

초등학교 수학교과서 속 과제의 학습 경로 분석: 넓이와 부피를 중심으로

고 은 성* · 이 은 정** · 황 지 현***

학생의 학습기회를 형성하는 데 있어 교과서는 상당히 중요한 역할을 한다. 이를 고려하면 교과서 분석은 학생들에게 어떠한 학습 기회를 제공하는지 이해하는데 있어 중요하다. 본 연구는 초등학교 수학교과서를 학습 경로(learning trajectory)에 제시된 넓이와 부피 개념의 이해의 발달 단계에 비추어 분석하였다. 1~6학년의 수학교과서 속의 넓이와 부피에 관한 과제들을 그 과제를 해결하는데 요구되는 사고와 행동을 기초로 학습 경로에 제안된 발달 단계를 이용하여 코딩하였다. 그 결과, 수학교과서 속의 과제와 학습 경로 간의 상당한 불일치를 발견하였다. 우선, 교과서는 학습 경로에 제안된 나이보다 상당히 늦게 해당 학습 기회를 제공하였다. 또한, 넓이의 경우 5학년, 부피의 경우 6학년에 학습 기회가 집중되어 있었으며, 이런 집중된 학습 기회도 개념의 발달보다는 넓이 또는 부피의 공식을 적용하는데 중점을 두었다. 본 연구의 결과는 교과서 개발뿐만 아니라 수학수업에서 학생의 학습 기회를 확장시키는데 중요한 시사점을 제시한다.

I. 서론

측정은 학생들의 일상생활에서 중요한 부분을 차지한다. 길이, 넓이, 부피, 그리고 각도의 개념은 학생들의 생활 속 경험과 밀접하게 연관되어 있을 뿐만 아니라, 나아가 수학을 배우는 데 있어 기하를 비롯한 여러 분야와 연결되어 있다. 수와 도형, 두 개념의 연결고리로서, 넓이와 부피에 대한 이해는 다른 대수적 개념, 즉 곱셈이나 분수의 개념을 이해하는데 서로 중요한 기반이 되며, 측정과 관련된 실생활 문제를 해결하는데 있어서도 중요한 역할을 한다. 넓이와 부피의 학습의 중요성으로 인해 교육자들은 학생들의 넓이와 부피의 개념 발달 단계에 관심을 가져왔

고(Sarama & Clements, 2009), 그 결과, 일부 연구자들은 학생의 사고 발달 단계를 구체화하였다(Clements & Sarama, 2004). 이와 동시에, 많은 선행연구들이 넓이와 부피를 학습하는데 있어 학생들이 겪는 어려움을 관찰하고 이를 극복하도록 도울 수 있는 방법을 찾고자 노력하였다, 예를 들면, 변의 길이를 더하여 넓이를 구하거나 면의 개수를 세어 부피를 구하는 학생들이 넓이와 부피에 대한 올바른 이해를 형성하는데 기여할 수 있는 방법을 찾고자 노력하였다(Clements, Battista, & Sarama, 2001). 그러나 수학교실에서 학생들은 여전히 정답을 얻기 위한 공식의 적용을 반복할 뿐, 개념의 이해를 발달시키거나 정답으로 구한 값의 의미를 생각해 볼 수 있는 기회를 충분히 갖지 못하는 제한적인 학습 기회의

* 전주교육대학교, kes7402@jnue.kr (제1 저자)

** 전주교육대학교 강사, ejlee13@snu.ac.kr

*** 아이오와대학교 대학원, jihyun-hwang@uiowa.edu (교신저자)

상황에 놓여 있다(Clements & Battista, 1992).

제한적인 학습 기회가 의미하는 바는, 학생들이 넓이와 부피에 대한 개념적인 이해를 발달시킬 수 있는 다양한 과제를 해결할 기회는 적게 제공되는 반면, 오로지 공식을 적용하여 답을 구하는 과제를 접할 기회가 많을 수 있다는 것이다. 넓이와 부피에 대한 교수학습을 위한 시사점을 얻기 위해 본 연구는 학생들의 반복되는 공식의 적용 이면에 놓여 있을 학생들의 학습 기회에 주목하였다.

본 연구는 교과서의 분석을 통해 학생들의 학습의 기회를 살펴보고자 한다. 선행연구에 의하면, 교과서가 학습의 기회를 형성하는 데 중요한 역할을 한다고 알려져 있다. 비록 학생, 학습 자료에 대한 개인적 이해, 신념, 그리고 교실 환경에 따라 다르지만, 교사들은 교과서를 중심으로 자신들의 교수를 구성한다(Ball & Cohen, 1996). 또한 개인적 차이는 있겠지만, 교과서는 어떤 내용을 어떤 학년에 가르칠 것인지, 어떠한 순서로 얼마의 시간을 할애하여 가르칠 것인지를 결정하는데 상당한 영향을 미친다(Freeman & Porter, 1989). 나아가 교과서는 특정 학년에 대한 교수 방법을 선택하는데 도움을 주기도 하며, 교실에서의 활동을 보완하기 위한 추가 과제를 선택하는데에도 영향을 준다(Thompson, Senk, & Johnson, 2012).

이런 교과서의 학습 기회를 형성하는데 있어 중요한 역할은 교과서의 무엇을 어떻게 분석할 것인가에 대한 질문을 던진다. 일부 교과서에 대한 연구들은 교과서 속의 과제가 제공하는 학습 기회들이 얼마나 교육과정의 의도를 잘 반영하고 있는지, 즉 교육과정과 교과서 속의 과제의 정렬(alignment)에 초점을 맞추고 있다. 예를 들면, 미국과 같이 교육과정 개발의 주체와 교과서 개발의 주체가 서로 다른 나라에서는 이에 대한 연구가 활발히 이루어지고 있다(Martone, &

Sireci, 2009; Polikoff, 2015). 우리나라 초등학교 수학의 경우, 국가수준의 교육과정을 바탕으로 정부의 주도하에 개발된 교과서를 이용한다. 이와 같이 우리나라 초등학교 수학은 교육과정과 교과서 개발의 주체가 동일하기 때문에, 본 연구에서는 교육과정과 교과서 속의 과제의 정렬보다는 선행연구에 의해 구체화된 학습 경로와 교과서 속의 과제의 정렬에 대해 분석한다.

학습 경로와 교과서의 과제를 비교한 선행연구들은 교과서 속의 과제가 실증연구에 기반을 두는 학생들의 발달 단계를 얼마나 잘 반영하고 있는지에 초점을 맞추고 있다(Clements, 2007; Hong, Choi, Hwang, Runnalls, Payne, & Meiners, 2016). 학생들의 특정 개념에 대한 학습 발달 단계, 즉 학습 경로를 이용하여 교과서 속의 과제를 분석하게 되면 교과서가 기존 연구에서 밝히고 있는 발달 단계에 맞추어 적절한 학습의 기회를 제공하는지를 살펴볼 수 있다. 특히, Clements와 Sarama(2004)에 따르면, 학습 경로는 특정 수학 개념에 대한 학생들의 사고와 학습(발달)에 대한 기술이며, 또한 그에 상응하는 교수학적 과제들로 이루어진 가설적 경로이다. 교수학적 과제들은 각 발달 단계 별로 가정된 학생들의 사고와 행동을 유도하도록 구성된다.

우리나라의 선행연구에서도 많은 초등학생들이 넓이와 길이의 단위를 혼동하며(방정숙, 김상화, 박금란, 2006), 넓이를 길이의 중첩으로 이해하고 있으며(안선영, 방정숙, 2006), 넓이가 갖는 양감에 대해 빈약한 이해를 가지고 있다고 보고되고 있다(지혜은, 2010). 특히, 부피는 다른 영역에 비해 학생들의 성취도가 매우 낮게 나타나고 있으며(이은호, 2006), 많은 초등학생들이 부피 개념에 대한 정확한 이해 없이 쌓기나무의 개수를 세는 활동 혹은 부피를 구하는 공식을 통해 답을 구하는 경향이 있는 것으로 보고되고 있다(김혜정, 2013). 따라서 넓이와 부피에 대한

학습 경로와 교과서 속의 과제의 정렬에 대한 분석은 넓이와 부피에 대한 교수학습을 위한 시사점을 도출하는데 유용한 정보를 제공할 수 있다. 본 연구의 구체적인 연구문제는 다음과 같다.

