대한수학교육학회지 수학교육학연구 제 27 권 제 2 호
Journal of Educational Research in Mathematics
Vol. 27, No. 2, 227 ~ 247. May 2017

일차함수의 식 '$y = ax + b$'의 표현과 해석에서 드러나는 'a'에 대한 중학생간의 서로 다른 의미[1)]

마 민 영* · 신 재 홍**

본 연구의 목적은 함수적 상황을 식 '$y = ax + b(a,\ b$는 상수, $a \neq 0)$'로 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 중학생간의 'a'에 대한 인식의 차이와 그 원인을 탐색하는 것이다. 중학교 1학년 4명의 학생을 대상으로 약 3개월간(2016.5.~2016.7.)에 걸쳐 일차함수의 표현과 해석에 대한 수업을 실시하였고, 수집된 자료를 분석한 결과 상황을 일차함수의 식으로 표현하고 해석하는 과정에서 학생 A와 학생 B의 차이점이 두드러지게 드러났다. 이에 본 연구는 일차함수의 식을 표현하고 해석하는 과정에서 나타나는 학생 A와 학생 B의 차이와 그 원인을 비교, 분석하였다. 그 결과, 학생들이 일정한 변화율을 포함하는 상황에서 구성하는 두 변량과 그들 사이의 관계가 달랐으며, 특히 상황을 식 '$y = ax$'로 동일하게 표현하더라도 'a'에 대한 인식 수준과 식 '$y = ax + b$'의 표현과 해석의 차이를 보였다.

I. 서 론

함수 개념은 현실 세계의 변화를 이해하는데 활용되는 개념으로 학교 수학에서 그 중요성이 지속적으로 강조되어 왔지만(박선화 · 변희현 · 주미경, 2011), 학생들은 함수를 학습하는데 많은 어려움을 겪고 있다는 것이 국내외 여러 연구들에서 보고되어 왔다(이종희 · 김부미, 2003; 이화영 · 류현아 · 장경윤, 2009; Carlson, 1998; Monk, 1992).

미국수학교사협의회(National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000)의 「학교수학을 위한 원리와 규준」에서는 함수 학습에서 수학적 모델을 사용하여 양들 사이의 관계를 이해하는 활동을 주요한 학습 목표로 제안하였다. 이처럼 함수의 학습에서 양의 변화와 그들 사이의 관계를 구성하는 활동은 초기 함수 개념뿐 아니라 이후 함수와 관련된 개념의 발달을 돕는다 (Ellis, 2011).

그러나 우리나라 중학교에서 도입되는 일차함수의 내용을 살펴보면, 전화 건수에 따른 모금된 성금 또는 한 변의 길이의 변화에 따른 정육각형의 둘레의 길이 구하기와 같은 상황에서 두 변량의 변화를 이산적으로 해석하여 표로 나타낸 후 식 '$y = ax + b$'로 빠르게 변환하여 개념을 제시하고 있다. 또한 식에서 'a'에 대해 두 양 사이의 비의 일정함으로 표현하고 해석하기보다 식 또는 그래프에서 'a'의 값을 찾는 활동에 더 주안점을 두고 있다. 이러한 이유로 일차함수 학습에서 식에 대한 학생들의 이해도는 꽤 낮은 편이며(박선화 외, 2011), 학생들은 함수 표현의

* 인동중학교, mmy8724@naver.com (제1 저자)
** 한국교원대학교, jhshin@knue.ac.kr (교신저자)
1) 본 연구는 제1저자의 박사학위 논문의 일부 내용을 포함하고 있음.

필요성과 표현들 사이의 관계를 이해하는데 어려움을 겪고 있다(이종희 · 김부미, 2003). 이는 일정한 변화율을 포함하는 상황을 대수적으로 표현하고 해석하는 과정에서 학생들의 추론에 주목해야 할 필요가 있다는 점을 시사한다.

그러나 상황을 기호화하는 과정에서 학생들의 추론에 주안점을 둔 연구들의 대부분은 대수 학습과 관련되며(마민영 · 신재홍, 2016; 전형옥 · 이경화 · 방정숙, 2009; 최지영 · 방정숙, 2008; Smith & Thompson, 2007), 함수의 학습에서 학생들의 추론의 수준을 다룬 연구는 대수적 표현보다 그래프의 표현과 해석에 더 주목하고 있는 실정이다(Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, & Hsu, 2002; Castillo-Garsow, 2012; Moore & Thompson, 2015). 또한 학생들이 함수의 학습에서 경험하는 어려움을 해소할 수 있는 방안에 대한 연구들에서도 관계식을 그래프로 변환하는 행위에 주목하고 있다(손홍찬 · 류희찬, 2005; 이광상 · 조민식 · 류희찬, 2006).

이에 본 연구는 일차함수를 학습한 경험이 없는 중학생들이 일정한 변화율을 포함하는 상황에서 변화하는 두 양을 찾고, 이들 사이의 관계를 식 '$y=ax+b$'로 표현하고 해석하는 행위와 행위로부터 드러나는 양들 사이의 관계에 대한 이해를 분석 및 제시하고자 한다. 이를 위해 중학교 1학년 네 명의 학생을 대상으로 약 3개월에 걸쳐 실시한 교수실험에서 수집된 수업 자료를 분석하였고, 그 결과 일차함수의 식 '$y=ax+b$'를 표현하고 해석하는 과정에서 학생 A와 학생 B의 차이가 두드러졌다. 본 연구에서는 학생 A와 학생 B가 일정한 속력을 포함하는 상황에서 구성하는 양들 사이의 관계를 Thompson과 Thompson(1992)이 제시한 추론의 수준에 비추어 분석하고, 수준에 따른 '$y=ax+b$'의 표현과 해석에서 드러나는 'a'에 대한 의미의 차이점을 상세히 기술한다.

이를 위해 본 연구를 위한 연구 문제는 다음과 같이 설정하였다.

- 연구 문제 1: 주어진 상황을 일차함수의 식 '$y=ax+b$'로 표현하는 과정에서 드러나는 일정한 변화율인 'a'에 대한 이해는 어떠한가?
- 연구 문제 2: 일차함수의 식 '$y=ax+b$'를 해석하는 과정에서 드러나는 일정한 변화율인 'a'에 대한 이해는 어떠하며, 상황을 식으로 표현하는 과제에서의 이해와 어떻게 연결되는가?

II. 선행 연구

1. 일차함수의 식 '$y=ax+b$'에 대한 교수 · 학습에 대한 연구

일차함수의 교수 · 학습에 대한 연구에서는 학생들이 식 '$y=ax+b$'로 표현하고 해석하는 과정에서 겪는 어려움을 보고하고 있다. 이종희와 김부미(2003)는 중학교 2학년 두 학급을 대상으로 일차함수의 개념을 학습하는 과정에서 학생들의 오류를 대수적 환경과 그래프적 환경으로 나누어 분석하였다. 예를 들면, 그들의 연구에 참여한 학생들 가운데 한 학생이 두 식 '$y=(5-x)\times 4$'와 '$(5-x)\times 4=y$'를 서로 다른 식이라고 주장하자, 그들은 이에 대해 두 변량 사이의 함수 관계를 인식하지 못하고 방정식이라는 특정 관점에 집착하였기 때문이라고 설명하였다. 또한 변수 개념에 대한 장애를 가진 학생의 경우, 식과 그래프에 제시된 두 변수 사이의 관계를 이해하지 못한다는 점을 제시하였다. 이와 유사하게 변희현과 주미경(2012)은 학생들이 주어진 상황에서 두 변수를 설정하는 것에 어려움을 겪고 있음을 보고하며, 이는 종속적

변화 관계에 대한 이해의 취약함과 관련돼 있다고 주장하였다.

이광상 등(2006)은 학생들의 함수 학습의 어려움을 해소할 수 있는 방안으로, 함수의 표상을 다양하게, 역동적으로 탐구할 수 있는 학습기회의 필요성을 제안하였다. 구체적으로, 그들은 중학교 2학년을 대상으로 엑셀을 활용하여 식 '$y=ax+b$'에서 a와 b 값의 변화에 따라 표와 그래프의 변화를 직접 탐구할 수 있는 학습 환경을 학생들에게 제공하였고, 그 결과 문제 해결에 미치는 영향을 보고하였다.

