여 원리를 도출하는 교육 방법이다. 이홍우(2000)에 따르면, 발견식 수업은 일반적으로 '교사가 학생에게 몇 가지 관련된 사실(또는 지침)을 제시해 주고 그 사실로부터 그것에 함의된 원리를 학생들 자신이 발견해내는 교육 방법'으로 정의된다.

이홍우(2000)의 정의에 따르면 발견식 수업에서 다루는 학습과제의 내용은 크게 사실과 원리로 구분될 수 있다. 사실이란 원리에 관한 특수한 사례로서, 예컨대 개념학습에 있어서 그 개념에 속하는 각각의 요소이며, 원리는 그 사실이 적용되는 일반적 법칙이다. 이 정의에 따르면 발견식 수업은 개념, 원리 혹은 법칙의 특수한 사실을 먼저 제시하고 나서 이들 사실들에 공통적으로 적용되는 개념, 원리 혹은 법칙을 나중에 적용하는 귀납적 계열의 수업으로, 설명식 수업의 반대 개념으로 이해할 수 있다(김세경, 2009).

보다 구체적으로 발견학습 수업모형의 일반적인 절차는 문제파악, 예상하기, 탐색 및 검증, 원리법칙의 형성, 적용 및 응용의 단계로 제시된다(손용일, 2003).

1단계는 문제파악 단계이다. 주어진 문제와 관련하여 선행학습을 상기하고 제시된 문제가 무엇을 요구하며 어떤 조건들로 이루어져 있는지 문제의 성격을 확인하고 파악한다. 학생들이 학습내용에 적극적인 관심을 갖도록 새롭고 흥미로운 문제를 제시한다.

2단계는 예상하기이다. 논리적이거나 분석적인 사고보다는 오히려 직관적 사고에 더 의존하며, 사용 가능한 자료의 관찰이나 탐색에 바탕을 둔 추리 또는 직관적 사고 등의 활동을 통해 문제해결을 위한 예상 및 가설을 세운다.

3단계는 탐색 및 검증이다. 학생들 스스로가 논리적 모순과 갈등을 해소하고 일반화에 도달할 수 있도록 자료를 모으고 관찰과 실험을 하며 나타나는 현상을 분석한다. 여기서는 사고가 논리적이고 체계적이어야 한다. 교사는 어디까지나 학생들의 가설 검증과정이나 활동에서 나타나는 곤란이나 오류 등에 대해서 안내하고 보조하는 입장에 있는 것이지 주도적이어서는 안 된다.

4단계는 원리 및 법칙의 형성이다. 예상검증이나 토의활동을 거쳐 어떤 결론에 도달하게 되며 하나의 지식이 만들어진다. 모형을 사용하거나 그래프화, 문장화, 수식화를 통해 변인들 간의 자명성 있는 규칙을 발견하게 되는데, 이것이 곧 원리 또는 법칙이고 이론이 된다.

5단계는 적용 및 응용이다. 위 단계에서 형성된 지식을 구체적이고 현실적인 장면에 적용하는 단계이다. 적용과정을 통해서 학생들은 의문이 생길 수 있으며 원리, 법칙의 한계나 조건에 대한 지식이 생길 수 있을 뿐만 아니라 새로운 문제 인식으로 발전하게 된다.

본 연구에서는 사실과 원리의 구분으로 특징지어진 김세경(2009)이 제안한 발견식 수업의 개념을 따른다. 낱낱의 사례는 사실이며, 법칙 혹은 법칙을 개발하는 과정은 곧 원리이다. 본 연구는 후자에 초점을 두고자 한다. 몇 가지의 사례로부터 귀납적으로 법칙을 추측하고, 이를 일반적인 형태로 표현하는 과정을 습득해야 다른 분야를 개척할 수 있는 안목과 힘을 지닐 수 있다고 본다. 이런 관점에서 본 연구에서 개발하고자 하는 교수법은 지수법칙의 습득이 아니라, 지수법칙의 개발에 그 목표를 두고자 한다.

2. 선행연구

지수법칙과 관련한 상당수의 연구는 지수를 자연수에서 정수, 유리수, 실수, 복소수로 확장하는 형식 불역의 원리에 따른 교과지도의 이론적 문제점에 주목하여, 그 대안을 제시하는 연구가 주류를 이루고 있다.

이미복・양성호(1995)는 지수함수의 정의를 살펴보면 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수임에도 불구하고, 지수 x가 실수일 때 a^x가 어떤 의미를 갖는 수인지가 불분명하다고 지적하였다. 이는 지수를 유리수에서 실수로 확장시킬 때, 즉, x가 실수일 때 a^x의 뜻을 직관적으로 인정하게 하는 데에서 비롯된다. 그들은 논리적 결함을 극복하기 위해서는 지수함수의 역함수로서 로그함수를 소개하는 현재의 교육 방법 대신, 도함수를 기반으로 정의된 로그함수[1]에서부터 출발하는 방안을 제안하였다. 이후 로그함수의 역함수로서 $\exp x$를 정의하여, a가 양수이고 x가 실수일 때 $a^x=\exp(x\log a)$라고 정의하는 방법을 제안하였다. 이 정의를 사용하면 직관적으로 받아들일 수밖에 없던 $2^{\sqrt{2}}$를 $\exp(\sqrt{2}\log 2)$로서 명확히 할 수 있다고 주장하

1) $f: \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$이고 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f(1)=0$을 만족하는 함수 f는 유일하게 존재하며, 이를 $f(x)=\log x$와 같이 표기하는 식의 정의이다.

였다.

이헌수·박형빈·배강수(2011) 역시 직관적인 방법으로 무리지수를 받아들이도록 하는 교과서의 지도방식에 대한 문제점을 지적하였다. 현재의 교과서는 $3^{\sqrt{2}}$에 대하여 계산기를 이용하여 3^1, $3^{1.4}$, $3^{1.41}$, $3^{1.414}$, $3^{1.4142}$의 값을 구한 뒤, 이 수들이 일정한 수 $3^{\sqrt{2}}$에 가까워진다고 설명하고 있다. 이에 대해 이헌수·박형빈·배강수(2011)는 교육과정상 아직 수열의 극한을 학습하지 않은 상태에서 수열의 극한을 이용한 정의를 학생들이 직관적으로 받아들이는 것은 다소 무리가 따를 수 있다고 하였다. 또한 그들은 교과서에 $2^{\sqrt{2}}$, 유리수^{무리수}, 무리수^{무리수}의 값이 유리수인지 무리수인지에 대한 자세한 설명이 없어 학생들은 이 값들이 유리수인지 또는 무리수인지에 대해 많은 궁금증을 가지고 있다고 지적하였다.

이헌수·김영철·박영용(2013)은 교과지도의 논리적 결함이 무리지수에 대한 교사의 인식 오류에도 영향을 미치고 있음을 보고하였다. 현직교사들은 무리지수를 갖는 수의 실체에 대해 논리적으로 판단하기 보다는 직관에 의존하여 판단하는 것으로 나타났다. $2^{\sqrt{2}}$에 대한 문제에서 무리수라고 응답한 현직교사는 40명 중 23명(57.5%)이었으며, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$에 대한 문제에서 무리수라고 응답한 현직교사는 32명 중 24명(75.0%)이었다. 현직교사는 밑의 형태보다는 지수의 형태에 의존하여 판단하는 경향을 보였다. 이러한 문제점은 교과서나 교사용 지도서에 유리수^{무리수}, 무리수^{무리수}가 유리수인지 무리수인지에 대한 언급과 함께 그에 따른 예를 다루어야 할 필요성을 제기한다.

도종훈·박윤범(2011)은 교과서에 제시된 유리지수 정의의 문제점을 지적하고 대안을 제시하였다. 현재의 교과서는 $a^{\frac{m}{n}}$을 $\sqrt[n]{a^m}$ 즉, $(a^m)^{\frac{1}{n}}$으로 정의하는데, 복소수의 관점에서 이보다는 $(\sqrt[n]{a})^m$ 즉, $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$로 정의하는 것이 보편적이라고 지적하였다. 그 근거로는 두 정수 m, n이 서로소가 아니거나 $m=0$인 경우에는 일반적으로 $z^{\frac{m}{n}} \neq (z^m)^{\frac{1}{n}}$이 성립함을 근거로 든다. 예를 들어, $(-8)^{\frac{2}{6}}=(-8)^{\frac{1}{3}}$은 $x^3=-8$을 만족하는 3개의 복소수로 이루어진 집합인 반면 $((-8)^2)^{\frac{1}{6}}$은 $x^6=(-8)^2$을 만족하는 6개의 복소수로 이루어진 집합이므로, $(-8)^{\frac{2}{6}} \neq ((-8)^2)^{\frac{1}{6}}$임을 알 수 있다(최영기, 2000).