첫째, 넓이를 위한 학습 경로와 우리나라 초등 학교 수학교과서 속의 과제의 정렬은 어떠한가?

둘째, 부피를 위한 학습 경로와 우리나라 초등 학교 수학교과서 속의 과제의 정렬은 어떠한가?

II. 이론적 배경

1. 학습 경로란

넓이와 부피를 포함한 수학 개념에 대한 학습 경로는 관련 개념에 대한 아동들의 사고 발달에 대한 실증적 연구들을 종합한 것으로(Clements & Sarama, 2004), 사고의 발달 단계와 행동, 그리고 구체적인 교수 과제와 전략을 동시에 설명하고 있다. 학습 경로의 각 단계에서 기술하는 사고 및 행동의 특징은 그 연령대의 아동이 학습을 받지 않은 상태에서 도달하는 것이 가능한 것으로, 실증 연구를 통해 밝혀진 내용을 바탕으로 구성된다. 또한 각 단계는 위계적 성격을 가지고 이전 단계에서 등장한 개념과 사고 과정을 바탕으로 설계된다(Simon, 1995). 그러나, 아동들이 학습 경로에 제시된 모든 발달 단계를 따라야 하는 것은 아니다. 학습 경로가 제시하는 범주 안에서, 개인적, 환경적, 사회적 요인들에 의해 서로 다른 발달 경로를 거친다고 가정할 수 있다. 다시 말해서, 교사들은 주어진 상황에 맞게 가설학습경로(hypothesized learning trajectory; Simon, 1995)를 별도로 구성하게 된다. 예를 들면, 학생의 이전 단계의 학습 결과에 따라 특정 발달 단계를 건너뛰도록 과제를 구성할 수도 있고, 학생의 어려움을 보고 이전의 발달 단계나

건너 뛴 단계의 과제를 다시 제시할 수 있다. 이런 가설학습경로는 학습을 교수보다 우선순위에 둘 뿐만 아니라, 동시에 학습과 관련된 학습 목표, 이용 가능한 과제들, 학생의 사전 지식과 경험 등이 포함된 교수학적 의사결정을 강조한다.

학습 경로의 정의는 두 측면으로 구성된다. 하나는 사고의 발달 단계와 행동이고 다른 하나는 교수 전략에 기반을 두는 구체적인 교수학적 과제이다. 학습 경로는 학생들이 시간이 지남에 따라 특정한 수학 개념들을 어떻게 이해하게 되는지에 대한 상세한 기술을 포함하며, 동시에 가능한 학습 경로를 제시한다(Clements & Sarama, 2004). 다시 말해서, 학습 경로는 학생들이 수학 개념을 학습하기 위해서 따르게 되는 일련의 단계들을 포함한다(Sarama & Clements, 2009; Simon & Tzur, 2004). 학습 경로를 구성하는 각 단계에 대한 기술은 각 단계에서 학생의 개념적 이해가 어떠한지, 그 특징을 기술하고 설명한다. 학습 경로는 또한 학생들의 이해 및 행동과 관련된 교수학적 과제들을 제시하는데, 이는 양을 인식하는 수준에서 양을 체계적으로 구조화하는 수준으로의 학생의 진전을 독려하기 위한 자료로 사용될 수 있다.

각 단계는 이전 단계들의 개념과 과정에 기초하여 위계적으로 설정되며(Simon, 1995), 학생들이 기술된 사고와 행동을 나타낼 수 있는 연령을 제시한다. 넓이와 부피를 위한 학습 경로는 0세부터 9세까지의 사고와 행동을 제시하고 있다. 그러나 이것이 유치원부터 초등학교 3학년까지의 교과서만을 분석하는데 사용될 수 있다는 것을 의미하지는 않는다. 각 단계의 사고를 개발할 수 있는 기회가 적절하게 제공되고 있는지 조사하기 위해 좀 더 폭넓은 연령과 학년의 교과서를 조사하는 것이 중요하다. 따라서 기술된 학습 경로에 비추어 각 단계에서 제공되어야 하는 학습 기회가 너무 이른 시기에 또는 너무 늦은 시

기에 제공되는지 여부를 알아보기 위해 교과서를 분석하는 것이 필요하다. 또한 광범위한 학년의 수준을 조사함으로써 각 학년에서 제공하는 학습 기회가 학습 경로의 위계에 적절하게 배열되어 있는지 아닌지에 대한 통찰을 얻을 수 있다.

필요한 학습 기회가 적시에 제공되는지와는 별개로, 학습 경로에 기반을 두는 교과서 분석은 교과서가 학생들이 이전 단계의 개념 이해에 기초하여 그들의 이해를 발전시켜 나가도록 얼마나 잘 안내하는지 파악할 수 있도록 해준다. 교육과정이 과중한 양의 학습내용을 포함하고 있기 때문에(Chris, 2015), 적절한 학습 기회가 다소 늦게 제시될 것이라 예상할 수 있지만, 교과서가 학생들이 그들의 이해를 구성하는데 도움이 될

수 있도록 얼마나 잘 위계적으로 조직되어있는지 조사하는 것은 중요하다.

학습 경로에 기반을 둔 교수학습에 대한 연구는 크게 두 가지로 구분된다. 하나는 학생들의 발달 단계에 대한 실증적 연구들이고, 다른 하나는 교사들이 교실 수업을 위해 학습 경로를 어떻게 사용하는지에 대한 연구들이다. 첫 번째 종류의 연구들은 Clements와 Sarama(2007)에 의해 학습 경로로 잘 요약되었다. 이러한 종류의 연구들은 학습 경로의 타당성을 입증하는데 아주 중요한 역할을 한다. 두 번째 종류의 연구는 가설 학습경로에 대한 연구에서 이루어졌는데(Simon, 1995), 연구결과는, 특히 낮은 연령의 학생들을 대상으로 한 수업에서, 학습 경로에 기반을 둔

<표 II-1> 넓이를 위한 학습 경로

나이	발달 경로	특징	코드
0-3세	넓이를 양으로 인식하지 못하는 단계	· 변을 맞대어 넓이를 비교한다.	101
		· 직사각형 덮기 과제에서 원 또는 다른 도형들을 불완전하게 그린다.	102
4세	넓이를 단순하게 비교하는 단계	· 도형의 한 변만을 이용하거나 길이와 폭을 더한 값에 기초하여 넓이를 비교한다.	201
		· 겹침이나 단위 반복을 요구하는 과제에서 넓이를 불완전하게 비교한다.	202
	한 방향으로 넓이를 측정하는 단계	· 구체물을 이용해 직사각형을 덮는다.	203
		· 그림으로 영역을 덮으려 시도하지만 빈공간이 있으며 그려진 모양들이 가지런하지 않다.	204
5세	원시적으로 덮는 단계	· 빈 공간이 없게 덮으나 가지런히 배열하는데 오류를 범한다.	301
		· 비체계적으로 세면서 오류를 범한다.	302
	넓이의 단위를 알고 반복하는 단계	· 하나의 열을 모두 세고 다음 열을 센다.	303
		· 표시해 가며 정확히 센다.	304
6세	부분적으로 열을 구조화하는 단계	· 일부의 열들은 한 번에 만들고 일부의 열들은 개별적으로 정사각형들을 그려서 만든다.	401
		· 분할을 하지만 가로와 세로의 크기를 조절하지 않는다.	402
7세	열과 행을 구조화하는 단계	· 평행선들을 이용해 분할한다.	501
		· 각 열에 있는 수를 반복하여 (단위넓이) 사각형들을 센다.	502
		· 단위넓이 사각형을 결정하기 위해 1차원(가로 또는 세로)의 값을 측정한다.	503
	넓이를 보존하는 단계	· 배열이 바뀌어도 넓이가 동일하게 유지됨을 안다.	504
		· 대부분의 맥락에서 영역 덮기의 필요성을 인식한다.	505
8세	배열을 구조화하는 단계	· 가로와 세로의 곱에 의해 넓이가 결정된다는 것을 이해한다.	601

수업이 학생들의 학습과 이해의 향상에 기여했음을 보여준다(Clements & Sarama, 2007).