정리하면, 일차함수의 식 표현과 해석에서 학생들이 경험하는 어려움에 주목한 연구들의 대부분은 두 변량 사이의 관계에 대한 인식의 부족함을 그 원인으로 제시하고 있으며, 공학을 활용하여 어려움을 극복하고자 노력하였다. 이러한 연구들은 일차함수의 학습에서 학생들이 경험하는 어려움에 대한 정보와 그 내용을 제공하는 것은 사실이지만, 수업에서 관찰되는 학생의 행위에 주목하여 그 적절성을 평가하는 경우가 대부분이다. 이에 본 연구는 학생들의 일차함수의 식 '$y=ax+b$'에 대한 표현과 해석에서 일시적으로 드러나는 행위에 주목하기보다 서로 다른 상황을 포함하는 여러 과제에서 일관되게 드러나는 행위와 행위로부터 추론되는 사고패턴에 주안점을 두고자 한다.

2. 일차함수의 식 '$y=ax+b$'에서 'a'에 대한 이해 수준

가. 양적 추론의 의미와 그 중요성

본 연구는 학생 자신의 지식과 경험으로부터 일정한 변화율을 포함하는 상황에 대한 표현과 해석에서 드러나는 일관된 사고패턴을 제시하고자 한다. 이에 본 연구는 Thompson과 Thompson (1992)이 제안한 '양(quantity)'의 의미를 따른다. Thompson과 Thompson(1992)은 '양'을 대상과 그 대상을 적절한 단위로 수치화하는 모든 인지적 과정으로 정의한다. 따라서 양을 구성하는 사람에 따라 동일한 대상에 대해 서로 다른 양을 구성할 수 있다.

양적 추론(quantitative reasoning)은 양과 그들 사이의 관계를 구성하는 것과 관련된 추론으로, 대수와 함수의 학습에서 그 중요성이 강조되어 왔다. 전형옥 등(2009)은 산술을 양적으로 학습하는 것이 산술을 넘어서 대수적 추론의 발달에 긍정적인 도움이 될 수 있다는 '초기 대수'의 관점을 지지하며, 초등학교 6학년 학생을 대상으로 문장제의 해결에서 드러나는 학생들의 양적 추론의 특성을 분석하였다. 그 결과 문제 해결에서 양들 사이의 관계를 파악하는 활동의 중요성을 확인하였고, 양적 추론을 포함한 해결법이 산술적 추론과 대수적 추론의 간극을 줄일 수 있다고 제안하였다. Lobato, Hohensee, Rhodehamel, Diamond(2012)는 이차함수의 핵심 아이디어로 두 변량 사이의 비율에 대한 비율의 일정함을 제안하며, 이차함수 개념을 발달시키는 과정에서 필수적으로 구성해야 하는 양과 양들 사이의 관계를 제시하였다.

이에 본 연구는 학생들의 양적 추론에 대한 기존의 연구들을 토대로 하여 일차함수의 학습에서 학생들이 구성하는 양들 사이의 관계에 주목하고자 한다.

나. 일차함수와 양적 추론

일차함수는 두 양 사이의 비례 관계에 대한 표현이다(정은실, 2003). Thompson과 Thompson (1992)은 두 양 사이의 비와 비율 역시 마음속에 일어나는 과정에 기초하여 구분할 것을 제안하였다. 비(ratio)는 두 양을 곱셈적(multiplicatively)

으로 비교한 결과이고, 비율(rate)은 반영적 추상화를 통해 이끌어낸 일정한 비를 뜻한다. 이에 본 연구는 학생들이 양들 사이의 비례 관계를 표현하고 해석하는 모든 행위에 주목하고, 이를 Thompson과 Thompson(1992)이 제안한 비와 비율에 근거하여 분석하고자 한다.

다. 일정한 속력을 포함하는 상황에서 드러나는 비와 비율의 수준과 그 특징

Thompson과 Thompson(1992)은 비와 비율의 수준을 비(ratio), 내면화된 비(internalized ratio), 내재화된 비(interiorized ratio), 비율(rate)로 나누었다. 그들은 연속적인 두 변량 사이의 일정한 비율 개념에 대한 예로 속력(speed) 개념을 제안하면서, 5, 6, 7학년 학생을 대상으로 교수실험을 실시하였다. 그 결과 등속도 상황에서 두 변량인 시간과 거리를 조정하여 그들 사이의 불변의 관계인 속력을 구성하는 행위로부터 추론되는 비와 비율의 수준을 구체적으로 제시하였다.

시간과 거리 사이의 관계를 1수준(비 수준)의 이미지로 추론하는 학생의 특징을 살펴보면, 그들이 구성하는 양은 거리이며, 거리의 값은 이산적으로 변화한다. 2수준(내면화된 비 수준)의 이미지를 갖는 학생들이 구성하는 양은 시간과 거리이며, 그들에게 거리는 이산적으로 변화하고, 변하는 거리의 값에 따라 시간의 변화를 구성할 수 있다. 이들 역시 1수준의 학생과 마찬가지로 시간보다 거리의 변화를 좀 더 분명하게 인식하지만, 1수준과의 가장 큰 차이점은 시간을 하나의 양으로 구성할 수 있다는 것이다. 3수준(내재화된 비 수준)의 이미지로 추론하는 학생의 특징은 시간과 거리의 변화를 함께 머릿속에 그릴 수 있다. 시간과 거리 사이의 관계를 곱셈적으로 비교하여 두 양 사이의 비의 불변성을 인식할 수 있다. 그러나 그들에게 불변성이란, 두 양의 변화를 그들이 인식한 시간과 거리의 양만큼 누적시켜 생각하는 것을 의미하며, 시간과 누적된 시간 사이의 비 또는 거리와 누적된 거리 사이의 비를 고려한 흔적은 찾을 수 없다. 4수준(비율 수준)인 학생의 특징은 3수준과 같이 시간과 거리의 변화를 함께 상상하며, 나아가 거리와 누적된 거리 사이의 비와 시간과 누적된 시간 사이의 비의 일정함과 시간과 거리 사이의 비의 불변성을 인지한다. 또한 시간과 거리 사이의 비인 속력을 하나의 양으로 다룰 수 있다.

이와 같이 Thompson과 Thompson(1992)은 일정한 속력을 포함하는 상황에서 학생들이 구성하는 시간과 거리의 변화, 그들 사이의 관계에 따라 추론의 수준을 나누고 그 특징을 제시하였다. 그러나 각 수준별 상황에 대한 식 표현과 해석이 어떠한지, 그들 간의 차이에 대한 정보를 제공한 것은 아니다. 이에 본 연구에서는 학생 A와 학생 B가 일정한 속력을 포함하는 상황을 이해하고, 시간과 위치 사이의 관계를 식 '$y=ax+b$'로 표현하고 해석하는 행위에 주목하여, 그들이 구성하는 양들 사이의 관계를 Thompson과 Thompson(1992)이 제시한 수준에 비추어 상세히 기술하고자 한다. 또한 학생간의 시간과 이동 거리 사이의 비인 'a'에 대한 인식의 차이도 살펴본다.

III. 연구 방법

1. 연구 방법 개관

본 연구는 함수적 상황을 식 '$y=ax+b$'로 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 중학생간의 'a'에 대한 인식의 차이와 그 원인을 제시하고자 한다. 이를 위해 중학교 1학년 학생 4명을 대상으로 실시한 교수실험(Steffe & Thompson, 2000)

에서 수집된 자료를 분석하였다. 교수실험법의 목적은 실제 교수·학습 상황에서 학생들의 학습 과정과 수학적 사고를 직접 경험하고 연구하기 위한 것이다. 교수실험에서 교사는 학생들의 수학적 사고에 대한 잠정적 가설을 세우고, 그들의 사고 수준에 기초하여 교사의 의도가 반영된 과제와 활동을 지속적으로 제시해나가며 학생들의 추론 과정에 대한 가설을 수정 및 검증하였다(Hackenberg, 2009).