이병수(2012)는 교과서의 $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$로 정의된 것의 문제점을 지적하고, 그 대안으로 실수계의 체의 공리를 바탕으로 $a^{\frac{m}{n}}=(\sqrt[n]{a})^m$으로 정의해야 한다고 주장한다. 또한 실수계에서 지수법칙의 핵심은 a, b가 양수일 때 임의의 실수 $r, s \in \mathbb{R}$에 대해 $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$, $(a^r)^s=a^{rs}$, $(ab)^r=a^r \cdot b^r$이 성립하는 것은 실수계의 완비성 공리를 바탕으로 하고 있음을 보였다. 이에 따라 지수의 개념은 실수계의 공리로부터 비롯된 것이므로 학습적 모순이 일어나지 않기 위해서는 실수계의 공리를 이용한 지도법이 필요하다고 주장하였다.

앞에서 살펴본 지수법칙과 관련한 여러 연구는 지수의 확장에 따라 발생하는 논리적 결함을 보완하는데 집중하는 태도를 보인다. 이것은 수학이라는 학문의 논리성과 엄밀성에 비추어 기존의 교과 전개 방식을 비판한 학문 중심적 접근에 해당한다.

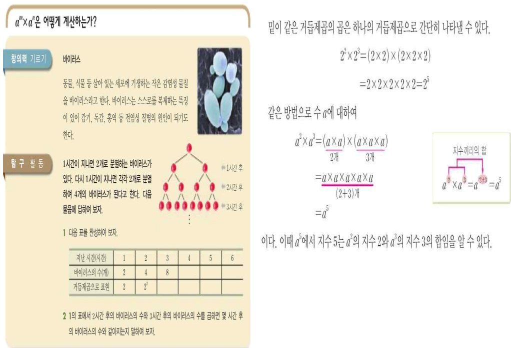
그러나 지수법칙에 대한 학습은 결국 교육에 해당하므로 학문적 입장에서만 접근하는 것은 바람직하지 못하다. 학습자의 입장에서 개념 발

생까지 고려한 접근이 요구된다. 이러한 측면에서 본 연구는 지수의 확장에서 빚어지는 논리적 결함 대신, 자연수 지수에서 지수법칙의 발생에 입각한 발견적 접근에 초점을 두고자 한다. 이를 통해 기존 연구에서 간과한 원리 발생의 측면을 보완하고자 한다.

3. 교과서에 대한 비판적 분석[2]

본 절에서는 지수법칙에 대한 중학교 2학년 교과서를 발견적 관점에서 비판적으로 분석해 보고자 한다.

첫째, 교과서는 결론으로 제시되어야 할 지수법칙을 처음부터 제시하는 반교수학적 전도[3]의 형태이다. 신항균 외(2013)는 바이러스를 소재로 한 실세계의 문제로부터 출발함으로써 현실과 수학과의 연계성을 높이고자 하였다. 그러나 '$a^m \times a^n$은 어떻게 계산하는가?'라는 물음을 서두에 제시하고, 곧 바로 $2^2 \times 2^3$을 간단히 나타내는 방법과 함께 일반적인 지수법칙을 제안하고 있다. 따라서 학생들은 지수법칙에 대한 발견의 기회를 갖기 어렵다. 이러한 전개 하에서는 법칙을 학습하고 제시된 문제를 법칙을 적용하여 해결하는 것이 학생들이 해야 할 일이다. 고호경 외(2013), 이강섭 외(2013), 황선욱 외(2013) 역시 소재만 달리할 뿐 이러한 전개는 동일하다.



[그림 II-1] 결론부터 제시하는 교과서의 지도(신항균 외, 2013)

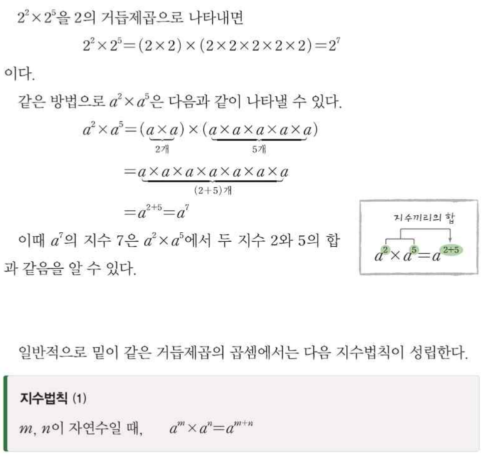
둘째, 하나의 사례에서 일반적인 표현을 곧 바로 제시하는 급진적 형태를 띠고 있다. [그림 II-1]에서 보여지 듯 $a^m \times a^n$라는 일반적 표현이 곧 바로 등장하고 있다. 이는 다른 법칙에서도 예외가 아니다. 신항균 외(2013)는 서두에 '$(a^m)^n$은 어떻게 계산하는가?', '$a^m \div a^n$은 어떻게 계산하는가?', '$(ab)^n$과 $\left(\frac{a}{b}\right)^n$은 어떻게 계산하는가?'의 물음을 서두에 제시함으로써 일반적인 표현을 처음부터 제공하고 있다. 이강섭 외(2013) 역시 탐구의 앞서 '$a^m \times a^n$, $(a^m)^n$은 어떻게 간단히 나타낼까?'와 같은 물음을 통해 일반적 표현을 제시한다. 황선욱 외(2013)는 처음부터 일반적 표현을 제시하지는 않지만, 결국 하나의 사례에서 곧 바로 일반적인 지수법칙을 제안함으로써 일반적인 표현이 급진적으로 제시되는 형태를 벗어나지 못하고 있다. 따라서 현 교과서의 지도하에서 학생들은 일반적 표현을 스스로 개발할 기회를 갖기 어려운 문제점이 있다.

---

2) 교과서는 고호경 외(2013, 신항균 외(2013), 이강섭 외(2013), 황선욱 외(2013) 4종을 살펴보았다.

3) 반교수학적 전도(Anti-didactic inversion)란, 수학교육현대화 운동에 대한 Freudenthal(1973)의 비판을 함축적으로 나타낸 말이다. 수학교육의 관점에서 볼 때, 수학자들이 어떤 결과를 발명한 과정을 학생들에게 재연하게 해야 하는데, 수학교육현대화 운동 하에서 새수학은 그렇게 제시되지 않았다는 것이다. 그러기보다는, 수학자들의 수학적 활동의 최종적인 산물로부터 거꾸로 제시되고 있다는 것이다. Freudenthal은 최종적으로 본 줄기만을 남긴 빈약한 구조를 출발점으로 하는 이와 같은 교육을 반교수학적 전도라고 비판한다(김연식・우정호・박영배・박교식, 1997).

셋째, 두 단계 만에 이루어지는 급진적 일반화가 나타난다. 고호경 외(2013), 신항균 외(2013), 이강섭 외(2013), 황선욱 외(2013)는 모두 공통적으로 2개의 단계를 거침으로써 일반화하고 있다. [그림 II-2]에서 보여지 듯, 밑이 2이고 지수가 2와 5인 특수 사례에서 출발하여 이것을 밑이 a이고 지수가 2와 5인 특수 사례로 발전한다. 그리고 이는 곧 지수가 m과 n인 일반적인 경우로 확장된다. 정리하면 밑과 지수 모두가 특수한 경우에서 밑은 일반적이고 지수는 특수한 경우로 확장하고, 다시 밑과 지수 모두가 일반적인 경우로 확장하는 일반화의 형태이다. 문제는 두 단계에서 제시되는 예가 1개뿐이라는 점이다. 귀납적인 일반화를 위해서는 최소한 2개 이상의 예시가 제시되어야 함을 고려할 때, 이는 급진적인 전개로 보인다.



$2^2\times2^5$을 2의 거듭제곱으로 나타내면

$$2^2\times2^5=(2\times2)\times(2\times2\times2\times2\times2)=2^7$$

이다.

같은 방법으로 $a^2\times a^5$은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$a^2\times a^5=(\underbrace{a\times a}_{2개})\times(\underbrace{a\times a\times a\times a\times a}_{5개})$$
$$=\underbrace{a\times a\times a\times a\times a\times a\times a}_{(2+5)개}$$
$$=a^{2+5}=a^7$$

이때 a^7의 지수 7은 $a^2\times a^5$에서 두 지수 2와 5의 합과 같음을 알 수 있다.

일반적으로 밑이 같은 거듭제곱의 곱셈에서는 다음 지수법칙이 성립한다.