2. 넓이를 위한 학습 경로

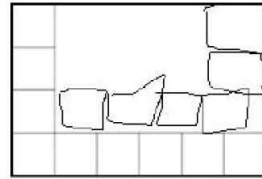
영역의 넓이를 구하는 것은 2차원의 측정 단위를 이용해 그 영역을 덮는 것 또는 등분할하는 것으로 간주될 수 있다(Sarama & Clements, 2009). 넓이는 경계선 내부에 포함되는 2차원 공간이다. 넓이의 측정은 적당한 2차원 영역을 하나의 단위로 선택하여 사용하며, 합동인 두 영역은 넓이가 서로 같으며, 겹치지 않는 두 영역을 합한 넓이는 각 영역의 넓이를 합한 것과 같다는 것을 가정한다(Reynolds & Wheatley, 1996). <표 II-1>은 넓이를 위한 학습 경로이다(Sarama & Clements, 2009, pp.300-304).

넓이를 양으로 인식하지 못하는 단계의 아동들은 넓이가 경계선 내부에 포함되는 2차원의 양임을 인식하지 못해 두 도형의 넓이를 비교할 때 변을 맞대는 전략을 사용한다. 직사각형 덮기 과제에서 직사각형 내부에 원이나 다른 도형들을 그리지만 영역을 덮기 위해 그린다는 징후는 나타나지 않는다. 이러한 발달은 0-3세 아동들에게서 처음으로 발견된다.

넓이를 단순하게 비교하는 단계의 아동들은 도형의 한 변만을 이용하거나 길이와 폭의 합에 기초하여 넓이를 비교한다. 겹침이나 단위 반복을 요구하는 과제에서 넓이를 불완전하게 비교한다. 예를 들면, 많은 수의 단위 정사각형 크기의 타일을 주고 4×5의 직사각형에 타일이 몇 개 들어가는지 물으면, 직사각형에 타일을 겹쳐보거나 채워보지 않고 추측하여 15개라고 말한다. 이러한 발달은 4세 아동들에게서 처음으로 발견된다.

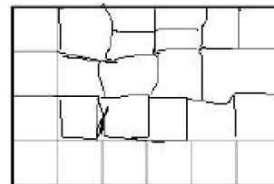
한 방향으로 넓이를 측정하는 단계의 아동들은 타일과 같은 구체물이 없이는 2차원 공간을 조직하고 조절하고 구조화할 수 없다. [그림

II-1]에서와 같이 큰 직사각형을 그림을 그려 덮는 과제에서 빈 공간이 있고 가지런하지 않으며, 가로 또는 세로, 한 방향으로만 그린다. 즉 하나의 차원에서만 연속을 생각한다. 이러한 발달은 4세 아동들에게서 처음으로 발견된다.



[그림 II-1] 그림을 그려 직사각형을 덮는 과제의 예

원시적으로 덮는 단계의 아동들은 영역의 전체가 덮여져야 한다는 것을 명확히 이해하기 때문에 [그림 II-2]에서와 같이 빈 공간이 없게 영역을 덮는다. 그러나 넓이의 단위에 대한 인식이 부족해 배열이 가지런하지 못하다. 어떤 것은 두 번 세기도 하고 어떤 것은 세지 않는 등 비체계적으로 센다. 이러한 발달은 5세 아동들에게서 처음으로 발견된다.



[그림 II-2] 원시적으로 덮는 수준의 예

넓이의 단위를 알고 반복하는 단계의 아동들은 하나의 열에 있는 단위들을 모두 센 후 다음 열의 단위들을 센다. 또는 센 단위들을 옮기는 것과 같은 지각적 표시를 이용해 단위들을 센다. 이러한 발달은 5세 아동들에게서 처음으로 발견된다.

부분적으로 열을 구조화하는 단계의 아동들은 분할을 할 때 일부의 열들은 한 번에 하지만 일

부의 열들은 개별적인 정사각형을 그려 만든다. 분할을 하지만 단위의 크기를 결정하기 위해 가로와 세로의 길이를 고려하지 않는다. 이러한 발달은 6세 아동들에게서 처음으로 발견된다.

열과 행을 구조화하는 수준의 아동들은 평행선들을 이용해 열을 분할한다. 각 열에 있는 수를 반복하여 단위넓이의 수를 센다. 단위넓이를 결정하기 위해 1차원(가로 또는 세로)의 값을 측정한다. 이러한 발달은 7세 아동들에게서 처음으로 발견된다.

넓이를 보존하는 단계의 아동들은 배열이 바뀌어도 넓이가 동일하게 유지됨을 안다. 즉 서로 달라 보이는 영역들이 어떻게 동일한 넓이를 갖는지 넓이의 덧셈적 합성에 대해 추론할 수 있다. 이러한 발달은 7세 아동들에게서 처음으로 발견된다.

배열을 구조화하는 단계의 아동들은 가로와 세로의 곱에 의해 넓이가 결정된다는 것을 이해

한다. 이를 이해하기 위해 그림을 반드시 필요로 하지는 않는다. 이러한 발달은 8세 아동들에게서 처음으로 발견된다.

3. 부피를 위한 학습 경로

부피의 측정은 길이나 넓이의 측정과는 달리 3차원적인 공간감각 능력이 필요하다(Battista, 2003). 입체도형의 부피를 구하기 위해서는 공간을 구조화하기 위한 적절한 측정단위의 선택, 빠르게 배열하기, 그리고 세기와 같은 능력이 요구되며, 3차원 배열을 구조화하는 과정에서 학생들은 다양한 전략들을 사용한다(Sarama & Clement, 2009). <표 II-2>는 부피를 위한 학습 경로이다(Sarama & Clement, 2009, pp. 306-308).

0-3세의 아동은 공간을 인식하고 공간 속의 물체를 인식할 수 있게 된다. 예를 들면, 이 시기의 아동들은 “이 상자에는 많은 블록들을 넣을

<표 II-2> 부피를 위한 학습 경로

나이	발달 경로	특징	코드
0-3세	부피를 양으로 인식하는 단계	· 들이 혹은 부피를 속성으로 인식한다.	101
4세	들이를 직접 비교하는 단계	· 한 용기에 있는 물을 다른 용기에 부어서 두 용기를 비교한다.	201
		· 높이 또는 밑면 중 하나만 이용하여 부피를 비교한다.	202
5세	들이를 간접 비교하는 단계	· 또 다른 용기를 이용하여 두 용기를 비교한다.	301
6세	원시적으로 3차원 배열을 세는 단계	· (쌓기나무의 수를 셀 때)면 단위의 단위 정사각형을 세면서 모서리에 있는 정육면체를 두 번 세기도 하고, 내부에 있는 정육면체는 세지 않는다.	401
		· 잘 구조화된 맥락 내에서는 한 번에 하나씩 쌓기나무를 센다.	402
7세	들이를 알고 반복하는 단계	· 임의 단위를 사용하여 정확히 세면서 용기를 채운다	501
		· 정·육면체로 공간을 채우는 것을 이해하지만, 층이나 곱셈적 사고를 사용하지 못한다.	502
		· (쌓기나무의 수를 셀 때)내부에 있는 쌓기나무를 센다.	503
8세	부분적으로 3차원을 구조화하는 단계	· 한 층에 있는 쌓기나무의 수를 셀 후, 뛰어세기를 사용하여 쌓기나무의 총 개수를 구한다.	504
		· 한 행 또는 열에 있는 쌓기나무의 개수를 셀 후, 덧셈 혹은 뛰어세기를 사용하여 쌓기나무의 총 개수를 구한다.	601
9세	3차원 행과 열을 구조화하는 단계	· 한 층에 있는 쌓기나무의 수를 행 곱하기 열로 구한 후, 층의 수를 곱하여 쌓기나무의 총 개수를 구한다.	602
		· 가로, 세로, 높이의 곱에 의해 부피가 결정된다는 것을 안다.	701

수 있다”와 같이 표현할 수 있으며, 부피를 양으로 인식하기 시작한다.

들이를 직접 비교하는 단계에 해당하는 아동들은 두 용기를 비교하는 상황에서 용기의 높이 또는 밑면 중 하나에만 주목하여 부피를 비교하거나 한 용기에 있는 물질을 다른 용기에 부어서 비교하는 특징을 보인다. 4세부터 이러한 직접 비교의 특징을 보이기 시작한다.

5세 아동들은 두 용기를 비교하는 상황에서 또 다른 용기를 이용하는 특징을 보이기 시작한다. 즉, 비교하는 대상인 두 용기가 아닌 다른 용기에 담긴 물질을 각각의 용기에 담아보면서 두 양을 비교하는 추이적 사고를 할 수 있다. 이러한 특징을 보이는 아동들은 들이를 간접 비교하는 수준에 해당한다.