2. 자료 수집 및 분석 방법

본 연구를 위한 수업 자료는 일차함수를 학습한 경험이 없는 중학교 1학년 학생 네 명을 대상으로 약 3개월(2016.5.~2016.7.)에 걸쳐 실시한 교수실험에서 수집된 것이다. 수업은 사전검사를 실시한 직후 학생 A와 학생 B, 학생 C와 학생 D 2개 조로 나누어 진행되었다. 이후 2주 동안 학생들의 사고 수준과 발달을 분석한 뒤, 학생의 수준에 맞춰 조를 재편성하였고, 약 5차시 정도의 수업을 더 실시하였다.

모든 수업에서 참여 학생들의 수학적 활동 및 기록물의 생성 과정을 카메라 3대와 녹음기 1대로 촬영하였다. 카메라 2대는 각 학생들의 기록 행위를, 카메라 1대는 학생의 표정, 행동, 교사와의 상호작용, 학생간의 상호작용 등 전체 수업의 장면을 담았다. 녹음기 1대는 학생의 언어적 표현, 교사와 학생의 대화, 학생간의 대화를 녹음하였다.[2] 이는 수업에서 관찰되는 학생의 모든 행위에 주목하고 행위로부터 드러나는 사고 과정을 분석하기 위함이었다. 또한 학생들이 수업에서 작성한 활동지, 연구자가 작성한 노트, 다음 차시의 수업 과제를 구성하기 위한 연구자간의 회의 자료도 수집되어 분석에 활용하였다.

본 연구는 학생들의 일차함수 식에 대한 이해와 학생간의 차이점을 살펴보기 위하여 수업에서 수집된 자료와 비디오 파일을 반복적으로 보면서, 학생 행위에 대한 기록을 지속적으로 만들어나갔다. 이러한 기록은 학생의 일관된 사고패턴, 변화, 제한점을 설명할 수 있는 행위의 유사성을 찾는데 활용되었다(Hackenberg, 2009).

3. 연구 참여자와 과제 소개

본 연구에 참여한 학생들은 함수를 학습한 경험이 전혀 없는 학생들로, 그들은 사전검사에서 자동차의 움직인 시간과 거리의 값이 제시될 때 시간의 변화에 따른 이동 거리를 그래프로 표현하기 위해 이산적인 방법으로 몇 개의 값을 찾고, 값들을 좌표평면 상의 점으로 나타낸 후, 점들을 선으로 연결하였다. 교사는 학생들이 나타낸 점들을 이은 선의 의미를 확인하고자, 수업에서 (학생 A와 학생 B의 경우 1차시부터 3차시 수업에서, 학생 C와 학생 D의 경우 1차시부터 5차시 수업에서) 이산적인 상황, 연속적인 상황, 비연속적인 상황을 그래프로 나타내는 과제들을 학생들에게 제시하였다. 그 결과, 학생 A와 학생 C는 상황을 그래프로 적절하게 표현하였지만, 학생 B와 학생 D는 그래프 표현과 해석에 어려움을 겪었다. 이에 교사는 모든 순간의 움직임을 시각적으로 확인하는 동시에 움직임에서 불변인 관계를 자연스럽게 찾을 수 있는 상황을 학생들에게 제시하고자 [과제1]과 [과제2]를 구성하였다. 이후 교사는 두 변량 사이의 관계에 대한 학생들의 이해를 더 확인하고자 변량들 사이의 비의 일정함이 언어, 식 '$y=at+b$'([과제3], [과제4]), 그래프로 표현될 때, 이를 상황에 적절하게 해석하는 과제를 학생들에게 제시하였다.

2) 카메라를 통해 오디오 정보도 녹음이 되지만, 분석 과정에서의 명확한 오디오 정보의 중요성을 감안하여 별도의 녹음기를 사용하여 수집하였다.

<표 III-1> 분석에 활용된 수업과 과제 분석

수업차시(일자)	과제번호[3]	과제에 제시된 상황
4차시(2016.6.11.)	[과제1] (12번)	두 변량 사이의 관계를 포함하는 상황을 표, 식($y=ax$), (직선 모양의) 그래프로 나타내기
5차시(2016.6.14.)	[과제2] (13번)	두 변량 사이의 관계를 포함하는 상황을 표, 식($y=ax+b$), (직선 모양의) 그래프로 나타내기
7차시(2016.6.21.)	[과제3] (15번)	두 변량 사이의 관계식($y=at$)을 해석하기
7차시(2016.6.21.) - 학생 A의 해결	[과제4] (15번 추가문제)	두 변량 사이의 관계식($y=at+b$)을 해석하기
8차시(2016.6.22.) - 학생 B의 해결		

수집된 자료를 분석하는 과정에서 학생 A와 (본 연구의 연구대상이 아닌) 학생 C는 일차함수의 상황을 식 '$y=ax+b$'로 표현하고 식을 상황에 적절하게 해석하는 반면, 학생 B와 (본 연구의 연구대상이 아닌) 학생 D는 식의 표현과 해석에 어려움을 겪고 있다는 점이 드러났다. 구체적으로, 일정한 속력을 포함하는 상황을 식으로 표현하는 [과제1]과 [과제2]에서 네 학생 모두 동일한 식 '$y=ax$'로 표현하였지만, 그 과정에서 드러나는 학생들의 양적 추론의 수준이 서로 달랐으며, 그들의 차이에 따라 일차함수의 식을 상황에 적절하게 해석하는 [과제3]과 [과제4]의 해결의 차이를 보였다. 이에 본 연구에서는 학생들이 상황을 일차함수의 식으로 표현하고 해석하는 과제(<표 III-1> 참고)의 해결에 주목하였다. 네 학생의 문제 해결과정 모두 흥미롭지만, 본 연구는 학생간의 수준 차이와 그 원인이 더 분명하게 드러난 학생 A와 학생 B의 해결과정을 분석 및 제시한다.

학생 A와 학생 B는 초등학교에서 비와 비율, 속력 개념을 학습한 학생들로, 사전검사에서 공변하는 두 변량의 값을 찾는 과제에서 변량의 변화를 함께 상상하며 답하는 모습을 보였고, 시간과 거리의 값이 주어질 때 두 속력을 비교하는 과제를 해결하기 위해 곱셈 연산을 사용하여 시간과 거리의 비인 속력을 구하였다. 이에 두 학생의 수준은 Thompson과 Thompson(1992)이 제시한 3수준 또는 그보다 더 높은 수준인 것으로 판단되어, 일정한 속력을 포함하는 상황에서 구성하는 양들 사이의 관계에 대한 그들의 이해는 3수준인 내재화된 비와 4수준인 비율 수준에 근거하여 분석한다.

IV. 연구 결과

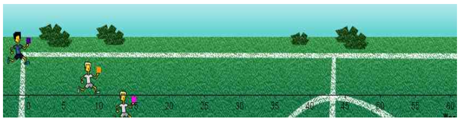
일차함수의 식을 표현하고 해석하는 과제를 분석한 결과, 학생들이 해결한 과제 순서에 따라 일차함수 식에 대한 학생간의 이해의 차이점을 확인하였다. 이에 본 연구는 수업이 진행된 순서에 맞춰 학생들의 문제 해결과정을 살펴본다.

1. 식 '$y=ax$'와 '$y=ax+b$'를 표현하는 과정에서 드러나는 'a'에 대한 학생 A와 학생 B의 서로 다른 의미

3) 본 연구에서는 과제 번호 12번, 13번, 15번, 15번 추가문제를 각각 [과제1], [과제2], [과제3], [과제4]로 기술하겠다.