지수법칙 (1)

m, n이 자연수일 때, $a^m\times a^n=a^{m+n}$

[그림 II-2] 두 단계 만에 도달하는 급진적 일반화(황선욱 외, 2013)

총체적으로 교과서의 지도는 결론인 지수법칙을 처음부터 제시함으로써, 지수법칙을 개발하고 일반화하고 표현할 기회를 제공하지 않는 문제점을 지니고 있음을 알 수 있다.

III. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상자

본 연구가 의도하는 지수법칙의 발견적 교수법을 적용하기 위하여 경상남도 김해시 J 중학교 2학년 두 학급을 선정하였다. 학년 선정은 수학과 교육과정에 따른 지수법칙 지도 대상 학년에 기초하여 이루어졌다. 본 연구의 의도는 수학 학업성취도에 따른 특정 집단에 대한 새로운 교수 학습 방법의 효과를 검증하기 위함이 아니기 때문에 이질집단으로서의 두 학급을 연구 대상자로 하였다. 각각 28명과 26명으로 구성된 두 학급은 교과 전반에 걸쳐 수업에 대한 참여도가 비교적 높은 것으로 평가되고 있어, 수업 적용 시 학생들의 적극적 활동이 관찰 가능할 것이라는 기대에서 선정되었다. 지수법칙에 대한 선행 학습 경험을 조사한 결과는 <표 III-1>과 같다.

<표 III-1> 선행 학습 여부 (N=54)

지수법칙에 대한 선행 학습 경험	학생 수(명)	비율(%)
있음	38	70.4
없음	16	29.6

2. 연구 방법 및 절차

본 연구는 연구 목표와 관련하여 지수법칙에 대한 기존의 방법과의 비교 연구가 아닌 새로운 대안의 적용을 통한 학생의 교수·학습상의 유효성을 파악하는데 초점이 있으므로 학생 활동에 대한 관찰이라는 질적 연구 방법을 채택하였다. 구체적인 연구 절차는 다음과 같다.

- 연구 참여자 선정
- 수업 설계

- 학생 활동지 및 설문지 고안
- 수업 적용 및 관찰 (현장일지, 비디오 녹화에 의한 자료 수집)
- 수업 후 학생 설문 실시
- 결과 분석 (현장일지, 녹화 자료, 학생 활동지, 설문지) 및 논의

가. 수업 설계

수업 설계 시 손용일(2003)이 제시한 발견학습의 수업모형 절차를 참고하였으며, 점진적인 지수법칙 발견이 용이한 형태로 변형하고자 하였다. 문제 파악, 예상하기, 탐색 및 검증, 원리 및 법칙, 적용 및 응용의 5단계의 수업모형을 [그림 III-1]과 같이 수정하였다.

[그림 III-1] 수업의 개괄적 흐름

1단계는 과제 제시와 문제 파악으로 수업의 개관 단계이다. 이는 이홍우(2000)의 발견식 수업의 정의를 따른 것이다. '교사가 학생에게 몇 가지 관련된 사실(또는 지침)을 제시해 주고 그 사실로부터 그것에 함의된 원리를 학생들 자신이 발견해내는 교육 방법'이라는 발견식 수업의 정의에 비추어볼 때, 수업의 시작은 과제 제시가 되어야 한다. 이러한 원칙에 의거하여 1단계는 전시학습을 목적으로 교사가 간단히 지수 표기에 대해 설명하고, 지수법칙 개발이라는 열린 과제를 제시하는 것으로 시작된다. 다시 말해, 학생들이 본 수업에서 해야 할 활동을 명확히 한다.

2단계는 가설을 설정하고 탐색하는 단계이다. 가설 설정을 자극하기 위하여 구체적인 예시로 $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5}$을 들지만, 하나의 예시만을 제공하여 안내의 수준을 최소화하고자 한다. 예시가 성립하는 이유를 설명함으로써 논리적 가설 설정을 돕고자 한다. 더불어 '의미를 생각하면서 법칙을 만들 것'을 권고하여 가설 설정이 단순히 직관에만 의존하지 않게 하고자 한다.

3단계는 학생들이 예상한 가설을 검증하는 단계이다. 이미 가설을 설정하는 2단계에서 이유 설명과 의미 강조를 통해 가설 설정을 논리적 수준으로 끌어올리려는 노력이 있었다. 이러한 노력으로 인해 가설 설정과 탐색에서 개인적 차원에서의 검증이 이루어졌다고 볼 수 있다. 따라서 3단계는 개별 활동이 아닌 공적 차원에서의 검증이 필요하다고 판단하였다. 공적 차원의 검증을 위해 학생들이 예상한 가설을 선별하여 칠판에 기록하여 공론화하고자 한다. 선별의 기준은 첫째, 옳은 것과 옳지 않은 것을 동시에 제공하며, 둘째, 4단계에서 수행할 분류를 의식하여 각 그룹에 해당하는 사례를 고르게 선별하는 것이다.

4단계는 공적 차원에서 옳다고 판명된 것들을 대상으로 유사한 것끼리 묶는 분류의 단계이다. 공적 차원에서의 분류가 이루어지도록 하여, 일반화된 법칙 형성에까지 학생들이 도달할 수 있도록 유도하고자 한다. 학생들이 유사하다고 선별한 것끼리 칠판에 재배열하는 방식으로 정리하고자 한다.

5단계는 재배열 된 그룹 사례에 대한 일반화와 표현 활동이 이루어지는 단계이다. 일반화라는 용어는 학생들에게 생소한 용어일 수 있으므

로, 가급적 쉬운 표현으로 접근하고자 한다. 예컨대, '전체 사례를 아우르는 법칙을 만들고 표현하라'는 식으로 '일반화' 용어 표현을 대신한다.

6단계는 일반화 표현을 음미하고 설문지를 작성하는 것으로 수업을 정리하는 단계이다. 활동지 1에서 개발한 구체적 사례 위주의 법칙과 비교하여 일반화 표현이 갖는 일반성과 효율성을 인식시키는 음미의 과정으로 수업을 마무리하고자 한다.

나. 학생 활동지 및 설문지 고안

발견식 수업의 주는 학생 활동이 되어야 하므로 학생 활동지의 고안은 본 연구의 목적상 매우 중요하다. 학생 활동지는 공적 차원의 학습이 아니라 개인적 차원의 학습 유도가 목적이므로 2단계의 탐색과 5단계의 법칙 형성을 위해 고안되었다. 따라서 학생 활동지는 지수법칙의 개발, 각 사례에 대한 일반화 두 가지로 구성하였다. 구체적으로 활동지 1은 '지수법칙을 가능한 한 많이 만들어 보시오. 예를 들어, $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5}$ 와 같은 법칙[4]을 가능한 한 많이 만드시오'의 질문으로, 활동지 2는 '5가지 각각의 경우를 포함하는(아우르는) 법칙을 그룹별로 표현해 보자'는 질문으로 구성하였다. 활동지 1에서 '가능한 한 많이'라는 문구를 삽입 한 것은 일반화에 도달하기 위해서는 여러 특수 사례 개발로 개념이 충분히 익숙해져야하기 때문이다. 더불어 다양한 유형의 법칙을 유도하기 위한 의도도 지닌다. 한편, 지수법칙에 대한 선수학습의 경험이 활동지의 활동에 중요한 영향을 미칠 수 있기 때문에, 활동지 1에 선수학습 여부를 표시하게 하였다.

학생용 설문지는 수업 방법의 장단점에 대한 질문으로 구성하였다. 구체적으로 '본 수업의 장점과 단점을 솔직하게 기록하시오'의 질문이다. '솔직하게'라는 구절을 삽입하여 학생들의 진솔한 의견을 유도하고자 하였다.

다. 수업 적용 및 설문 실시

수업은 2016년 3월 22일 3, 4교시와 2016년 3월 23일 2, 3교시에 수학교과 전담교실에서 이루어졌다. 교실에는 앞쪽과 뒤쪽에 칠판이 배치되어 판서가 일반교실에 비해 여유로우며, 책상 배열은 교사를 중심으로 하는 전체 설명식 수업 배열이었다.

수업에 앞서 본 수업이 연구의 목적 하에 진행된다는 사실을 주지시켰다. 아울러 기존 수업의 초점인 법칙의 설명 대신 법칙의 발견이 본 수업의 핵심 활동임을 알리는 것으로 수업을 시작하였다. 특히 법칙 발견의 가치에 대해 언급함으로써, 수업에서의 학생 활동의 적극성을 높이고자 하였다.