원시적으로 3차원 배열을 세는 단계의 아동들은 쌓기나무로 공간을 채우는 것에 대한 불완전한 이해를 보인다. 공간에 채워진 쌓기나무의 수를 구할 때, 면 단위의 단위 정사각형을 세면서 모서리에 있는 정육면체를 두 번 세기도 하고, 내부에 있는 정육면체는 세지 않는 특징을 보인다. 그러나 작은 상자를 쌓기나무로 채우는 것과 같이 잘 구조화된 맥락에서는 한 번에 하나씩 쌓기나무를 잘 센다. 이러한 특징들은 6세 아동들에게서 관찰되기 시작한다.

7세 아동들은 임의 단위를 사용하여 정확하게 세면서 용기를 채울 수 있게 되는데, 이러한 특징은 들이를 알고 반복하는 단계에 해당된다.

부분적으로 3차원을 구조화하는 단계의 아동들은 정육면체로 공간을 채우는 것을 이해하지만, 층이나 곱셈적 사고를 하지 못한다. 또한 공간에 채워진 쌓기나무의 수를 구할 때, 내부에 있는 쌓기나무를 셀 수 있으며, 한 층에 있는 쌓기나무의 수를 셀 후 뛰어세기를 사용하여 쌓기나무의 총 개수를 구할 수 있다. 이러한 특징들은 7세 아동들에게서 관찰되기 시작한다.

3차원 행과 열을 구조화하는 단계의 아동들은 한 행 또는 열에 있는 쌓기나무의 개수를 셀 후, 덧셈 혹은 뛰어세기를 사용하여 쌓기나무의 총 개수를 구할 수 있다. 또한 한 층에 있는 쌓기나무의 수를 행 곱하기 열로 구한 후, 층의 수를 곱하여 쌓기나무의 총 개수를 구하기도 한다. 이러한 특징들은 8세 아동들에게서 관찰되기 시작한다.

3차원 배열을 구조화하는 단계의 아동들은 그림을 그려보지 않고도 가로와 세로와 높이의 곱에 의해 부피가 결정된다는 것을 이해한다. 이러한 특징은 9세 아동들부터 보이기 시작한다.

본 연구의 목적은 넓이와 부피의 측정을 위한 학습 경로에 비추어 초등수학 교과서 속의 과제의 정렬을 조사하고 분석하여, 이를 토대로 넓이와 부피의 측정에 대한 교수학습 시사점을 도출하는 것이다. 따라서 이어지는 절에서는 우리나라 학생들이 넓이와 부피의 학습에서 겪는 어려움을 주제로 한 선행연구들을 살펴본다.

4. 넓이에 대한 학생들의 이해

6학년 학생들의 넓이 단위의 이해, 넓이 개념의 이해, 넓이의 비교 방법에 대한 이해를 조사한 방정숙 외(2006)의 연구결과에 따르면, 거의 모든 학생들이 넓이의 측정을 위해 알맞은 단위를 선택하는데 실패했으며, 가로×세로의 방법을 직사각형의 넓이를 구하는 방법으로 이용하지만 단위 넓이의 수를 세는 방법을 직사각형의 넓이를 구하는 방법으로 인식하는 데는 실패하였다. 뿐만 아니라 공식을 이용하지 않고 두 도형의 넓이를 비교하는 상황에서 대부분의 학생들이 직접 비교나 간접 비교와 같은 방법을 생각해내는데 실패하였다.

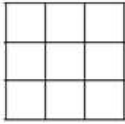

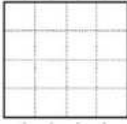
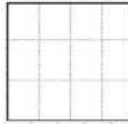
이종욱(2010)은 넓이 공식을 중점적으로 학습한 학생들은 정형적인 모양의 넓이는 잘 구하면

서도 비정형적인 모양의 넓이를 이해하지 못한다고 지적하면서, 덮기 활동 경험이 풍부한 학생들은 이를 해석하는데 더욱 유리할 것이라고 주장하였다.

초등학교 2, 3, 4학년 학생들의 단위 넓이 비교 능력을 조사한 지혜은(2010)의 연구결과에 따르면, 시각적 정보가 충분히 제공되지 않은 문제 상황에서 학생들은 현저히 낮은 성취를 보였다. [그림 II-3]은 지혜은(2010)의 연구에서 단위 넓이 비교 능력을 검사하기 위해 사용한 문제와 2, 3, 4학년 학생들의 정답률을 보여준다. 1번 문항과 비교할 때 2번 문항의 정답률이 현저히 낮음을 알 수 있다. 1번 문항의 경우 단위 넓이에 대한 명확한 이해 없이 작은 사각형의 개수를 세거나, 또는 가로 길이 비교를 통해서도 ㉠의 넓이가 넓다고 선택할 수 있다. 그러나 2번 문항에서는 평행선에 의해 만들어지는 서로 다른 두 개의 작은 사각형이 두 도형의 넓이를 비교할 수 있는 공통 단위로 적절하지 않음을 인식하고, 점에

의해 새롭게 단위 넓이를 구성해서 두 도형의 넓이를 비교해야 한다. 이와 같은 정답률의 현저한 차이는 학생들이 단위 넓이에 대한 이해가 충분히 발달되지 않았으며, 단위 넓이를 이용한 두 도형의 비교에 어려움이 있음을 보여준다.

오영열(2010)은 2007년 개정 수학과 교육과정에서의 넓이의 측정 지도에 대한 분석을 통해 다음을 지적하였다. 첫째, 넓이의 측정을 이해하는데 핵심이 되는 아이디어에 초점을 맞추는 개념적 접근이 이루어져야 한다. 둘째, 2차원적인 평면 도형의 넓이를 측정하는 원리를 이해하기 위해서는 단위 정사각형이 직사각형 내에서 어떠한 형태로 배열이 되는지에 대한 직사각형의 배열 구조를 학생들이 이해할 수 있도록 지도할 필요가 있다. 셋째, 1학년의 비교하기 활동이 이후 학년에서의 보편단위를 도입한 직사각형의 넓이 측정으로 유기적인 연결이 부족하다. 오영열의 이러한 지적은 2007년 개정 수학과 교육과정이 학생들에게 넓이를 위한 학습 경로에 제시

문항	정답률
<p>1. ㉠과 ㉡ 중 어느 것이 더 넓은가요? 혹은 같을까요?(단, 작은 사각형의 크기는 같습니다)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>㉠</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>㉡</p>  </div> </div>	<p>2학년: 77.5% 3학년: 80.7% 4학년: 89.4%</p>
<p>2. ㉢과 ㉣ 중 어느 것이 더 넓은가요? 혹은 같을까요?(단, 점 사이의 간격은 같습니다)</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;"> <p>㉢</p>  </div> <div style="text-align: center;"> <p>㉣</p>  </div> </div>	<p>2학년: 18.2% 3학년: 29.5% 4학년: 45.0%</p>

[그림 II-3] 단위넓이 비교 능력 검사 문항과 정답률

된 단계들(<표 II-1> 참고)을 경험할 수 있도록 충분한 기회를 제공하고 있지 않음을 지적한 것으로 볼 수 있다.

박은률과 백석운(2010)은 평면도형의 넓이 학습에서 나타나는 인식론적 장애의 유형을 크게 측정의 속성과 관련된 장애와 단위정사각형 개념과 관련된 장애로 구분하였다. 측정의 속성과 관련된 장애의 원인은 길이와 넓이 개념 사이의 혼동, 도형 영역과 측정 영역에서 정의하는 방법상의 혼동 때문이며, 단위정사각형 개념과 관련된 장애의 원인은 학생들에게 단위정사각형이 넓이의 기본단위로 인식이 잘 안되기 때문이며, 2차원적 평면의 개념이 불완전하게 정착했기 때문이다. 박은률과 백석운(2010)은 학생들이 이러한 인식론적 장애를 극복할 수 있도록 넓이와 길이, 두 속성간의 관계를 살펴볼 수 있는 활동을 제시하고, 측정의 개념으로 넓이를 정의할 필요가 있으며, '정렬(array)'의 개념으로 넓이공식을 유도하고, 통합적으로 공식을 적용하도록 지도할 필요가 있다고 제시하였다. 또한, 단위정사각형 개념과 관련된 장애를 극복하도록 돕기 위해서는 각 단계를 충분히 활동할 수 있도록 넓이를 구하고자하는 도형의 소재 및 형태를 다양하게 제시할 필요가 있으며, 넓이에 대한 연속량 개념을 인식할 수 있는 활동을 제공해야 한다고 하였다.