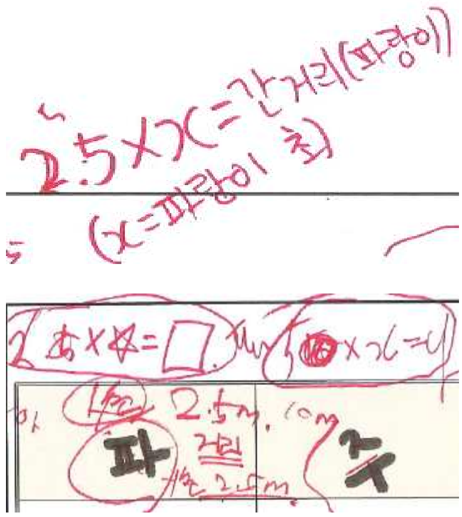
아래의 [과제1]과 [과제2]에서 학생들은 심칼 프로그램[4]을 활용하여 일정한 속력으로 달리는 캐릭터의 움직임을 다양한 방식(표, 그래프, 식 등)으로 표현해야 한다(<표 IV-1> 참고). 교사[5]는 학생들이 심칼 프로그램을 조작하면서 연속적으로 변화하는 시간에 따른 캐릭터의 움직임을 경험하고, 움직임에서 변화하는 양들 사이의 관계를 찾고 다양한 방식으로 표현하기를 기대하였다.

<표 IV-1> 학생들에게 제시된 [과제1]과 [과제2]

[과제1] 다음의 상황을 다양하게 표현하시오. 
[과제2] 다음의 상황을 다양하게 표현하시오. 

위 [과제1]에 제시된 두 캐릭터는 출발하는 위치가 동일하고 출발 후 속력이 각각 일정하지만, 시간에 따른 이동 거리의 비율, 즉 속력이 서로 다르다. 학생들은 두 캐릭터 가운데 속력이 상대적으로 빠른 캐릭터를 주황([과제1]에서 아래), 주황보다 느린 캐릭터를 파랑([과제1]에서 위)이라 불렀다. [과제2]에 주어진 캐릭터들은 속력이 일정하면서 서로 같지만 출발하는 위치가 서로 다르다. 학생들은 세 캐릭터의 출발하는 위치에 따라, 즉 0초일 때 위치 15m인 캐릭터를 분홍([과제2]에서 맨 아래), 10m를 주황([과제2]에서 중간), 0m를 파랑([과제2]에서 맨 위)이라 불렀다(<표 IV-1> 참고).

[과제1]에서 두 학생 모두 캐릭터의 시간과 위치의 변화에 주목하였고, 이를 [그림 IV-1]과 같이 일차함수의 식으로 표현하였다. 그러나 [과제2]에서 학생 A는 세 캐릭터의 시간과 위치 사이의 불변인 관계를 찾고 식으로 적절하게 나타내었지만, 학생 B는 시간과 위치 사이의 관계를 식 '$y=ax+b$'로 표현하는데 어려움을 겪었다. 이에 본 절에서는 학생 A와 학생 B가 [과제1]과 [과제2]에서 양들 사이의 관계를 식 '$y=ax$'와 '$y=ax+b$'로 표현하는 과정을 살펴보고, 학생 간의 차이점을 Thompson과 Thompson(1992)이 제시한 수준에 비추어 보다 상세히 분석 및 제시한다.



[그림 IV-1] [과제1]에서 파랑과 주황의 시간-거리 사이의 관계에 대한 학생 A(위), 학생 B(아래)의 식 표현

가. 상황을 식 '$y=ax$'로 표현하는 과정에서 드러나는 'a'에 대한 의미

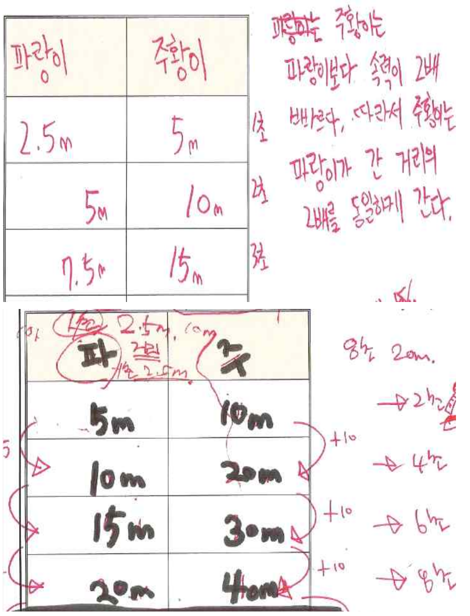
---

4) 심칼 프로그램(SimCalc MathWorld)은 시간의 변화에 따른 위치의 변화를 역동적으로 보여주는 수학 교육용 프로그램이다.

5) 본 논문의 제1저자가 교수실험을 진행하고 '교사' 역할을 수행하였다.

먼저, [과제1]에 제시된 두 캐릭터인 주황과 파랑은 같은 위치에서 출발하고, 주황은 1초에 5 m, 파랑은 1초에 2.5m씩 일정한 빠르기로 움직인다.

[과제1]의 상황에서 학생 A와 학생 B가 처음에 주목한 양은 서로 다르다. 학생 A는 두 캐릭터의 속력 사이의 관계이고, 학생 B는 시간이 일정하게 더해질 때 그에 대응하는 위치를 구하였다. 이는 학생 A와 학생 B가 심칼 프로그램의 화면에 있는 두 캐릭터의 시간의 값을 변화시키며, 시간과 이동 거리 사이의 관계를 표([그림 IV-2] 참고)로 나타내는 과정에서 살펴볼 수 있다.



[그림 IV-2] [과제1]에서 파랑과 주황의 시간-거리 사이의 관계에 대해 학생 A(위), 학생 B(아래)가 나타낸 표

학생 A는 [그림 IV-2](위)와 같이 표 오른쪽에 ‘주황이는 파랑이보다 속력이 2배 빠르다. 따라서 주황이는 파랑이가 간 거리의 2배를 동일하게 간다’를 적었다. 교사가 학생 A에게 부가적인 설명을 요구하자, 학생 A는 주황의 속력이 파랑의 속력보다 더 빠르며, 그 이유에 대해 같은 시간에 주황이 움직인 거리가 파랑의 거리보다 2배 더 많기 때문이라고 설명하였다. 학생 A는 동일한 시간에 두 캐릭터의 이동 거리를 비교하여 속력 사이의 관계를 찾은 것으로 보인다. 반면, 학생 B는 파(파랑)와 주(주황)를 나란히 쓴 후 그 아래에 각각 5m, 10m, 15m,...와 10m, 20m, 30m, ...를 적고, 파랑의 거리 5m와 10m, 주황의 거리 10m와 20m 사이를 각각 화살표로 연결하여 그 옆에 ‘5’와 ‘+10’을 적었다. 교사가 학생 B에게 ‘5’와 ‘+10’의 의미를 묻자, 학생 B는 2초씩 더해질 때마다 파랑은 5씩, 주황은 10씩 더해지는 것을 나타낸 것이라고 답하였다. 학생 B는 주황 2초에 10m, 파랑 2초에 5m와 같은 규칙을 찾은 후, 2초부터 시작하여 2초씩 더해질 때마다 그에 대응하는 위치를 구한 것으로, 즉 2초부터 시작하여 2초씩 더해지는 시간에 대응하는 위치를 표([그림 IV-2](아래) 참고)로 나타낸 것이다.

이에 교사는 학생 A와 학생 B에게 주황과 파랑의 22.5m에서 27.5m 움직일 때 걸린 시간을 구할 것을 요구하였다. 이는 학생 A가 구성하고 있는 시간의 변화를 확인하기 위함이었고, 학생 B의 경우 그가 언급한 ‘2초부터 2초씩 더해질 때마다 위치의 변화’에 처음부터 누적된 변화가 아닌 임의의 시각에서 1초 더해질 때 그에 대응하는 위치의 변화의 의미도 포함되어 있는지 알아보기 위함이었다. 아래의 <발췌문 1>은 교사와 학생들이 나눈 대화 내용의 일부이다.

<발췌문 1> : [과제1]에서 학생 A와 학생 B가 구성한 양들 사이의 관계

학생A: 다 구했는데요, 주황이는 1초 걸렸고 파랑이는 2초 걸렸어요.

교사: 파랑은 어떻게 했어?

학생A: 파랑이는 근데 정확히 모르겠어가지고

그러니까 여기서 이렇게 하면 값이 어디 있는지 제대로 모르겠어서 왜 2초라고 했냐면 속도가 2배 차이나니까. 걸린 시간은 얘(주황)가 더 빠르잖아요. 얘(주황)가 1초였으면 얘(파랑)는 2초가 되는 거예요. (중략) 속도가 더 빠르니까 같은 거리에 속도가 더 빠르면은 걸린 시간이 더 짧게 나오잖아요. 곱하기 2하면.