수업 계획에 따라 [그림 III-1]의 절차를 순차적으로 진행하였다. 일반화된 법칙 형성의 전초성격을 갖는 검증 및 분류 단계를 위해 학생들이 개발한 가설을 선별해야 했다. 균형 있는 가설 선별은 본 수업을 계획한 연구자의 역할이며, 한 학급에서는 학생들이 개발한 가설 중 <표 III-1>이 선별되었다.

선별된 가설의 검증과 분류는 학생들의 몫이며, 각각의 가설의 진위 여부를 검증하는 공적 활동이 이루어졌다. 다음 옳다고 판단된 법칙을 분류하는 활동이 이루어졌으며, 그 결과는 <표 III-1>과 같다. 분류 이후 몇몇 그룹에 사례를 보

4) 특수한 $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5}$ 은 법칙이 아니므로 연구에 참여한 학생들이 이로 인해 법칙에 대한 잘못된 개념 이미지를 가질 위험이 있다. 따라서 이 경우에는 법칙이라는 용어보다 사례라는 표현이 적절해 보인다.

5) $\left(\frac{b}{a}\right)^m = \frac{b^m}{a^m}$ 유형의 법칙이 하나만 선별된 것은 이 학급에서 이 유형은 오직 하나만 제시되었기 때문이

<표 III-1> 한 학급에서 이루어진 가설 선별과 분류

$$2^{10} \div 2^{6} = 2^{4},\ 2^{10} \times 2^{10} = 2^{20},\ 3^{3} \times 3^{2} = 3^{5},\ 2^{100} = 4^{50},\ (2^{3})^{2} = 4^{6},\ 2^{2} \div 2^{4} = \frac{1}{2^{2}},\ 2^{5} \div 2^{5} = 1,\ (2+2)^{3} = 6+6,$$

$$2^{6} \div 2^{3} = 2^{2},\ 2^{5} + 2^{3} = 2^{8},\ 2^{7} \div 2^{2} = 2^{5},\ (2^{5})^{2} = 4^{25},\ (2^{3})^{2} = 2^{3 \times 2},\ \left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{2^{2}}{3^{2}}$$ 5), $$(2 \times 3)^{2} = 2^{2} \times 3^{2},$$

$$(5 \times 3)^{3} = 5^{3} \times 3^{3}$$

$\Downarrow$ 옳은 것을 골라 재배열 (분류)

	$2^{10} \div 2^{6} = 2^{4}$			
$2^{10} \times 2^{10} = 2^{20}$	$2^{2} \div 2^{4} = \frac{1}{2^{2}}$	$2^{100} = 4^{50}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{2} = \frac{2^{2}}{3^{2}}$	$(2 \times 3)^{2} = 2^{2} \times 3^{2}$
$3^{3} \times 3^{2} = 3^{5}$	$2^{5} \div 2^{5} = 1$	$(2^{3})^{2} = 2^{3 \times 2}$		$(5 \times 3)^{3} = 5^{3} \times 3^{3}$
	$2^{7} \div 2^{2} = 2^{5}$			

충하여 각 그룹별로 3개 이상의 사례를 확보하였으며, 이는 일반화된 법칙 개발을 위한 충분한 사례를 제시하고자 하는 의도를 지닌다. 특히 $a^m \div a^n$ 유형에서는 $m > n$, $m = n$, $m < n$의 세 가지 사례를 의도적으로 확보하였다.

그룹별로 3개 이상의 사례로 구성된 분류 작업의 결과가 판서된 상태에서 일반화로 대표되는 활동지 2가 배부되었는데, 학생들이 질문 이해에 어려움을 호소하여 설명을 보충하였다. 질문 이해를 돕는 보충 설명은 활동지 2에서 의도하는 일반화 자체와는 무관하다는 판단으로 실시된 것이다. 예컨대, '3개의 사례 이외에도 더 많은 사례가 있다. 이 모든 사례를 한꺼번에 나타내는 방법은 없는가?', '이 모든 사례를 통틀어 나타내는 방법은 없는가?' 등의 보충 설명을 제공하였다.

수업을 마친 후 법칙 발견 중심의 수업 방법에 대한 연구 대상자의 의견을 듣기 위해 준비한 설문을 배부하고, 학생들의 생각을 자유롭게 기술하도록 하였다.

라. 결과 분석

활동지 1, 활동지 2, 설문지 별로 분석이 이루어졌다. 활동지 1의 경우 네 가지 방향에서 분석이 이루어졌다. 첫 번째는 개발된 가설의 수와 진위 여부를 파악하는 것이다. 한 명의 학생이 20개의 가설을 제시하면 그 수를 20개로 기록하고 진위 여부를 판별함으로써, 가설에 입각한 분석이 이루어지도록 하였다.

두 번째는 개발된 가설을 유형별로 구분하여 가설 개발의 경향을 파악하는 것이다. 유형 구분은 보편적인 유형 구분으로 사용되는 $a^m \times a^n$, $(a^m)^n$, $a^m \div a^n$, $(ab)^m = a^m b^m$, $\left(\frac{b}{a}\right)^m = \frac{b^m}{a^m}$을 기본으로 하되, 여기에 포함시킬 수 없는 사례가 발견되면 유형을 추가하는 방법을 취하였다. 예컨대, $2^6 \times 5^5 = 10^{11}$와 같은 사례가 발견되면 $a^m \times b^n$ 유형을 추가하였다. 연산의 결과보다 제시된 형태에 입각하여 유형을 구분하였다. $2^5 \times 2^3 = 32 \times 8 = 256$과 같은 사례는 비록 계산에 치우쳤지만 $a^m \times a^n$ 유형으로 간주하였다. 제시된 형태가 복합적인 경우에는 여러 유형을 중복 체크하였다. 예컨대, $(-4a^3b^2) \times (8a^7b) \div (-4a^2b^3)^2$의 경우에는 $a^m \times a^n$, $(a^m)^n$, $a^m \div a^n$,

다. 심지어 다른 학급에서는 이 유형이 전혀 나타나지 않아, 분류 단계를 위해 유형을 추가해야 했다.

$(ab)^m=a^mb^m$을 각각 하나의 사례로 중복 체크하였다. 그러나 한 명의 학생이 동일한 유형을 여러 차례 제시할 경우에는 하나의 사례로 간주함으로써, 하나의 유형에 대한 학생별 영향력은 균등하게 하고자 하였다. 또한 선행학습의 경험이라는 변수를 각 유형에 추가하여 유형을 세분화하여 정리함으로써, 선행학습에 따른 개발 유형을 파악하고자 하였다.

세 번째는 학생별로 개발한 가설의 진위 여부를 파악하는 것이다. 한 명의 학생이 여러 가설을 개발한다는 점을 감안하여, '모든 가설이 옳은 유형'과 '적어도 하나의 가설은 옳지 않은 유형'으로 구분하여 정리하였다. 선행학습의 경험이라는 변수를 두 유형에 각각 추가하여 사례를 세분화하여 정리함으로써, 선행학습에 따른 오류 가능성을 파악하고자 하였다.

네 번째는 앞서 제시한 분석 방향 이외에 사례별 특징을 파악하는 것이다. 첫 번째에서부터 세 번째는 도수 및 비율에 입각한 분석을 지향하는 것이라면, 네 번째는 사례의 특징에 입각한 분석이다. 특히 오류로 분류된 사례의 특징에 주목하였으며, 가능하면 오류에 깃든 학생 인식까지 논의하고자 하였다.

활동지 2의 분석은 문장 표현을 제외한 기호 표현을 대상으로 수행되었다. 문장 표현을 제외한 것은 판단이 용이하지 않은 경우가 있기 때문이다. 예컨대, 'a^b일 때 a를 소인수분해한 뒤 b번 곱해주면 답이 나온다'와 같은 표현에서 'b번 곱해준다'는 표현이 지수에 대한 것인지 밑에 대한 것인지가 불분명하다. 또 '$(2\times3)^5$일 때 위의 지수끼리 분배법칙으로 나누어 곱해준다'는 표현에서 $(2\times3)^5$가 포괄적 예인지 특수한 예인지가 불분명하다.

활동지 2는 문장 표현 일반화를 수행한 7명의 사례를 제외한 47명의 사례를 대상으로, 네 가지 방향에서 분석이 이루어졌다. 첫째, 유형별로 일반화 표현의 성공률을 파악하는 것이다. 일반화 표현의 성공은 밑과 지수 모두를 일반화 한 경우이며, 실패는 밑과 지수 어느 것도 일반화하지 못하고 특수 사례를 제시한 경우이다. 부분적으로 밑이나 지수 중 한 가지를 일반화한 경우는 성공과 실패로 분류하지 않았다.