앞서 살펴본 선행연구들은 우리나라 수학과 교육과정이 넓이의 측정에 대한 학습에서 초등학생들에게 넓이의 개념을 형성하고 발달시키는 데 적절한, 그리고 충분한 학습 경험을 제공하고 있는지에 대해 문제를 제기한다.

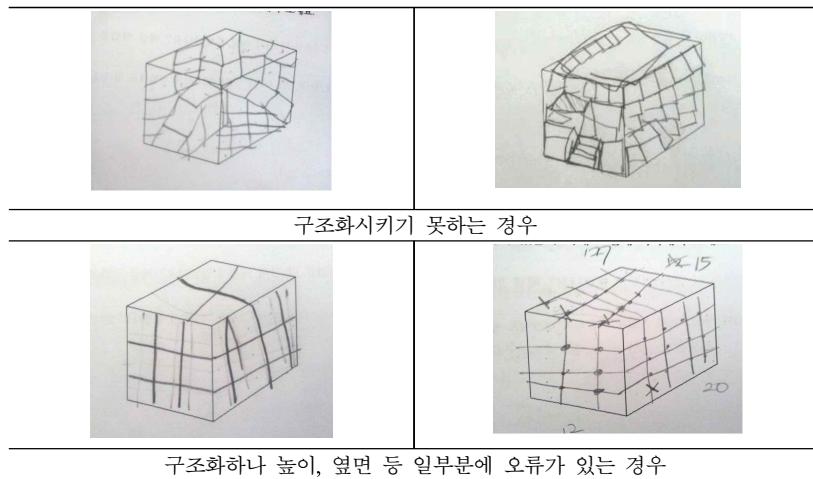
5. 부피에 대한 학생들의 이해

초등학교 고학년 학생들의 들이에 대한 어렵 측정 전략을 분석한 박승주(2007)의 연구 결과에

따르면, 대부분의 5학년 학생들과 수학 성취도가 낮은 6학년 학생들은 들이를 어렵 측정하기 위해 높이를 이용하는 것으로 나타났다, 이들은 들이를 밑면과 높이를 연관시켜 전체 양으로 생각하지 못하고 높이로만 생각하고 있으며, 이러한 결과는 학생들이 들이 속성에 대한 이해가 부족함을 보여주었다. 한편 이미 부피 공식을 배운 6학년 학생들의 대부분은 공식을 이용하여 들이를 어렵하는 경향이 있었으며, 학생들은 부피 단위를 그대로 사용하여 답을 적거나 부피 단위에서 들이 단위로 바르게 환산하지 못하였다. 이는 학생들이 들이의 단위 크기에 대한 감각이 부족함을 보여준다.

김혜정(2013)은 부피 비교하기를 통해 초등학교생들의 부피에 관한 추론 능력을 분석하였다. 연구 결과에 따르면, 많은 학생들이 단위부피를 선택하여 부피를 비교하는 문제에서 부피 속성을 고려하여 측정단위를 선택하기보다는 도형 내부에 있는 점이나 단위넓이를 이용하는 것으로 나타났다. 또한 학생들은 쌓기나무의 개수를 대체적으로 잘 세어 직육면체의 부피를 구할 수 있었으나, 직육면체를 3차원 공간으로 구조화시키는 데에는 어려움이 있었으며, 이로 인해 단위부피의 수를 정확히 헤아리지 못하였다(그림 II-4 참조). 김혜정(2013)은 위와 같은 결과는 학생들이 단위부피나 부피에 대한 개념을 이해하고 부피를 측정하기보다는 쌓기나무의 개수를 세는 활동에 치우쳐져 있기 때문이라고 지적하며, 교사는 부피 구하는 공식만을 강조할 것이 아니라 단위 부피의 개념을 알고 부피를 바르게 측정할 수 있도록 단위부피에 대한 지도를 강화할 필요가 있다고 하였다.

지금까지 일부 연구들을 통해 학생들이 부피 학습에서 어려움을 겪고 있다는 것을 확인하였다. 그러나 부피는 측정 영역 중 초등학교생들의 성취 수준이 매우 낮음에도 불구하고(이은호,



[그림 II-4] 쌓기나무를 직육면체 형태로 구조화하는 문제의 응답반응 예시

2006), 부피와 넓이에 대한 국내 연구가 매우 드문 것으로 나타났다(하수현 외, 2010). 이는 부피 개념에 대한 학생들의 이해와 부피 학습에서 학생들이 겪는 어려움과 그 이유를 조사하는 연구들이 활발하게 이루어질 필요가 있음을 시사한다.

III. 연구방법

본 연구의 목적은 교과서 속의 과제의 분석을 통해 학생들의 넓이와 부피에 대한 학습의 기회를 조사하는 것이다. 따라서 본 연구에서 분석 대상은 우리나라 2009 개정 초등학교 수학교과서이다. 교과서의 분석은 넓이와 부피에 관한 단원에만 국한되지 않고 초등학교 수학교과서 12권 모두에 대해 이루어졌는데, 왜냐하면 넓이와 부피에 관한 단원 외에도 의도하지 않게 넓이와 부피에 대한 학습이 일어날 수 있기 때문이다. 예를 들면, 분수에 대한 단원이 넓이에 대한 단원은 아니지만, 도형을 등분할하는 과제를 통해 넓이와 관련된 학습이 일어날 수 있다.

넓이와 부피에 대한 학습 경로가 만 9세(초등 3학년)까지의 발달 단계를 제시하고 있기 때문

에, 우리는 학습 경로가 초등 3학년보다 상위 학년 사이의 가능한 정렬이 존재하지 않는다는데 동의한다. 그래서 교과서가 초등 1-3학년 학생들이 시기 적절하게 각 발달 단계에서의 사고를 경험할 수 있도록 하는지 뿐만 아니라 초등수학 전 과정 속에서 학습 경로에 맞는 순서로 학습 기회를 제공하는지에 주목하여 조사하였다.

교과서 분석을 위해 먼저 학습 경로가 제시하는 발달 단계로부터 코드를 설정하는 것부터 시작하였다(Sarama & Clements, 2009). 한글판 학습 경로가 존재하지 않았기 때문에 연구자들은 먼저 학습 경로에 제시된 단어들을 사용하여 영어로 코드를 설정하고 논의를 통해 함께 한글로 번역하였다. 연구자들은 코드를 명확히 하는데 주력하였으며, 또한 한국어 기술이 명확한지, 그리고 영어 원본과 정확하게 연결되는지 확인하는데 주력하였다. 넓이와 부피에 대한 코드는 각각 <표 II-1>과 <표 II-2>에 기술되었다. <표 II-1>과 <표 II-2>에 제시된 코드에 해당되지 않는 것은 별도의 코드(999)로 구분하였다.

연구자 삼각검증을 통해 코딩의 타당도를 높이기 위해 세 명의 연구자 모두가 코드를 설정하고, 분석 단위를 정하고, 교과서 속의 과제를

<표 III-1> 채점자간 신뢰도

	제곱합 (Sum of Square)	자유도 (Degree of freedom)	평균제곱 (Mean Square)	추정분산 (Estimated Variance)	총분산 비율 (% of Total Variance)	신뢰도 (Reliability)
분석단위 (Item)	8573.71	172	49.85	11.79	32.84	
채점자 (Coder)	3369.08	2	1684.54	9.65	26.88	0.9845
잔차 (Residual)	3500.26	242	14.46	14.46	40.28	

*절대오차분산(absolute error variance)은 0.15임

코딩하는데 참여하였다(Creswell, 2013). 분석 단위는 하나의 과제로 하였다. 다시 말해서, 하나의 답을 요구하는 과제가 분석 단위가 되었다.