(중략)

교사: 학생 B는?

학생B: 안 정확해요. 27.5와 22.5 사이잖아요. 27.5일 때 27.5m일 때 초가 좀 이상하게 돼요.

<발췌문 1>과 같이, 22.5m부터 27.5m 움직일 때 소요된 시간을 구하기 위해 학생 B는 27.5m일 때 시간을 찾으려고 시도하였지만, 그 값을 찾는데 어려움을 겪었다. 반면, 학생 A는 1초가 소요된다고 말하며, 주황의 소요된 시간뿐 아니라 파랑의 것도 쉽게 찾는 모습을 보였다. 그는 심칼 프로그램에서 파랑의 위치를 정확하게 읽을 수 없다고 말하였지만, 주황과 파랑의 속력 사이의 관계로부터 동일한 거리를 움직일 때 소요된 시간 사이의 일정한 관계를 찾고, 이를 활용하여 주황이 1초가 소요되면 파랑은 주황의 시간에 2를 곱한 값인 2초가 소요되어야 한다고 답하였다. 이에 교사는 수업중 학생 A가 임의의 시각에서 위치를 상상할 수 있는지 확인할 수 있는 과제가 필요하다고 판단하였고, 학생 A에게 7.2초일 때의 위치, 12.7초일 때의 위치를 구할 것을 요구하였다. 다음 <발췌문 2>는 교사의 문제 제시에 대한 학생 A의 반응이다.

<발췌문 2> : [과제1]에서 학생 A의 식 표현과 해석

학생A: 속력이 일정하니까 1초에 2.5m, 1초에 5m잖아요. 아무거나 넣으려면은 x로 해서 x는 파랑이 초니까 1초에 2.5m갔으니까 10을 넣으면은 25m를 간다. (중략) 주황이의 경우는 [파랑의 식 '$2.5 \times x =$간거리'에서 2.5를 가리키며] 여기를 5로 대체하면 돼요. 1초에 5m를 갔으니까 속력이 5m/s.

(중략)

교사: 2.5(m)와 7.5m 움직일 때 소요된 시간은 어떻게 될까?

학생A: 1초요. (중략) 그러니까 이거 2.5m와 7.5m 사이가 5m를 간 거잖아요. 5x가 간 거리가 되니까, 거리가 5가 나왔으니까 등식 하면 5 나누기 1[6]하면 1이 돼서 1이다. (중략) 얘는 속력이 같으니까 2.5에서 출발해서 7.5까지 갔다고 해도 같잖아요. 속력이 같으니까.

<발췌문 2>와 같이, 교사가 학생 A에게 임의의 시각에서의 위치를 구하는 과제를 제시하였을 때, 학생 A는 7.2초와 12.7초와 같은 시각을 '아무거나 넣으려면'이라고 표현하며 어떤 시각에 대응하는 파랑의 이동 거리를 식 '$2.5 \times x =$간거리(x는 파랑이 초)'로 나타내었다. 구체적으로, 학생 A는 파랑과 주황의 속력이 일정하기 때문에 파랑의 시간인 x에 대응하는 이동 거리를 구하려면 x(초)와 2.5(m/s)를 곱하면 되고, 주황의 경우 x(초)와 5(m/s)를 곱하면 된다고 설명하였다. 즉, 학생 A는 7.2초와 12.7초와 같은 특정한 시간에 대응하는 이동 거리뿐 아니라 임의의 시각에 대응하는 이동 거리를 그 시각과 속력의 곱으로 표현한 것이다. 여기서 주목해야 할 점은 학생 A가 '거·속·시' 공식이 아닌 두 변량 사이의 관계로부터 식을 유도하였다는 것이다. 이는 교사가 학생 A에게 (그가 이전에 해결한 과제(<발췌문 1> 참고)와 유사한) 2.5m에서 7.5m 움직일 때 소요된 시간을 구할

6) 학생 A의 생각을 식으로 표현하면 '$5x=5$'이다. 학생 A가 x의 값으로 1을 구한 것으로 보아, 그가 언급한 "5 나누기 1"은 '5 나누기 5'를 의미하는 것으로 보인다.

것을 요구하였을 때, 그의 설명에서 추론할 수 있다. 첫째, 학생 A는 속력이 같기 때문에 '2.5m에서 출발해서 7.5m까지 갈 때'와 '0m에서 출발해서 5m까지 갈 때'의 시간이 동일하게 소요된다고 설명하였다. 학생 A가 언급한 '속력이 같다'는 것은 '2.5m에서 7.5m까지'와 '0m에서 5m까지' 갈 때의 속력의 값이 동일하게 유지됨을 의미하는 것으로, 그는 임의의 시간 변화량과 이동 거리의 변화량 사이의 불변인 관계를 인지하고 있는 것으로 보인다. 둘째, 학생 A는 주황이 '0m에서 출발해서 5m까지 갈 때'의 소요된 시간을 구하기 위해 식 '$5 \times x =$ 간거리'에서 '간거리' 대신에 '5'를 대입하였다. 이로부터 그는 '$5 \times x =$ 간거리'에서 '5'를 1) 임의의 시간 변화량과 이동 거리의 변화량 사이의 일정한 비, 2) 임의의 시각에 대응하는 이동 거리를 구할 수 있는, 즉 시간과 거리 사이의 일정한 관계를 나타내는 수치로 인지하고 있는 것으로 보인다.

이후 교사는 학생 B에게 상황을 식으로 표현할 것을 요구하였고, 학생 B 역시 시간과 이동 거리 사이의 관계를 식으로 나타내려고 시도하였다. 그는 [과제1]에 제시된 파랑의 시간과 이동 거리 사이의 관계를 식 '2.5×☆=□', 주황을 식 '$5 \times x = y$'로 표현하였다. 교사가 학생 B에게 식에 적은 '2.5'와 '5'에 대한 설명을 요구하자, 학생 B는 아래의 <발췌문 3>과 같이 대답하였다.

<발췌문 3> : [과제1]에서 학생 B의 식 표현과 해석

학생B: 2.5는 파랑색이 1초에 가는 거리.
교사: 그 때 1초라고 하는 게 뭐야? 1초는 어떤 1초지?
학생B: 1초 간격으로.
교사: 어떤 간격이지? 시간으로 얘기해볼래?
학생B: 이렇게 있으면, 1초 2초 3초 가고.
교사: 2.5초와 3.5초는 어때? 사이에도 2.5m 간다고 말할 수 있나?
학생B: 아니요.

<발췌문 3>에서와 같이, 학생 B는 자신이 쓴 식 '2.5×☆=□'에서 '2.5'는 파랑이 1초에 간 거리, 즉 1초, 2초, 3초,...와 같이 1초씩 늘어날 때마다 2.5씩 이동함을 의미하며, 2.5초와 3.5초 사이에 2.5를 가는 것은 아니라고 말하였다. [과제1]의 상황에서 학생 B가 구성한 시간의 변화는 1초부터 1초씩 늘어나며, 그 시간에 대응하는 이동 거리만을 분명하게 인지하고 있는 것으로 보인다. 또한 그가 세운 식 '2.5×☆=□'에는 '파랑이 2.5초와 3.5초 사이에 2.5m를 움직인다'와 같은 임의의 시간 변화량에 대한 거리의 변화량 사이의 비의 일정함에 대한 의미가 포함되어 있지 않은 것으로 추정된다.

나. 상황을 식 '$y = ax + b$'로 표현하는 과정에서 드러나는 'a'에 대한 의미

[과제2]에 제시된 세 캐릭터인 분홍, 주황, 파랑 모두 1초에 5m씩 움직이고, 0초일 때의 위치는 각각 15m, 10m, 0m이다. 교사는 학생들에게 상황을 표, 식, 그래프 등 다양한 방식으로 표현할 것을 요구하였다.

학생 A와 학생 B는 [과제2]에 제시된 세 캐릭터의 움직임에 대해 1초부터 1초씩 더해질 때마다 그에 대응하는 위치를 표로 나타내려고 시도하였다. 그러나 학생들이 주어진 상황에서 구성한 양들의 변화는 서로 다른 것으로 드러났는데, 이는 교사가 학생 A와 학생 B에게 각 캐릭터의 0.25초의 위치를 구할 것을 요구하였을 때, 학생들의 반응(<발췌문 4> 참고)에서 나타났다.