둘째, 미완의 일반화의 경향을 파악하는 것이다. $a^3\times a^2=a^5$과 같이 밑만 일반화한 경우와 $2^m\times2^n=2^{m+n}$과 같이 지수만 일반화한 경우를 구분하여 사례의 수를 파악하였다. 두 가지 경우를 유형별로 세분화하여 도수를 파악함으로써, 어느 유형에서 미완의 일반화가 두드러졌는지를 조사하고자 한다.

셋째, 선행학습이 미치는 영향력을 조사하는 것이다. 일반화 표현의 성공, 일반화 표현의 실패, 미완의 일반화로 구분하여 세 유형에서 각각 선행학습 경험의 유무에 따라 사례수를 파악하였다.

넷째, 오류를 파악하는 것이다. 오류의 사례를 수집하여 비슷한 사례끼리 묶어 유형별로 분류하는 방식을 통해 정리하였다. 특히 유형별로 적합한 이름을 붙이는 방식으로 오류를 정리하여 그 특징을 부각시키고자 하였다.

설문지는 학생 의견을 장점과 단점별로 구분하여 정리하는 방식을 취하였다. 장점과 단점별로 의견이 충분히 모이고 나면 비슷한 의견끼리 묶어 대표하는 특징으로 정리하였으며, 이를 통해 학생들이 본 수업을 어떻게 인식하는지 파악하고자 하였다.

Ⅳ. 결과 및 분석

1. 활동지 1의 결과 및 분석: 지수법칙 사례 개발

개발된 가설의 개수와 진위 여부를 살펴보면, 241개의 가설이 개발되었으며 이들 중 201개(83.4%)의 가설이 옳은 것이었다. 학생 1인당 4.5개의 가설을 개발하여, 표면적으로 적절한 양을 생산한 것으로 생각된다.

그러나 개발된 가설을 내용적 측면에서 살펴보면 단조로운 가설을 과다하게 제시한 사례가 적지 않았다. 대표적으로 $2^3 \times 2^4 = 2^7$, $3^2 \times 3^4 = 3^6$과 같은 $a^m \times a^n$꼴의 유형만 무려 18개를 만든 사례가 있었으며, $a^m \times a^n$꼴과 $a^m \div a^n$꼴의 유형만 20개를 제시한 사례도 있었다. 실험에 참여한 54명의 학생 중 $a^m \times a^n$, $(a^m)^n$, $a^m \div a^n$, $(ab)^m = a^m b^m$, $\left(\frac{b}{a}\right)^m = \frac{b^m}{a^m}$의 5유형을 모두 제시한 학생은 한 명에 불과하였다.

두 가지 해석이 가능한데, 첫 번째는 '가능한 한 많이'라는 문구에서 다양한 유형의 법칙을 개발하라는 요구를 읽어 내지 못한 탓으로 볼 수 있다. 두 번째는 다양한 유형의 법칙 개발의 요구와 필요성을 인식하였음에도 불구하고, 개발에 대한 인지적 어려움으로 인해 '가능한 한 많이'라는 문구를 '반복된 법칙을 다수 생산'하는 것으로 해석하는 식의 회피 현상에서 비롯된 문제로 볼 수 있다. 전자라면 본 연구의 활동지의 물음이 문제이며, 후자라면 어려운 과제를 회피하려는 학생들의 본성이 근본적 문제이다. 그러나 후자 역시 학생들의 자의적 해석을 예상하고 미연에 방지하지 못한 활동지의 물음을 문제 삼을 수 있다. 이런 측면에서 전자든 후자든 상관없이 다양한 유형의 반응을 유도하기 위한 활동지의 물음에 대한 개선이 필요하다고 생각된다.

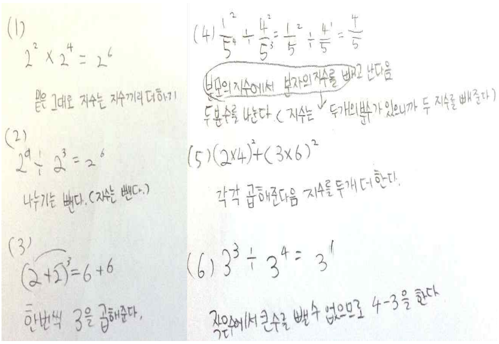
개발된 가설의 유형을 살펴보면, 진위 여부에 관계없이 $a^m + a^n$, $a^m - a^n$, $(a+b)^m$, $a^m \times a^n$, $a^m \times b^n$, $(a^m)^n$, $a^m \div a^n$, $(ab)^m$, $\left(\frac{b}{a}\right)^m$의 총 9개의 유형이 개발되었다. 이들 중 $a^m \times a^n$은 50명(92.6%)의 학생들이 개발할 만큼 가장 많이 개발된 유형이다. 활동지 1은 $a^m \times a^n$ 유형을 예시로 제시한 상태에서 이루어진 활동이므로 당연한 결과로 해석된다. 다음으로 $a^m \div a^n$은 36명(66.7%)의 학생들이 개발한 것으로 두 번째로 많이 개발된 유형이다. 나눗셈은 곱셈의 역이라는 사실에서 착안된 결과로 해석된다. $a^m + a^n$은 13명(24.1%)의 학생들이 개발한 것으로 세 번째로 많이 개발된 유형이다. 지수법칙에는 없는 이 가설을 선행학습의 경험을 갖춘 6명의 학생이 개발하였다는 점은 덧셈 유형이 매력적인 개발 대상임을 보여준다.

선행학습의 경험이 없는 학생일수록 개발한 가설의 유형이 다양하였으며, 오류의 가능성이 높아지는 예상 가능한 경향이 나타났다. [그림 IV-1]은 선행학습을 하지 않은 학생이 다양한 유형을 제시하여 여러 오류를 범한 대표 사례이다. 선행학습을 하지 않은 학생은 $a^m + a^n$, $a^m - a^n$ 유형을 제시하고 오류를 범한 경우가 많았다. 구체적으로 선행학습을 하지 않은 7명의 학생이 $a^m + a^n$ 유형을 제시하고 6명의 학생이 오류를 범하였다[6]. 반면 선행학습의 경험을 가진 6명의 학생이 $a^m + a^n$ 유형을 제시하고 2명의 학생이 오류를 범하였다. 선행학습자가 38명이고 선행학습을 하지 않은 학습자가 16명인 점을 감안할 때, 선행학습을 하지 않은 학생들의 $a^m + a^n$ 유형 제시 비율과 오류 비율이 높음을 알 수 있다.

선행학습의 경험이 가설 개발에 신중함을 부여하고, 그 결과 선행학습을 경험한 학생일수록 경험하지 않은 유형은 배제하고 단조로운 유형의 가설만을 제시하여 성공률을 높이려 한 것으로 해석된다. 앞서 언급한 $a^m \times a^n$꼴의 유형만 18개를 제시한 사례와 $a^m \times a^n$꼴과 $a^m \div a^n$꼴의

6) $a^m + a^n$ 유형에서 오류로 간주되지 않은 사례는 $2^2 + 2^2 = 2^3$, $2^2 + 2^3 = 12$와 같은 경우이다.

유형만 20개를 제시한 사례는 모두 선행학습자이다[7].



[그림 IV-1] 다양한 유형의 가설 개발과 오류

학생별로 개발한 가설의 진위 여부를 살펴보면, 선행학습의 경험을 가진 38명의 학생 중 25명은 옳은 법칙만을 제시하였으며, 11명은 적어도 하나의 가설에서 오류를 나타냈다. 무응답에 그친 학생도 2명이 있었다. 이처럼 선행학습의 경험에도 불구하고 약 28%의 학생들이 오류를 보인 것은 주목할 만한 현상이다.

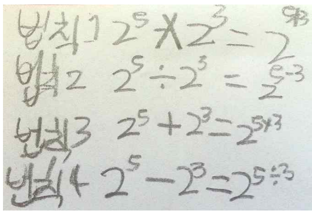
선행학습의 경험이 없는 16명의 학생 중 3명의 학생만이 옳은 가설만을 제시하였으며, 13명의 학생은 적어도 하나의 가설에서 오류를 나타냈다. 이는 선행학습의 경험이 없는 학생일수록 오류의 가능성이 매우 높다는 점을 보여준다. 옳은 가설만을 제시한 3명의 학생들 중 2명은 단조로운 가설만을 제시하여 옳은 가설을 제시하는데 성공할 수 있었다. 구체적으로 $a^m \times a^n$꼴의 유형만 제시한 사례와 $a^m \div a^n$꼴의 유형만 제시한 사례가 있었다. 다른 하나의 사례는 '$2^{100}=4^{50}$, $2^{100}=2^{50}\times 2^{50}$, $2\times 2\times 2\times 2=4\times 4$'을 제시하여 단조로운 가설만을 제시한 두 사례와 구별되었다.