코드를 개발한 후, 채점자간 신뢰도(inter-rater reliability)와 일치도를 확인하기 위해 먼저 세 명(A, B, C)의 연구자 중 두 연구자(A, B)가 5학년 1학기의 5단원 ‘다각형의 넓이’를, 두 연구자(A, C)가 6학년 1학기의 6단원 ‘직육면체의 겉넓이와 부피’를 각각 코드화하였다. 신뢰도 측정을 위해 일반화가능성 이론 D 연구(generalizability theory D study)(Alkharusi, 2012)를 적용하였다. 하나의 분석 단위당 세 개까지 코드를 부여할 수 있도록 하였다. 그래서 분석 단위의 총 개수보다 코드의 총 개수가 더 많이 나타날 수 있다(<표 IV-1>과 <표 IV-2> 참고). 채점자간 신뢰도는 0.985로 상당히 높았다(<표 III-1> 참고). 신뢰도를 확인하는 과정에서 몇몇 불일치하는 코딩 결과를 발견하였는데, 이러한 과제들에 대해서는 코드에 대한 일치를 이끌어낼 때까지 연구자 간의 논의를 진행하였다. 다음은 교과서 속 넓이와 부피와 관련된 과제의 코드화에 대한 예이다.

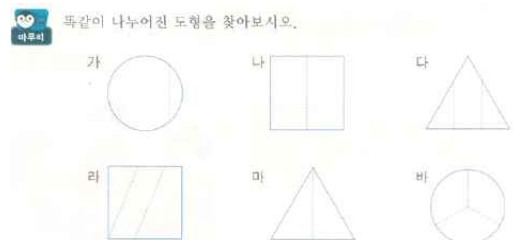
[그림 III-1]은 1학년 1학기 4. 비교하기 단원에 포함된 과제로 101, 201, 202로 코드화되었다. 이 과제를 해결하는데 있어 넓이 개념에 대한 인식이 없는 아동들은 넓이와 길이를 혼동하여 변을 맞대어 비교할 수 있으며(101), 넓이 개념에 대한 인식이 불완전한 아동들은 길이와 폭을 더하

여 넓이를 비교할 수도 있다(201). 또한 두 도사리를 겹쳐서 비교할 때 불완전한 방식으로 넓이를 비교할 수도 있다(202).



[그림 III-1] 1학년 1학기 4. 비교하기 단원의 과제

[그림 III-2]는 3학년 1학기 6. 분수와 소수 단원에 포함된 과제로 203, 201로 코드화되었다. 이 과제를 해결하는데 있어 넓이 개념에 대한 인식이 불완전한 아동들은 변의 길이에 의존하여 넓이를 비교할 수도 있고(201), 특히 도형 라의 경우, 아동들은 구체물을 이용해 비교 대상을 덮는 방식으로 비교할 수도 있다(203).



[그림 III-2] 3학년 1학기 6. 분수와 소수 단원의 과제

[그림 III-3]은 1학년 1학기 4. 비교하기 단원에 포함된 과제로 201, 202, 301로 코드화 되었다. 이 과제를 해결하는데 있어 들이를 직접 비교하는 수준에 해당하는 학생들은 한 그릇에 있는 물을 다른 그릇에 부어서 물의 양을 비교할 수도 있으며(201), 한 그릇의 높이 혹은 밑면 중에 하나만을 고려하여 물의 양을 비교할 수도 있다(202). 또한, 들이를 간접 비교하는 수준에 해당하는 학생들은 한 그릇에 있는 물을 다른 두 그릇에 각각 부어보고 세 그릇의 물의 양을 비교할 수도 있다(301).

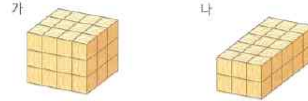


[그림 III-3] 1학년 1학기 4. 비교하기 단원의 과제

[그림 III-4]는 6학년 1학기 6. 직육면체의 겹넓이와 부피 단원에 포함된 과제로 504, 602, 701로 코드화 되었다. 활동2의 첫 번째 문제를 해결하는데 있어 부분적으로 3차원을 구조화하는 수준에 해당하는 학생들은 한 층에 있는 정육면체의 개수를 센 후, 뛰어세기를 사용하여 쌓기나무에 쓰인 정육면체의 개수를 구할 수도 있으며(504), 3차원 행과 열을 구조화하는 수준에 해당하는 학생들은 한 층에 있는 정육면체의 개수를 행 곱하기 열로 구한 후, 층의 수를 곱하여 쌓기나무에 쓰인 정육면체의 개수를 구할 수도 있다(602). 활동2의 두 번째 문제는 <표 II-2>에 제시된 코드에 해당되지 않으므로 별도의 코드(999)로 분류되었다. 활동2의 세 번째 문제는 학생들이 표를 완성하면서 한 층에 있는 정육면체의 개수를 행 곱하기 열로 구한 후, 층의 수를 곱하여 쌓기나무의 총 개수를 구할 수 있도록 하고 있으며(602), 네 번째 문제는 완성된 표의 결과

를 토대로 가로와 세로와 높이의 곱이 직육면체의 부피를 구하는 공식임을 알도록 하였다(701).

활동 2 부피가 1 cm^3 인 쌓기나무를 직육면체 모양으로 쌓았습니다. 직육면체의 부피를 각각 구하시오.



● 부피가 1 cm^3 인 쌓기나무가 각각 몇 개인지 세어 직육면체 가와 나 의 부피를 구하시오.

● 직육면체의 부피를 쉽게 구하는 방법을 이야기해 보시오.

● 표를 완성하시오.

	가로(cm)	세로(cm)	높이(cm)	부피(cm^3)
가				
나				

● 직육면체의 부피 구하는 방법을 식으로 정리해 보시오.

$$(\text{직육면체의 부피}) = (\quad) \times (\quad) \times (\quad)$$

[그림 III-4] 6학년 1학기 6. 직육면체의 겹넓이와 부피 단원의 과제

IV. 연구결과

1. 넓이에 대한 학습 기회 분석

<표 IV-1>은 넓이의 학습과 관련된 교과서 속의 과제를 분석한 결과이다. 이것은 우리나라 초등학교 수학교과서가 넓이와 관련하여 어떠한 경험을 언제 제공하고 있는지 보여준다. 다시 말해서, 넓이를 위한 학습 경로의 각 단계에서 제시하는 학습 기회를 언제, 얼마나 제공하는지 보여준다. <표 IV-1>을 통해 크게 네 가지 주요 결과가 관찰 되었다.

첫째, 우리나라 초등학교 수학교과서는 학습 경로에서 제시하는 연령보다 상당히 늦게 넓이와 관련된 사고의 경험을 제공하고 있다. 예를 들면, 학습 경로에 따르면 ‘단위넓이 사각형을 결정하기 위해 1차원(가로 또는 세로)의 값을 측정한다(503)’와 같은 사고는 7세 아동들에게서

<표 IV-1> 넓이의 학습과 관련된 교과서 속의 과제 분석 결과

나이	코드	1학년(7세)		2학년(8세)		3학년(9세)		4학년(10세)		5학년(11세)		6학년(12세)		합계
		1학기	2학기	1학기	2학기	1학기	2학기	1학기	2학기	1학기	2학기	1학기	2학기	
0-3세	101	3												3
	102													
4세	201	3				12				4				19
	202	3				12				4				19
	203									1				1
	204													
5세	301													2
	302									2				
	303													
	304									16				
6세	401													
	402													
7세	501									3				3
	502									4				4
	503									1		3		4
	504									34		19		53
	505											5		5
8세	601									56		32		88
	999	3								22		12		34
코드 합계		12				24				147		71		254
단위 합계		6				12				101		52		171

처음으로 나타나는데, 우리나라 초등학교 수학교과서는 6학년 1학기에서 처음으로 학생들에게 이와 같은 사고를 경험할 수 있는 학습 기회를 제공한다. ‘비체계적으로 세면서 오류를 범한다(302)’와 같은 사고 역시 학습 경로에 따르면 5세 아동들에게서 나타나는데 우리나라 초등학교 수학교과서는 이와 같은 사고를 경험할 수 있는 학습 기회를 5학년 1학기에서 처음으로 제공한다.