<발췌문 4> : [과제2]에서 일정한 변화율에 대한 학생 A와 학생 B의 인식

학생A: 저는 계산으로 했는데요, 0.25초잖아요. 0초와 1초 갈 때 위치가 5니까 0.5의 위치를 구하려고 나누기 2하면 2.5가 되잖아요. 다시 나누기 2를 하면 1.25가 나와

요. 1.25가 나와서 여기서 1.25 더하면.
교사: 더해 왜 더해? 세 사람 똑같이 1.25를 더 하면 되는 이유는?
학생A: 그러니까. 얘네들은 출발하는 위치가 다른거지, 속력은 같잖아요.
교사: 여기서 속력은 뭐길래?
학생A: 0.25초에 간 거리
(중략)
학생B: 다른 방법으로.. 비례식 세워서. 얘는 파랑이는 2초에 10m를 가잖아요. 2초에 10 m는 0.25초에 xm를 가니까, 0.25 초초 해가지고 x하면 여기에. 얘(2와 x)의 곱이랑 얘(10과 0.25)의 곱이 같잖아요. 2.5니까 2.5 나누기 2를 하면 나올 것 같아서.
교사: 비례식을 쓸 수 있는 이유는?
학생B: 초랑 m랑 다 같으니까. 일단 얘네가 1초에 5m를 간 거는 정확하잖아요. 얘는 또 2초에 10m를 간거를 해보면은 (중략) 그러면 곱하기 0.25를 하면 곱하기 0.25를 하면 1.25가 나와요.

<발췌문 4>에서와 같이, 학생 A는 세 캐릭터의 출발하는 위치가 다르지만 속력이 같기 때문에 파랑의 0.25초의 위치로 1.25m를 구한 후, 주황과 분홍의 위치를 구하려면 각각 0초의 위치에 (파랑의 0.25초의 위치인) 1.25m를 더하면 된다고 설명하였다. 즉 주황의 0.25초의 위치로 11.25m, 분홍의 경우 16.25m를 구하였다. 학생 A는 [과제1]에서와 마찬가지로 주어진 상황에서 각 캐릭터의 속력에 주목하여, 속력이 서로 같음을 찾았다. 나아가 출발하는 위치가 다르더라도 속력이 같다면, 1초가 아닌 0.25초만큼 시간이 늘어날 때 그 시간 동안에 이동한 거리도 서로 같음을 인식하였다. 한편, 학생 B는 처음에 시간과 위치 사이의 관계를 나타낸 그래프에서 0.25초의 위치의 값을 읽으려고 시도하였지만, 교사가 또 다른 방법으로 구할 수 있는지 묻자 비례식을 세워서 해결하였다. 학생 B의 생각을 식으로 표현하면 "2(초):10(m)=0.25(초):□(m)"라 할 수 있는데, 교사가 학생 B에게 왜 그런 비례식을 쓸 수 있는지 물었을 때, 학생 B는 초랑 m랑 다 같기 때문이라고 답하였다. 이는 학생 B가 비례식을 사용한 이유를 찾기 위해 상황에 주어진 파랑의 움직임에서 2초와 0.25초 모두 시간의 단위인 '초'이고, 각각에 대응하는 위치인 10m와 구하고자 하는 값의 단위가 모두 거리의 단위인 'm'라는 사실에 주안점을 둔 것으로 보인다. 이는 결국 학생 A와 학생 B가 세 캐릭터의 0.25초일 때 위치를 구하기 위해 시간과 이동거리 사이의 비례 관계를 이용한 것으로, 풀이 방식만 보면 그들의 해결과정이 유사해 보이지만 그 의미하는 바는 서로 다르다고 할 수 있다.

이러한 학생간의 차이는 시간과 위치 사이의 관계를 식으로 표현하고 해석하는 과정에서 더 분명하게 확인할 수 있었다. 아래의 <발췌문 5>는 교사가 학생 A와 학생 B에게 시간과 위치 사이의 관계를 식으로 표현할 수 있는지, 즉 시간의 값에 따른 위치의 값을 알 수 있는 식을 써 볼 것을 요구한 뒤, 교사와 학생들 사이에 나눈 대화 내용의 일부이다.

<발췌문 5> : [과제2]에서 학생 A와 학생 B의 식 표현과 해석
학생B: 얘네 규칙을 보면 1초에 5m씩 간다고 했으니까 거리는 거리 나누기 5를 하면 초가 돼요. 10 나누기 5하면 2 시간을 알고 있으면 ['시간×5=거리'를 적음] (중략) 뭐지? 주황이는 이 식으로 안돼요.
학생A: 아. [아래의 [그림 IV-3]을 적음]
교사: 식으로 쓰고 공통점과 차이점도 생각해 보자.
학생B: 같은 수를 곱했잖아요. 같은 수를 곱하

7) 학생 B는 [과제2]에서 1초부터 1초씩 더해지는 시간의 변화에 대응하는 주황의 위치를 구하기 위해 시간과 (1초의 위치인) 15를 곱하면 된다고 생각한 것으로 보인다. 이로부터 1초일 때의 위치 15m를 찾았고, 이를 심칼 프로그램에서도 확인이 가능하므로 '여긴 돼요'라는 말을 한 것으로 추정된다.

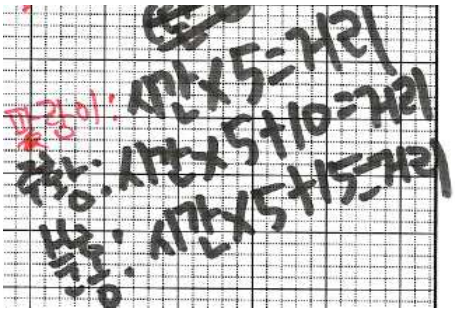
면 여기는 1초니까 여긴 돼요.[7] 15를 곱하면, 15를 곱하고 (2와 15의 곱인 '30'과 1초의 위치 '20' 사이의 차인) 10을 뺀 거고 15를 곱하고 (3과 15의 곱인 '45'와 1초의 위치 '25' 사이의 차인) 20을 뺀 거고 (중략) 그런 규칙이 있는데 식으로는 못해요. 따로따로 해야 되니까.

학생A: 공통점이 시간 곱하기 5. (중략) 속도가 $5m/s$이니까 시간 곱하기 5가 거리니까 속도 의미를 그대로 [자신의 식을 가리키며] 여기에 적은 것 같은데. (중략) 시작하는 위치가 10이라서. 그거는 원래 이 식('시간×5=거리)이면은 파랑이랑 같잖아요. 여기서 10으로 더 올라갔으니까. (중략) 근데 얘들은 시작하는 위치만 다르고 속력은 같아서 이 식([그림 IV-3] 참고)이 성립되는 것 같아요.

학생B: 음.. 맞는 것 같아요. 이 식 2초에 갖다 대서 해보면 다 성립해요. 다 맞아요. (중략) 공통점은 세 개다 $5m$씩 늘어나요. 1초씩 1초에 1초마다.

교사: 1.5초와 2.5초 사이는 어떨까? 모른다?

학생B: 네.



[그림 IV-3] [과제2]에서 파랑, 주황, 분홍의 시간-위치 사이의 관계에 대한 학생 A의 식 표현

<발췌문 5>에서와 같이, 학생 B는 이전과 마찬가지로 파랑의 움직임에 먼저 주목하였다. 그는 파랑의 경우 '1초에 $5m$'를 움직인다는 것을 찾았고, 이를 식 '시간×5=거리'로 표현한 후, 이와 같은 방식으로 주황의 식을 세우려고 시도하였다. 구체적으로, 주황의 경우 '1초일 때 $15m$'를 찾은 후 시간의 값에 (파랑의 식에서 '5'와 같은 역할을 하는) 15를 곱한다고 가정하였고, 즉 시간의 값에 15를 곱하면 1초의 위치인 15가 되고, 2초일 때 (2와 15를 곱하면) 30인데, 실제로 2초일 때의 위치는 20이기 때문에 시간과 위치 사이의 관계가 식으로 표현되지 않는다고 말하였다. 학생 B는 캐릭터의 시간과 이동 거리 사이의 비의 일정함을 고려하지 않은 채 '1초에 $5m$', '1초에 $15m$'와 같이 1초일 때의 위치를 찾고, (1초부터 1초씩 더해지는) 시간에 대응하는 위치를 구하기 위해 '시간'과 '1초일 때의 위치'를 곱하였다.