학생들이 개발한 가설로부터 몇 가지 사실을 분석할 수 있다. 첫째, 법칙이 지수 중심으로 기술되어야 함을 인식하지 못한 사례가 있었다. 다시 말해, 지수로 두지 않고 계산을 해버림으로써 지수들 사이의 연관성을 파악하지 못한 사례가 있었다. 예컨대, $(2\times 2\times 2\times 2\times 2)\times(2\times 2\times 2)=32\times 8=256$와 같은 가설은 지수의 측면에서 기술된 것이 아니므로 지수들 사이의 연관성을 파악하기 어렵다.

활동지 1에서 제시한 예시 $2^3\times 2^5=2^{3+5}$는 2^{3+5}를 2^8 또는 256으로 변형하지 않음으로써, 지수들 사이의 연관성을 두드러지게 한 진술이다. 그럼에도 몇몇 학생들은 예시가 함의한 '지수들 사이의 연관성을 파악하기 위해서 지수 중심으로 표현된 진술이어야 한다'는 사실을 인식하지 못한 것이다.

둘째, 법칙 개발에서 빗어진 오류는 밑과 지수를 구분해서 다루는 인식에서 비롯된 것이 많았다. 밑과 지수를 통합된 하나의 대상으로 간주하고 그 의미를 따져가면서 법칙을 개발해야 타당한 법칙 발견이 이루어질 수 있다. 그러나 몇몇 학생들은 밑과 지수를 분리해서 다룸으로써 $2^5-2^3=2^{5-3}$, $2^6-2^4=2^{6-4}$, $2^6\times 5^5=10^{11}$, $(3^2)^3=27^6$, $(2^3\times 2^5)^2=4^9\times 4^{25}=4^{34}$ 등의 오류가 발생하였다. [그림 IV-2]는 제공한 예시로부터 곱을 합으로, 나눗셈을 차로 변화하는 패턴을 감지하고, 이를 과잉 일반화하여 합을 곱으로, 차를 나눗셈으로 변화한 형태이다. 이는 밑과 지수의 패턴에만 치우쳐, 밑과 지수를 통합된 하나의 대상으로 보는 대상화와 그에 따른 의미 해석에 실패한 대표 사례이다.

7) 선행학습을 한 학생들의 법칙 생산은 발견학습의 결과인지 선행 지식의 재생인지에 대한 면밀한 구분이 필요하다. 그러나 본 연구에서는 구분 가능한 근거를 마련하지 못하였으므로 그 근원에 대한 논의는 배제하였다.



[그림 IV-2] 대상화와 의미 해석에 실패한 사례

셋째, 동분모 분수 곱셈에서 분모를 그대로 두는 형태의 오류가 있었다. $\frac{5}{16} \times \frac{5}{16} = \frac{5^2}{16}$, $\frac{1^2}{8} \times \frac{1^3}{8} = \frac{1^5}{8}$, $\frac{2^3}{3} \times \frac{2^2}{3} = \frac{2^{2+3}}{3}$ 등이 대표적이다. 이 오류는 두 가지 해석이 가능하다. 첫 번째는 분자에서는 곱셈의 형식, 분모에서는 덧셈의 형식이라는 상반된 절차를 적용한 오류이다. 분자만을 지수법칙의 대상으로 삼고 분모는 지수법칙에 동반된 부차적인 대상으로 간주한 태도에서 기인한 것으로 해석된다. 두 번째는 괄호를 붙이지 않은 기호 표현상의 오류이다. 다시 말해, $\left(\frac{5}{16}\right) \times \left(\frac{5}{16}\right) = \left(\frac{5}{16}\right)^2$라고 기록되어야 하는데, 괄호를 넣지 않음으로써 나타난 오류에 해당된다.

넷째, 모순된 두 가지 결과가 공존하는 현상이 목격되었는데, 이는 선행학습자 위주로 파악되었다. 대표적 사례로 $2^5 + 2^3 = 2^8$과 $2^5 \times 2^3 = 2^8$을 제시한 경우, $2^7 - 2^2 = 2^5$, $2^6 \div 2^3 = 2^2$을 제시한 경우, $2^6 \div 2^4 = 2^2$과 $2^6 \div 2^9 = \frac{2^2}{2^3}$을 제시한 경우가 있었으며, 이들은 모두 선행학습자였다. 특히 첫 번째 경우에서 동일한 두 숫자 2^5과 2^3의 다른 연산임에도 같은 법칙을 적용한 모순점을 인식하지 못한 것은 주목할 만한 사실이다. 앞의 두 경우는 다른 연산에 대해 같은 법칙을 적용한 모순이며, 세 번째 경우는 같은 연산에 대해 다른 법칙을 적용한 모순으로 몇몇 학생들은 두 가지 측면의 모순점을 인식하지 못하였다.

2. 활동지 2의 결과 및 분석: 법칙의 일반화와 그 표현

기호 표현 일반화를 시도한 47명의 학생들은 $a^m \times a^n$ 유형의 일반화 표현에서 가장 높은 성공률을 보여주었다. 24명(51.1%)의 학생들이 밑과 지수의 일반화 표현에 성공하였다. 다음으로 $(ab)^m$과 $\left(\frac{b}{a}\right)^m$ 유형의 일반화 표현에서 각각 19명(40.4%), 19명(40.4%), $(a^m)^n$ 유형에서 7명(14.9%), $a^m \div a^n$ 유형에서 0명의 순으로 나타났다.

$a^m \div a^n$ 유형에서 0명이 나타난 것에 대해 세 가지 해석이 가능하다. 첫 번째는 이 유형의 경우 m과 n의 대소 관계에 따라 결과가 다른 형태로 나타난다는 점을 인식하지 못한 탓이다. 두 번째는 m, n의 대소 관계에 따라 결과가 다른 형태로 나타난 점을 인식하였지만, 정리하는 방식을 알지 못한 데에서 비롯된 현상일 수 있다. 대다수의 학생들은 $a^m \div a^n = a^{m-n}$이라고 답하였는데, 이는 첫 번째와 두 번째 해석 모두가 가능하다. 세 번째는 구분하여 정리하는 방법을 생각했지만 정교하게 구분하지 못한데서 비롯된 것이다. 예컨대, $m > n$이면 $a^m \div a^n = a^{m-n}$, $m < n$이면 $a^m \div a^n = \frac{1}{a^{m-n}}$라고 정리한 사례가 대표적이다. 이 사례는 $m = n$인 사례를 누락하였다.

$(a^m)^n$ 유형에서 7명의 학생만이 일반화 표현에 성공한 것은 판서된 사례의 영향 때문인 것으로 보인다. 두 학급 모두 학생들이 제시한 가설에서 $2^{100} = 4^{50}$과 같은 경우가 $(2^3)^2 = 2^{3\times2}$과 같은 경우에 비해 많았다. 따라서 연구자는 이들을 적절히 섞어 그룹으로 묶어 제시하였는데[8],

$2^{100}=4^{50}$와 같은 예는 패턴의 파악을 어렵게 하였다. $b^2=B^2$, $4^a=2^b$, $a^x=(a\text{의 약수})^{x\text{의 배수}}$, $9^x=3^{ay}$, $a^x=(a^2)^x$과 같은 오류 사례는 패턴 파악의 실패에서 기인된 것으로 볼 수 있다.

$a^3\times a^2=a^5$과 같이 밑만 일반화한 경우와 $2^m\times 2^n=2^{m+n}$과 같이 지수만 일반화한 경우처럼 미완성 일반화 표현이 적지 않게 나타났다. 특히 밑만 일반화한 경우가 지수만 일반화한 경우에 비해 더 많이 나타났다. 밑만 일반화한 경우는 33차례였으며, 지수만 일반화한 경우는 5차례에 불과하였다. 이처럼 연구 참여자들은 밑을 지수에 비해 더 잘 일반화하였다.

미완성 일반화 표현은 $a^m\times a^n$, $a^m\div a^n$, $(a^m)^n$ 유형에 비해 $(ab)^m$, $\left(\dfrac{b}{a}\right)^m$ 유형에서 많이 나타났다. $(ab)^m$, $\left(\dfrac{b}{a}\right)^m$ 유형에서 밑만 일반화한 경우가 각각 10, 10차례, 지수만 일반화한 경우가 각각 1, 1차례가 있었다. $a^m\times a^n$, $a^m\div a^n$, $(a^m)^n$ 유형에서도 밑만 일반화한 경우가 각각 4, 5, 4차례였으며, 지수만 일반화한 경우가 각각 1, 1, 1차례였다. 이처럼 미완성된 일반화 표현은 밑의 변수가 2개인 경우에 더 많이 나타났다. 이것은 학생들이 지수에 비해 밑을 이루는 변수의 개수에 보다 민감하게 반응한다는 것을 보여준다. 다시 말해, 지수의 변수보다 밑의 변수가 많아질수록 일반화 표현의 완성도는 떨어지는 것이다.