둘째, 각 단계에서 기술되는 사고들 중 경험할 수 있는 학습 기회가 전혀 제공되지 않거나 1-3개 정도의 과제를 통해서만 학습 기회가 주어지고 있다. 예를 들면, ‘직사각형 덮기 과제에서 원

또는 다른 도형들을 불완전하게 그린다(102)’, ‘그림으로 영역을 덮으려 시도하지만 빈공간이 있으며 그려진 모양들이 가지런하지 않다(204)’, ‘빈 공간이 없게 덮으나 가지런히 배열하는데 오류를 범한다(301)’, ‘하나의 열을 모두 세고 다음 열을 센다(303)’와 관련된 학습 기회는 제공되고 않고 있다. 특히 부분적으로 열을 구조화하는 단계(401과 402)와 관련된 학습 기회는 전혀 제공되고 있지 않다. 또한 ‘구체물을 이용해 직사각형을 덮는다(203)’와 관련된 학습 기회는 5학년 1학기 단계에서 하나의 과제를 통해 제공하고 있으며, ‘비체계적으로 세면서 오류를 범한

다(302)'와 관련된 학습 기회 역시 5학년 1학기 단계에서 두 개의 과제를 통해 제공하는 것이 전부이다. 다른 일부 학습 내용에 대해서도 충분한 학습 기회가 제공되고 있지 못하다.

셋째, 특정 학년에 넓이를 위한 학습 경로에 제시된 사고를 경험할 수 있는 기회가 집중되어 있다. 1학년 1학기 단계에서 '변을 맞대어 넓이를 비교한다(101)', '도형의 한 변만을 이용하여 나 길이와 폭을 더한 값에 기초하여 넓이를 비교한다(201)', '겹침이나 단위 반복을 요구하는 과제에서 넓이를 불완전하게 비교한다(202)'와 관련된 학습 기회를 제공하고 있고, 3학년 1학기 단계에서 역시 코드 '201'과 '202'와 관련된 학습 기회를 제공하고 있고, 다른 대부분의 코드에 대한 학습 기회는 5학년 1학기에 집중되어 있다.

넷째, 특정 내용에 학습 기회가 집중되어 있다. 다시 말해서, '배열이 바뀌어도 넓이가 동일하게 유지됨을 안다(504)'와 '가로와 세로의 곱에 의해 넓이가 결정된다는 것을 안다(601)'에 학습 기회가 집중되어 있다. 부여된 총 코드의 수 254개 중 53개(20.8%)가 코드 504에 해당되며, 88개(34.6%)가 코드 601에 해당된다.

2. 부피에 대한 학습 기회 분석

<표 IV-2>는 부피의 측정을 위한 학습 경로에 따라 교과서의 과제들을 분석한 결과이다. 이것은 우리나라 초등학교 수학교과서가 부피와 관련하여 어떠한 경험을 언제 제공하고 있는지 보여준다. <표 IV-2>를 통해 관찰된 주요 결과는 아래와 같다.

첫째, 초등학교 1학년과 3학년에서 다루어지는 내용은 들이의 측정과 관련된 것으로 들이를 직접 비교하거나 간접 비교하는 수준에 해당하는 과제들이 제시되어 있다. 예를 들어, 크기가 다른 세 그릇에 담을 수 있는 물의 양을 비교하는 과제의 경우, 그릇의 '높이 혹은 밑면 중 하나만 이용하여 부피를 비교한다(202)', '한 그릇에 있는 물을 다른 그릇에 부어서 그릇의 부피를 비교한다(201)', '또 다른 용기를 이용하여 두 용기를 비교한다(301)'와 같이 들이를 직접 비교하거나 간접 비교하는 수준에 해당하는 학습 기회를 제공한다.

둘째, 부피 학습과 관련하여 2학년에서 다루고 있는 내용은 쌓기나무를 쌓아보고 쌓기나무의

<표 IV-2> 부피의 학습과 관련된 교과서 속의 과제 분석 결과

나이	코드	1학년(7세)		2학년(8세)		3학년(9세)		4학년(10세)		5학년(11세)		6학년(12세)		합계
		1학기	2학기	1학기	2학기	1학기	2학기	1학기	2학기	1학기	2학기	1학기	2학기	
0-3세	101	3				3						2		8
4세	201	5				7								12
	202	5				2						2		9
5세	301	4				4								8
6세	401				1							2		3
	402				9							3		12
7세	501											2		2
	503				10							5	13	28
	504											8	3	11
8세	601											2	5	7
	602											9		9
9세	701											11		11
	999	1				6						11	4	15
코드 합계		18			20	22						57	25	142
단위 합계		7			10	16						40	22	95

수를 세어보는 활동이다. 학생들은 교과서에 제시된 쌓기나무와 똑같은 모양으로 쌓아보거나 주어진 쌓기나무로 다양한 모양을 만들어보는 활동을 한다. 이 과제를 해결하기 위해 학생들은 쌓기나무의 위치와 수를 살펴보아야 하며, 쌓기나무의 개수를 헤아릴 때, 눈에 보이지 않는 쌓기나무의 수도 파악할 수 있어야 한다. 따라서 ‘잘 구조화된 맥락 내에서는 한 번에 하나씩 쌓기나무를 센다(402)’와 ‘내부에 있는 쌓기나무를 센다’와 관련된 학습 기회는 제공되고 있으나, ‘직육면체로 공간을 채우는 것을 이해하지만, 층이나 곱셈적 사고를 사용하지 못한다(502)’와 관련된 학습 기회는 제공되지 않고 있다. 이러한 학습 기회의 결여는 학생들이 쌓기나무의 개수를 잘 세어 직육면체의 부피를 구할 수는 있었으나, 측정단위를 선택하여 직육면체를 3차원 공간으로 구조화시키는 데에는 어려움이 있다는 것을 확인한 김혜정(2013)의 연구 결과와도 일맥상통한다.

셋째, <표 IV-2>에 나타난 바와 같이 부피의 측정과 관련된 대부분의 내용이 초등학교 6학년에 집중적으로 다루어지고 있다. 앞서 살펴보았듯이, 1~2학년군과 3학년에 걸쳐 들이를 비교하는 내용과 쌓기나무를 이용하여 3차원을 구조화하는 내용을 다룬 후, 4학년과 5학년에서는 부피의 측정과 관련된 내용들을 전혀 다루고 있지 않다. 특히, 6학년 1학기에 나오는 ‘직육면체의 겹넓이와 부피’의 한 단원에서 코드 ‘101’부터 ‘701’까지 부피의 학습 발달 단계에 해당하는 학습 기회들이 대부분 다루어지고 있다.

V. 결론 및 논의

본 연구에서는 실증 연구를 통해 밝혀진 넓이와 부피를 위한 학습 경로에 비추어 우리나라

초등학교 수학교과서 속의 과제의 분석을 통해 초등수학 교육과정에서 학생들에게 제공되는 넓이와 부피의 학습에 대해 조사하였다. 조사결과 네 가지 시사점을 도출할 수 있었다.

첫째, 우리나라 초등학교 수학교과서는 학습 경로에서 제시하는 연령보다 상당히 늦게 넓이와 부피와 관련된 사고의 경험을 제공하고 있었다. 이러한 결과는 장점과 단점 모두를 내포한다고 볼 수 있다. 장점으로는 관련된 사고의 경험을 연령보다 늦게 제공함으로써 학생들에게 지적 부담을 완화시켜줄 수 있다. 다시 말해서, 학생들은 크게 어려움에 직면하지 않고 관련된 학습을 완성해낼 수 있다. 단점으로는 조금 더 일찍 학생들에게 관련된 사고를 서서히 경험하도록 학습 기회를 제공함으로써 장시간에 걸쳐 넓이와 부피에 대한 이해를 형성해 나가는 기회를 박탈할 수 있다는 것이다.

둘째, 각 단계에서 기술되는 사고들 중 경험할 수 있는 학습 기회가 전혀 주어지지 않거나, 1-3개 정도의 과제를 통해서만 학습 기회가 주어지고 있었다. 앞서 언급했듯이, 아동들이 학습 경로에 제시된 모든 발달 단계를 따라야 하는 것은 아니다. 교사는 학생에 대한 이해와 개인적 신념에 따라 학생에게 특정 단계를 건너뛰거나 반복하게 할 수 있고, 이전의 단계로 되돌아가도록 안내할 수도 있다. 이런 교수학적 선택을 뒷받침하기 위해서 교과서에 모든 발달 단계에 대한 충분한 학습 기회가 제공되는 것이 필요하다. 교사는 각 단계에서 학생들의 활동을 관찰할 수 있는 기회를 가져야만, 관찰 결과를 기초로 학생에게 어떤 단계를 건너뛰도록, 또는 어떤 단계로 되돌아가도록 안내할지 결정할 수 있기 때문이다.