이와는 대조적으로, 학생 A는 교사의 발문 직후 "아"라고 말하며 학습지에 빠르게 '파랑이 시간×5=거리, 주황: 시간×5+10=거리, 분홍: 시간×5+15=거리'를 차례대로 나란히 적었다([그림 IV-3] 참고). 이러한 학생 A의 표정과 행위로부터 학생 A가 적은 주황과 분홍의 시간과 거리 사이의 관계식을 얻는 과정은 그에게 있어 답을 쉽게 얻을 수 있는 문제 상황이 아닌, 어느 정도의 (혹은 상당한) 인지적 노력을 수반하는 낯설고 새로운 과정이었음을 추정할 수 있다. <발췌문 5>와 같이, 교사는 학생 A에게 [과제2]에 제시된 세 캐릭터의 움직임에서 공통점과 차이점이 무엇인지 질문하였고, 학생 A는 공통점으로 시간의 값에 5를 곱한다고 말하였다. 또한 세 캐릭터의 움직임에서 빠르기는 $5m/s$로 같으며 이를 자신의 식에 적혀있는 '5'와 연결시켜 말하였고, 주황의 식을 가리키며 시작한 위치가 10이라서 10을 빼면 파랑의 식과 동일한데 그 이유는 세 캐릭터의 시작하는 위치만 다르고 속력이 같기 때문이라고 설명하였다. 학생 B는 학생 A가 나타낸 관계식([그림 IV-3] 참고) 각각에 시간 대신에 2를 대입하였고, 이를 자신의 표에 적힌 2

초일 때의 위치의 값과 같음을 확인한 후 학생 A의 생각에 동의하였다. 그러나 교사가 학생 B에게 1.5초와 2.5초 사이에 이동한 거리를 구할 것을 요구하였을 때, 학생 B는 여전히 알 수 없다고 답하였다. 학생 B는 주어진 상황에서 '1초와 2초 사이의 이동 거리 5m'를 찾을 수 있지만, 이와 동일한 수준으로 '1.5초와 2.5초 사이의 이동 거리 5m'를 구성하지 못한 것으로 보인다.

다. 정리

학생들이 일정한 속력을 포함하는 상황을 식으로 표현하는 과정에서 드러나는 학생간의 차이점을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 주어진 문제 상황에서 학생들이 구성한 '양'이 서로 달랐다. 학생 A는 시간과 이동 거리 사이의 일정한 비인 속력을 찾았고, 이를 활용하여 임의의 시각에서의 위치, 임의의 시간 변화량에 대한 이동 거리의 변화량을 구하였고, 나아가 캐릭터들 사이의 속력을 비교하여 상황에 적절한 식 '시간×5=거리'(파랑), '시간×5+10=거리'(주황), '시간×5+15=거리'(분홍)를 표현하였다. 반면, 학생 B는 시간이 1초부터 1초씩 더해질 때마다 일정하게 더해지는 이동 거리에만 주목하였다.

둘째, 주어진 문제 상황에서 학생들이 구성한 '시간의 변화'가 서로 달랐다. 학생 A는 1초를 더 세분하여 0.25초와 같은 시간에 대응하는 이동 거리를 구할 수 있었지만, 학생 B는 학생 A와 달리 1초가 아닌 0.25초와 같은 임의의 시각에 대응하는 위치를 찾거나 1.5초와 2.5초 사이와 같은 임의의 시간 변화량에 대응하는 이동 거리의 변화량을 찾는데 어려움을 겪었다.

이와 같이 일정한 속력을 포함하는 상황에서 구성한 양들 사이의 관계로부터 학생 A는 Thompson과 Thompson(1992)이 제안한 4수준인 비율 수준이며, 학생 B는 3수준인 내재화된 비수준에 해당되는 것으로 판단된다.

셋째, 학생 A와 학생 B가 표현한 '$y=ax$' 형태의 식에서 x의 계수인 'a'에 대한 의미가 서로 달랐다. 학생 A의 입장에서는 임의의 시각에서의 위치 또는 시간 변화량과 거리 변화량 사이의 일정한 비이지만, 학생 B에게는 시간의 값을 곱하여 그 시간에 거리의 값을 찾을 수 있는 수치로 판단되었다.

2. 식 '$y=at$'와 '$y=at+b$'를 해석하는 과정에서 드러나는 'a'에 대한 학생 A와 학생 B의 서로 다른 의미

학생 A와 학생 B는 [과제1], [과제2]에서 두 양 사이의 관계를 식 '$y=ax$'의 형태로 표현하였지만, 식에 쓴 'a'의 의미는 서로 달랐다. 또한 학생 A만이 상황을 식 '$y=ax+b$'의 형태로 적절하게 나타내었다. 이번에는 역으로 양들 사이의 관계가 식으로 제시된 새로운 과제에서 학생들의 식에 대한 해석과 학생간의 차이점을 살펴보도록 할 것이다.

아래의 [과제3]과 [과제4]는 성인용과 유아용 수영장에 물을 채우는 시간 't'와 채워지는 물의 높이 'y' 사이의 관계가 각각 식 '$y=at$'와 '$y=at+b$'로 주어질 때, 시간이 지남에 따라 물의 높이의 변화를 비교하는 문제이다(<표 IV-2> 참고).

<표 IV-2> 학생들에게 제시된 [과제3]과 [과제4]

[과제3] 오늘은 민준이가 수영장 바닥을 청소하는 날이다. 바닥 청소가 끝난 뒤 물을 채워야 한다. t는 시간, y는 t시간에 채워지는 물의 높이라고 하자. 성인용에는 $y=5t$, 유아용에는 $y=3t$로 물이 채워진다고 할 때, 시간이 지남에 따라 물의 높이의 변화를 비교하여 설명하시오.

[과제4] 오늘은 진수가 수영장에 물을 채워야 한다. t는 시간, y는 t시간에 채워지는 물의 높이라고 하자. 성인용에는 $y=3t$, 유아용에는 $y=5t+10$으로 물이 채워진다고 할 때, 시간이 지남에 따라 물의 높이의 변화를 비교하여 설명하시오.

가. 식 '$y=at$'에서 'a'를 서로 다른 양(시간 또는 비율)으로 해석

학생 A는 [과제3]에 제시된 식 '$y=5t$'와 '$y=3t$'를 보고 t와 y 사이의 관계를 표로 나타낸 후, '성인용: $5/h$, 유아용 $3/h$'를 적었다. 그는 자신의 표를 가리키며 "성인용이 더 빠르게 채워지는데, 그니까 시간이 5로 채워지니까 그런데 얘는 같은 시간에 3 채워지니까"라고 말하였다. 이로부터 학생 A가 처음에 주목한 양은 시간, 높이, 빠르기이며, 성인용 '$y=5t$'와 유아용 '$y=3t$'를 1시간에 5, 1시간에 3씩 물이 높아지는 것으로 해석한 듯하다. 교사는 학생 A와 그의 짝인 학생 B의 생각을 더 자세히 알아보기 위하여, 성인용과 유아용 가운데 물이 더 빠르게 높아지는 것을 찾도록 하였다. 학생 A와 학생 B의 반응은 아래의 <발췌문 6>과 같다.

<발췌문 6> : [과제3]의 빠르기 비교에서 드러나는 a의 의미

교사: 누가 더 빠를까?

학생B: 유아용 (중략) 성인용에는 $5t$. t는 시간이니까 다섯 시간 동안 물이 끝까지 채워지는 시간이 다섯 시간 이거(유아용)는 세 시간이라는 거고 시간이 더 적게 걸리니까 유아용이 더 빨리 채워진다.