일반화 표현의 성공과 실패에서 선행학습의 경험은 영향력이 적은 것으로 조사되었다. 이는 유형에 관계없이 공통적으로 나타난 현상이다. 예컨대, $a^m\times a^n$ 유형에서 밑과 지수의 일반화에서 선행학습자와 미선행학습자의 수가 각각 13, 11명이었다. 또 일반화에 실패한 사례도 각각 9명, 6명이었다. $(ab)^m$ 유형에서도 밑과 지수의 일반화에서 선행학습자와 미선행학습자의 수가 각각 11, 8명이었으며, 일반화에 실패한 사례도 각각 8명, 6명이었다. 이처럼 일반화 표현의 성공과 실패는 선행학습의 영향력이 적은 것으로 드러났다.

반면 미완의 일반화 표현에서 선행학습의 경험은 영향이 적지 않은 것으로 드러났다. $a^m\times a^n$, $a^m\div a^n$, $(a^m)^n$, $(ab)^m$, $\left(\dfrac{b}{a}\right)^m$ 유형에서 선행학습자는 각각 5, 6, 4, 9, 10명이었으며, 미선행학습자는 각각 0, 0, 1, 2, 1명이었다. 이처럼 선행학습을 경험한 학생에게서 미완의 일반화 표현이 많이 나타났다. 이것은 선행학습의 경험이 완성된 일반화로 향하는 중간 단계로서의 미완의 일반화 표현을 촉진시키는 역할을 할 수 있다는 추측을 가능하게 한다.

몇 가지 유형의 오류가 발견되었는데, 변수를 적절하게 두지 않음으로써 일반성이 제한된 오류가 있었다. 밑 또는 지수가 다른 경우를 같은 변수로 두어 $(a\times a)^b=a^b\times a^b$, $x^y\times x^y=x^{2y}$와 같은 나타낸 사례가 대표적이다. 밑만 일반화한 사례와 지수만 일반화한 사례 역시 이러한 오류에 해당한다.

법칙을 형성하기에 충분하지 않은 기호 표현의 오류도 있었다. $\div=-$, $\times=+$와 같은 사례가 대표적이다. 기호 표현의 관행을 무시하고 개념 이미지에만 치우쳐 변수를 배제한 체 법칙을 표현하였는데, 의미는 이해가 되지만 공적으로 허용될 수 없는 제한점이 있다. 또 a^{m+n}, $\dfrac{1}{a^{m-n}}$, $(a^m)^n$, a^mb^n, $\left(\dfrac{b}{a}\right)^m$와 같은 사례도 있었다. 등식으로 표현되지 않음으로써 법칙이 될 수 없는 한계를 지닌다. 이처럼 몇몇 학생들은 대수 법칙

---

8) 토파즈 효과를 경계하여 4를 2^2으로 변형하지 않고 학생들이 제시한 표현 그대로 4^{50}이라고 한 것이다.

형성을 위해 반드시 구비되어야 하는 조건인 변수 및 등호의 필요성에 대한 이해가 부족하였다.

계산상의 오류도 있었다. $A^a \times A^b = A^{ab}$, $A^1 \div A^1 = A^1$, $(a^b \times a^c)^2 = a^{b+2} \times a^{c+2}$, $(A \times A)^a = (A \times a) \times (A \times a)$와 같은 사례가 대표적이다. 이러한 오류는 패턴을 잘못 이해하는 데서 비롯된 오류로 보인다.

3. 설문 결과 및 분석

지수법칙 발견으로 대표되는 본 수업의 장단점에 대한 학생들의 반응은 <표 IV-1>과 같다.

<표 IV-1> 본 수업 방법의 장단점

장점	단점
이해하기 쉽다. 잘못된 점을 배울 수 있다. 재미를 느낄 수 있다. 사고력을 키울 수 있다.	모르는 것을 창조하라고 하니 막막하다. 진도가 걱정된다.

좀 더 구체적으로 학생들의 반응을 살펴보면 다음과 같다.

- 학원에서 반복하고 학교에서 생각을 하면서 적는 거라서 조금 더 머릿속에 잘 들어온 것 같다(학생 K).
- 공식도 만들어보고 문제도 만들어보니 사고 능력이 올라가는 것 같다(학생 M).
- 모르는 것을 적으라고 하고 무조건 생각만 하라고 하시니 뭘 어떻게 해야 할지 모르겠다. 모르는 것을 창조 하라니 막막하다. 문제를 풀어서 하는 것이 재미있는데, 그냥 교과서 데로 풀면 좋겠다(학생 Y).
- 책에 나오는 답을 무조건 베껴서 하는 수업이 아니라 우리가 직접 알아가면서 풀다 보니 시간이 빨리 간다. 오늘 역시 지수법칙을 간단하고 쉽게 나타내는 것을 우리가 직접 생각해서 하니 더 이해가 잘 되고 재미있다. 주위 친구들의 생각을 알아가며 내 생각을 비교하여 들었더니 시간이 정말 빨리 가고 재미있었다(학생 D).

이상과 같은 학생들의 반응으로부터 본 수업에 대한 두 가지 대조적 의견이 자리 잡고 있음을 알 수 있다. 창조의 어려움을 호소하는 의견과 창조의 즐거움을 제안하는 의견이다. 학생 Y의 의견에서 보듯, 어떻게 해야 하는지 몰라 막막하다는 창조의 어려움을 피력하는 의견은 결국 교과서 방식에 대한 선호를 주장한다. 법칙을 학습하고 관련 문제를 해결하는 방식에 대한 선호이다. 반면, 학생 D의 의견에서 보듯, 몇몇 학생들은 직접 법칙을 개발하고 표현하고 일반화하는 경험을 갖는 것에 대해 즐거움을 느끼고 있다. 이들은 교과서 방식에 대해 부정적인 입장을 취한다. 요컨대, 본 연구에서 설계한 발견식 수업 방법은 창조의 어려움과 진도에 대한 걱정이 자리 잡고 있지만, 이해하기 쉽고 잘못된 것을 배울 수 있고 사고력을 키울 수 있는 방법으로 요약된다.

V. 결 론

본 연구에서는 지수법칙 발견을 위한 교수 방법을 설계하고 적용가능성을 탐색하였다. 연구 참여자의 활동 및 설문 분석 결과, 지수법칙 발견을 위한 교수는 지수법칙 개발 기회를 제공하고 일반화 표현을 장려함으로써, 지수법칙 이해를 돕고 오류를 배우고 사고력을 키울 수 있는 것으로 나타났다(<표 IV-1>). 반면 창조에 대한 막연함과 단조로운 가설의 과다한 생산이라는 문제점도 지니고 있었다.

본 연구의 논의는 지수법칙이라는 소재에 국한되기 때문에 법칙 발견에 관한 일반적인 어려움으로 인한 학습 장애는 다루지 못한 한계가 있음에도 불구하고, 적어도 지수법칙의 교육에

도움이 될 수 있음을 시사한다. 왜냐하면 학생 설문에서 보았듯이, 법칙 발견으로 인한 창조의 즐거움을 느낄 수 있는 가능성을 함의하기 때문이다.

지수법칙 교육에서 중요한 것은 결국 지수법칙 자체라기보다, 법칙을 발명하는 과정일 것이다. 실제로 수학에 많은 법칙이 있고 지금도 새로운 법칙이 생성되고 있다는 점을 상기하면 쉽게 수긍할 수 있는 부분이다. 많은 수학 법칙이 존재하는 만큼, 법칙을 일일이 기억하기보다 법칙을 발명하는 노하우가 필요한 것이다. 이러한 관점에 근거하여 본 연구에서 개발한 방법이 교수 방법으로 활용 가치가 있음을 제언한다.

첫째, 가설 생성의 과정에서 자연스럽게 드러나는 학생들의 다양한 오류는 지수법칙에 대한 논의를 다채롭게 할 수 있는 활용가능성을 시사한다. 선행학습의 경험이 있는 학생들조차 a^m+a^n, a^m-a^n 유형을 제시하는 것을 보면, 이 유형이 왜 법칙으로 다루어지지 않는지에 대한 논의가 이루어져야 할 것으로 보인다. 그러나 법칙을 우선적으로 제공하는 결과론적인 교과서는 덧셈과 뺄셈의 유형을 다루는 논의를 간과하기 쉽다.