셋째, 넓이와 부피와 관련된 학습의 기회가 특정 학년에 집중되어 있었다. 이것은 우리나라 교과서가 관련된 내용을 하나의 단원에 집약하여 제시하는 몰입형 교과서인 것과 관련이 있다. 우

리나라 초등학교 수학교과서의 경우 넓이에 대한 단원은 5학년 1학기 5단원의 ‘다각형의 넓이’, 6학년 1학기 5단원의 ‘원의 넓이’, 6학년 1학기 6단원의 ‘직육면체의 겉넓이와 부피’에 집중되어 있다. 또한 부피에 대한 단원은 6학년 1학기 6단원의 ‘직육면체의 겉넓이와 부피’에 집중되어 있다. 부피의 경우, 김혜정(2013)의 연구에서 초등학교 4, 5학년 학생들이 3차원 공간을 구조화시키는 데에 어려움이 있다는 결과를 고려해볼 때, 4, 5학년에서 부피 학습과 관련된 학습 기회들이 전혀 제공되고 있지 않다는 결과는 문제점으로 지적될 수 있다. Hong 외(2016)는 ‘Go Math!’ 수학교과서를 넓이와 부피를 위한 학습 경로에 비추어 분석한 결과를 제시하였다. ‘Go Math!’는 넓이의 경우 초등 1-3학년 교과서 각각에서 100개 이상의 과제가 제시되어 있어 학생들이 점진적으로 넓이에 대한 이해를 발달 시키나갈 수 있는 기회를 제공하고 있으며, 부피의 경우 우리나라와 유사하게 특정 학년(초등 5학년)에 다소 집중되어 있는 경향을 보였다.

넷째, 넓이와 관련된 특정 내용에 학습 기회가 집중되어 있었다. 특히, 넓이의 공식과 관련된 내용에 학습 기회가 집중되어 있었다. 이러한 교과서 속의 과제의 구성이 우리나라 초등학교 학생들의 넓이에 대한 개념 이해에 어떠한 문제점을 야기하는지에 대해서는 이미 여러 선행연구를 통해 밝혀졌다(박은를, 백석운, 2010; 방정숙 외, 2006; 이종욱, 2010). 학생들은 가로×세로의 방법을 이용해 직사각형의 넓이를 구하는 것은 성공적으로 해내지만 단위 넓이의 수를 세는 방법을 이용해 직사각형의 넓이를 구하는 데는 실패하거나, 공식을 이용하지 않고 두 도형의 넓이를 비교하는 상황에서 대부분의 학생들이 직접 비교나 간접 비교와 같은 방법을 생각해 내지 못하였다. 넓이 공식을 중점적으로 학습한 학생들은 정형적인 모양의 넓이는 잘 구하면서도 비정

형적인 모양의 넓이를 구하는 데는 실패하였다. 학습 경로에 따르면 직사각형에서 가로와 세로의 곱에 의해 넓이가 결정된다는 것을 이해하기 위해서는 ‘열과 행을 구조화하는 단계(501, 502, 503)’에 대한 학습이 먼저 충분히 이루어질 필요가 있다.

참고문헌

- 김혜정 (2013). **부피 비교 맥락에서 나타나는 초등학교 4,5학년 학생들의 추론 능력에 관한 실태 분석**. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 박승주 (2007). **초등학교 고학년 아동들이 사용하는 어림 측정 전략에 관한 분석**. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 박은를, 백석운(2010). 평면도형의 넓이 학습에서 나타나는 인식론적 장애. **수학교육학연구**, 20(3), 305-322.
- 방정숙, 김상화, 박금란(2006). **초등교사의 수학과 교수법적 내용 지식 정립을 위한 교수학습 자료개발**. 2005학년도 교과공동연구결과 보고서. KRF-2005-030-B00045, 1943-2029.
- 안선영, 방정숙(2006). 평면도형 넓이에 대한 교사의 교수학적 내용지식과 수업 실제 분석. **수학교육학연구**, 16(1), 25-41.
- 오영열(2010). 초등학교에서의 넓이 측정 지도에 관한 고찰 -2007년 개정 수학과 교육과정을 중심으로. **한국초등교육**, 21(1), 233-245.
- 이은호 (2006). **초등학교 6학년 학생들의 측정감각과 측정능력에 대한 실태 분석**. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 이종욱(2010). 직사각형 덧기 과제를 해결하면서 나타난 초등학생의 어림 측정 전략. **수학교육**, 49(3), 374-386.
- 지혜은(2010). **넓이 비교활동에서 나타나는 초등**

- 학교 2, 3, 4학년 학생들의 추론 능력 실태조사. 한국교원대학교 석사학위논문.
- 하수현, 방정숙, 주미경 (2010). 초등수학교육 연구동향-최근 5년간 게재된 국내 학술지 논문을 중심으로-. *수학교육*, 49(1), 67-83.
- Alkharusi, H. (2012). Generalizability theory: An analysis of variance approach to measurement problems in educational assessment. *Journal of Studies in Education*, 2(1), 184-196. doi:10.5296/jse.v2i1.1227
- Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1996). Reform by the book: What Is—or might be—the role of curriculum materials in teacher learning and instructional reform? *Educational Research*, 25(9), 6-8,14.
- Battista, M. T. (2003). Understanding students' thinking about area and volume measurement. In D. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement* (pp. 122-142). Reston, VA: NCTM.
- Chris, H. (2015). New curricula and missed opportunities: Crowded curricula, connections, and "big ideas". *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*.
- Clements, D. H. (2007). Curriculum research: Toward a framework for "research-based curricula". *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(1), 35-70.
- Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp.420-464). NewYork, NY: Macmillan.
- Clements, D. H., Battista, M. T., & Sarama, J. (2001). Logo and geometry. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph*, 10, 1-17.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 81-89. doi:10.1207/s15327833mtl0602_1
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In F. K. Lester (Ed.), *Secondhandbook of research on mathematics teaching and learning* (pp.461-555). Charlotte, NC:Information Age Publishing.
- Creswell, J. W. (2013). *Qualitative inquiry and research design: choosing among five approaches* (3rded.). Thousand Oaks, CA: SAGE.
- Freeman, D. J., & Porter, A. C. (1989). Do textbooks dictate the content of mathematics instruction in elementary schools? *American Educational Research Journal*, 26(3), 403-421.
- Hong, D. S., Choi, K., Hwang, J., Runnalls, C., Payne, A., & Meiners, A. (2016). How well aligned are common core textbooks to learning trajectory in geometry? *Paper presented at the 38th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Tucson, AZ.
- Martone, A., & Sireci, S. G. (2009). Evaluating alignment between curriculum, assessment, and instruction. *Review of Educational Research*, 79(4), 1332-1361. doi:10.3102/0034654309341375
- Polikoff, M. S. (2015). How well aligned are textbooks to the Common Core Standards in mathematics? *American Educational Research Journal*, 52(6), 1185-1211. doi:10.3102/0002831215584435

- Reynolds, A., & Wheatley, G. H.(1996). Elementary student's construction and coordination of unit in a area setting. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 564-581.
- Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children. NewYork, NY: Routledge.
- Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Simon, M. A., & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.
doi:10.1207/s15327833mtl0602_2
- Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(3), 253-295.

How do Korean Elementary Textbooks Pace Students' Learning to Learning Trajectories? : Focus on Area and Volume

Ko, Eun-Sung (Jeonju National University of Education)

Lee, Eun Jung (Jeonju National University of Education)

Hwang, Jihyun (The University of Iowa)

With a significant role of textbooks in shaping students' opportunities to learn, textbook analysis is essential to reveal these opportunities to learn the concept of area and volume. This research aims to show how the Korean textbooks pace students' learning of area and volume across grades by scrutinizing the textbooks with students' developmental sequences, called learning trajectories. Tasks about area and volume in all Korean elementary textbooks (grade 1 to 6) are coded with the specific developmental stages suggested in learning trajectories. As a result, we find considerable

misalignment between the textbooks and the learning trajectories. The textbooks provide opportunities to experience developmental progressions of area and volume later than ages suggested in the learning trajectories. In addition, learning opportunities are significantly concentrated in grade 5 for area and grade 6 for volume with heavy emphases on applying formulas of area or volume. The findings from this research provides important implications concerning design of textbooks as well as improving students' opportunities in the mathematics classrooms.

* Key Words : learning trajectory(학습 경로), area(넓이), volume(부피), elementary mathematics textbooks(초등학교 수학교과서)

논문접수 : 2017. 4. 5

논문수정 : 2017. 5. 17

심사완료 : 2017. 5. 17