둘째, 지수법칙의 발견에 있어 중요한 인식을 깨닫는 반성가능성을 시사한다. 지수법칙의 발견에서 중요한 인식 중 하나는 지수 중심으로 표현해야 할 필요성에 대한 정신이다. 지수 사이의 관련성을 파악하기 위해서는 계산 결과를 지수 중심으로 표현해야 할 필요가 있다. 법칙의 학습과 적용이라는 결과론적 교수에서는 이러한 인식을 파악하기 어렵다.

셋째, 수학적 표현의 의미를 엄격하게 따져볼 수 있는 교육가능성을 시사한다. 변수를 적절하게 두지 않음으로써 $(a\times a)^b=a^b\times a^b$, $x^y\times x^y=x^{2y}$과 같이 일반성이 제한된 오류는 동일 변수와 상이한 변수의 미묘한 차이를 이해하는 계기가 될 수 있다. 법칙을 형성하기에 불충분한 기호 표현인 a^{m+n}, $\times=+$과 같은 오류는 등호와 변수에 대한 필요성을 자각하는 기회가 될 수 있다.

이러한 연구 결과에 기초하여 지수법칙 개발과 관련한 몇 가지 교수학적 시사점을 얻을 수 있다.

첫째, 활동지 개발 시 물음에 대한 세심한 접근이 요구된다. 본 연구의 활동지 1은 ‘가능한 한 많이’라는 애매한 문구로 인해 학생들의 오해와 회피 현상을 차단하지 못한 한계를 지닌다. 이런 점을 고려할 때, 활동지의 물음에서 학생들의 오해와 회피 현상을 동시에 차단하는 세심함이 필요하다. 이는 활동지의 질문에서 몇 가지 제약을 통해 가능하다. 예컨대, ‘단, 비슷한 유형의 법칙을 여러 개 만들지 않을 것’이라는 문구 삽입을 생각할 수 있다.

둘째, 지수법칙 발견에 중요한 수단과 인식을 파악하는 기회가 되게 할 필요가 있다. 지수법칙의 발견에는 ‘등호와 변수’라는 수단과 ‘지수 중심 표현의 필요성’이라는 인식이 요구된다. 법칙의 발견이 중요한 것은 과정을 학습할 수 있기 때문이며, 과정의 학습에서 중요한 것은 발견에 대한 노하우일 것이다. 이런 점을 고려하면 교수의 중점 사항은 발견에 필수적인 수단과 인식이 되어야 할 것이다.

셋째, 오류를 어떻게 다루어야 할지에 대한 논의가 필요하다. 활동지 1, 2에서 확인된 여러 유형의 오류는 교육적으로 높은 활용도를 지닌다. 왜냐하면 오류는 학생들의 부족한 점을 드러내는 도구이기 때문이다. 예컨대, $(3^2)^3=27^6$와 같은 오류를 통해 밑과 지수를 분리해서 바라보는 학생 인식을 진단할 수 있다. 동시에 이러한 오류는 밑과 지수를 통합하여 의미의 관점에서 밑과 지수를 바라보고 법칙을 개발해야 함을 주지시키는 교육적 수단이 될 수 있다.

넷째, 일반화에 대한 이해를 높이는 방안 개발이 요구된다. 활동지 2의 어려움 중 하나는 일반화에 대한 학생들의 이해 부족이었다. 이것은 일반화의 경험 부재에서 비롯된 것일 수도 있으며, 아니면 일반화에 대한 활동지 2의 문장 설명력이 부족한 탓일 수도 있다. 전자라면 일반화의 경험 축적이 필요하며, 후자라면 설명력이 높은 문장 개발이 요구된다.

지수법칙 학습 이전에 일반화 학습 경험이 부재하다는 점을 고려하면 전자의 시각에서 몇 가지 노력이 강구될 필요가 있다. 초등학교 과정에서 함수 관계를 x, y를 사용한 식으로 표현하거나 중학교 1학년 과정에서 방정식을 표현하고 미지수를 구하는 경험만으로는 불충분하다. 왜냐하면 이들은 일반화라고 보기 어렵기 때문이다.

의식하지 못하지만 지나치는 일반화의 소재는 다양하다. 예컨대, 함수식 $y=2x+3$, $y=-2x+1$, $\cdots$ 등을 포괄하는 일반화 표현 개발의 기회 제공이 대표적이다. 이러한 소재 발굴과 적용으로 지수법칙 발견학습 이전에 일반화를 학교 수학에서 경험하는 기회를 제공해야 할 것이다.

참고문헌

고호경 외 12명(2013). **중학교 수학 2**. 서울: 교학사.

김대성(2005). **설명식 수업과 발견식 수업이 학습과제 유형에 따라 학업성취에 미치는 효과**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

김세경(2009). **학습과제 유형에 따라 귀납적 발견학습과 연역적 발견학습이 학업성취에 미치는 효과**. 한국교원대학교 교육대학원 석사학위논문.

김연식 · 우정호 · 박영배 · 박교식(1997). 수학교육학 용어 해설 (6). **수학교육학연구, 7**(1), 475-484.

김윤숙(2001). **수학과 도형 학습에서 설명식 수업과 발견식 수업의 효과**. 서강대학교 교육대학원 석사학위논문.

김현동(2011). **발견학습과 설명학습의 비교에 따른 학습지도연구 - 미분단원을 중심으로**. 계명대학교 교육대학원 석사학위논문.

도종훈 · 박윤범(2011). 고등학교 수학 교과서에 제시된 유리수 지수 $a^{\frac{m}{n}}$의 정의에 관한 소고. **수학교육, 50**(1), 61-67.

손용일(2003). **설명식 수업과 발견식 수업이 학업적 자아개념 수준에 따라 학업성취에 미치는 효과**. 부산교육대학교 교육대학원 석사학위논문.

신항균 외 6명(2013). **중학교 수학 2**. 서울: 지학사.

이강섭 외 10명(2013). **중학교 수학 2**. 서울: 미래엔.

이미복 · 양성호(1995). 지수법칙의 지도에 관한 연구. **과학교육, 12**, 77-90.

이병수(2012). 실수계의 공리를 이용한 지수 a^r의 학습과 지도. *East Asian Mathematical Journal, 28*(2), 159-172.

이헌수 · 김영철 · 박영용(2013). 무리지수에 대한 교사들의 인식과 오류. **한국학교수학회논문집, 16**(3), 583-600.

이헌수 · 박형빈 · 배강수(2011). 무리 지수를 갖는 수에 대한 예비교사들의 인식과 오류. **수학교육논문집, 25**(2), 323-339.

이홍우(2000). **증보교육과정탐구**. 서울: 박영사.

정아름(2000). **컴퓨터를 활용한 발견학습에 관한 연구: 고등학교 1학년 함수 단원을 중심으로**. 이화여자대학교 교육대학원 석사학위논문.

최영기(2000). $(-8)^{\frac{1}{3}}$에 내재된 수 체계 확장의 의미와 오류해석. **수학교육, 39**(2), 145-150.

황선욱 외 8명(2013). **중학교 수학 2**. 서울: 좋은

책 신사고.

Bruner, J. S. (1961). *The act of discovery. Harvard Educational Review, 31*, 21-32.

Bruner, J. S.(1966). *Toward a theory of instruction*. NY: W. W. Norton.

Freudenthal, H.(1973). *Mathematics as an educational task*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.

Lefrancois, G. R. (1997). *Psychology for teachers* (9th ed). Belmont, CA:Wadsworth.

Design of Instruction Helping 8th Grade Students Discover the Power Laws and its Application

Kang, Jeong-Gi (Jinyeong Middle School)

By designing and applying the lesson helping to discover the power laws, we tried to investigate the characteristics on the class. To do this, we designed a discovery lesson on the power laws and applied to 54 8th grade students. As results, we could observe the overproduction of monotonous laws, tendency to vary the type of development and increase error to students without prior learning experience, and various errors. All participants failed to express the generalization of $a^m \div a^n$ and some participants expressed an incomplete generalization using variables partially for the base or power. We could also observe an error of limited generality or a representation error which did not use the equal sign or variables. In the survey of students, there were two contradictory positions to appeal to the enjoyment of the creation and to talk about the difficulty of creation. Based on such results, we discussed the pedagogical implications relating to the discovery of power laws.

* Key Words : Discovery of the power laws(지수법칙), Discovery lesson(발견식 학습), Representation of the generalization(일반화 표현)

논문접수 : 2017. 3. 28
논문수정 : 2017. 5. 13
심사완료 : 2017. 5. 15