교사: 학생 A는 어떻게 생각해?

학생A: 완전 반대인데, 저는 그러니까 시간에 따라 채워지는 물의 높이가 y인데 그러니까 시간이 같다고 하면 성인용에 물이 더 많이 차니까.

교사: 시간이 같다고 하면 성인용에 물이 더 많이 찬대. 어떻게 생각해?

학생B: 응? (중략) 무슨 시간이 같은 거?

학생A: t, 이거 두 식에서 t가 같은 값이라면 성인용이 더 많지? (중략) 저는 한 시간에 높이가 5씩 증가하니까 다섯 시간이면 5, 5, 25했고, 세 시간이니까 t에다가 3을 넣으면 3, 3, 9 해가지고...

<발췌문 6>에서와 같이, 학생 A와 학생 B는 '$y=5t$'와 '$y=3t$'에서 t 앞에 곱해진 '5'와 '3'을 서로 다르게 해석하였다. 학생 A는 '$y=5t$'에서 '5'를 시간과 물의 높이 사이의 관계를 나타내는 수치로 설명한 반면, 학생 B는 물을 가득 채울 때 소요된 시간으로 해석하였다. 또한 학생 A의 경우 시간의 변화를 더 구체화하여 한 시간 단위로 변화함에 따라 그 시간에 대응하는 물의 높이를 설명하였고, 학생 B가 구성한 양은 물이 끝까지 채워진다는 것과 그 때의 소요된 시간이었다. 이러한 이유로 학생 B는 학생 A가 두 식에서 시간의 값이 같다면 성인용의 물의 높이가 더 높다는 설명에서 '시간이 같다'는 의미를 해석하는데 어려움을 겪은 것으로 보인다. 학생 A와 학생 B가 [과제3]에 제시된 식으로부터 구성한 양들 사이의 관계는 교사가 학생 B에게 시간에 따라 채워지는 물의 높이의 변화율인 속도를 물었을 때 더 분명하게 드러났다(<발췌문 7> 참고).

<발췌문 7> : [과제3]의 식 '$y=at$'에서 y, t, a의 의미

교사: 학생 B 속도 알 수 있나? 유아용이 더 빠르다고 했으니까 속도 알 수 있나?

학생B: 속도? 음.. 속력 구하려면 시간 분의 거리잖아요. 이건 거리가 아니라 높이니까 거리 자리에 높이 넣어서 t분의 y가 되는데 얘는 다섯 시간이었으니까 5분의 y가 속도가 되고 여기는 3분의 y (중략) 애네 양이 만약에 같다면요, 애(유아용)가 더 빨리 채워진다는 거잖아요. 양이 같이 채

위지는데 얘는 다섯 시간 걸리는데 얘는 세 시간밖에 안 걸리는 거잖아요. 그럼 얘가 더 빠른 거죠. 근데 만약 얘가 더 높다면 비교를 해보면...
학생A: 근데 5랑 3이요 저는 이게 시간이 아니고 채워지는 높이라고 생각하는데요. (중략) 그러니까 y가 최종이고 5가 기준이 돼서 시간에 따라서 달라지는 거죠.
학생B: [작은 목소리로] 맞...네... y는 이거잖아요. y는 $5t$라고 그랬으니까 음~ 이 시간에 채워지는 물의 높이라는 거잖아요.

<발췌문 7>에서와 같이, 학생 B는 상황에 주어진 식으로부터 속력을 구하기 위해 1) 높이를 거리로 보고 '거・속・시' 공식을 적용하여 식 '$y=5t$'의 양변을 시간인 t로 나누었고, 2) t 대신에 (학생 B의 입장에서) 시간인 5를 대입하여, 5분의 y를 구하였다. 학생 B는 여전히 식 '$y=at$'에서 'a'를 소요된 시간으로 해석하였다. 이에 반해 학생 A에게 'a'는 시간이 아닌 시간이 지남에 따라서 물의 높이인 'y'를 구할 수 있는 기준이었다. 즉, 학생 A는 'a'를 물을 채우는 시간과 높이 사이의 일정한 변화율로서, 즉 시간과 그에 대응하는 물의 높이 사이의 관계를 대표하는 수치로 해석하고 있다고 할 수 있다. 반면 학생 B는 학생 A의 설명을 듣고 'y'를 t시간에 채워지는 물의 높이로 자신의 생각을 수정하였다. 수업 중 교사는 학생 B가 학생 A의 생각을 따라가고 있는 듯한 느낌을 받았다. 교사는 학생 B가 구성하고 있는 시간과 물의 높이의 변화를 확인하기 위해 학생들에게 물을 채우는 시간과 물의 높이 사이의 관계식 '$y=5t$'에서 1시간 30분일 때의 높이를 구할 것을 요구하였다. 두 학생 모두 7.5가 될 것이라고 하였고, 교사는 6이 될 수 없는지 그 이유에 대한 설명을 요구하였다. 학생들의 반응은 아래의 <발췌문 8>과 같다.

<발췌문 8> : [과제3]에 제시된 '$y=5t$'에서 시간과 물의 높이의 변화에 대한 인식의 차이
교사: 한 시간에 $5m$고 두 시간에는 $10m$인데 한 시간 삼십분에는 $6m$가 됐어. 가능하나?
학생A: 안될 것 같은데, 지금 시간이 일정하잖아요. (중략) 그러니까 변함이 없이 그대로 간다. [시간과 높이를 가리키며] 그 변한다는 게 아니라 속도가 차는 속도가 안 변한다구요.
교사: 차는 속도가 안 변한다에 대해서 어떻게 생각해?
학생B: 될 수도 있고 안 될 수도 있어요. 문제에 안나와있으니까 모르죠.
학생A: 그게 식에 나와 있으니까. 그러니까 유아용을 예로 들면 y=3t면 한 시간에 3t고 한 시간에 3가고 두 시간에 6가고 세 시간에 9가고 (중략)
학생B: 그러니까 이거에서 한 시간, 두 시간 세 시간 네 시간이면 3 가고 3가고 이게 일정하잖아요.

<발췌문 8>과 같이, 시간 t와 물의 높이 y 사이의 관계식 '$y=5t$'에서 1시간 30분일 때의 물이 높이가 6이 아닌 이유에 대해 학생 A는 물이 차는 속력이 변하지 않기 때문이며 이는 상황에 제시된 식에서 확인할 수 있다고 말하였다. 학생 A는 식 '$y=5t$'에 제시된 '5'를 시간과 물의 높이 사이의 비인 속력으로 분명하게 인식하고 있는 것으로 추정된다. 이에 반해 학생 B는 t의 계수인 '5'를 속력과 연결시켜 생각하지 못하였다. 그 이유는 학생 A의 말이 문제에 제시된 것은 아니므로 확실하게 알 수 없다고 말하였기 때문이다. 그러나 학생 B는 이전과 다른 변화된 모습을 보이기 시작하였다. 그는 식 '$y=3t$'에서 t의 계수인 '3'을 소요된 시간이 아닌, 1시간부터 1시간씩 더해질 때마다 일정하게 더해지는 값으로 설명하였다. 학생 B는 [과제3]에 제시된 식에서 시간의 변화량에 대한 일정하게 더해지

는 높이의 변화량을 찾은 것으로 보였다. 이에 교사는 학생들에게 아래의 [과제4]를 제시하여 학생들이 일차함수의 식을 해석하는 과정에서 구성하는 양들 사이의 관계에 대한 인식과 그 변화를 살펴보고자 하였다.

나. 식 '$y=at+b$'에서 빠르기를 비교하기 위해 'a'에 주목하는 학생 A와 'y'의 값에 주목하는 학생 B

교사는 학생 A와 학생 B에게 이전 과제에서 구성한 양들 사이의 관계를 새로운 과제에서 해석할 수 있는 기회를 제공하고자, 식 '$y=3t$'와 '$y=5t+10$'을 해석하는 [과제4]를 제시하였다. [과제4]에서 학생 B의 생각을 확인하기 위해 두 학생은 서로 다른 수업에서, 즉 학생 A는 7차시 수업에서, 학생 B는 8차시 수업에서 문제를 해결하였다. 그 이유는 대부분의 과제에서 학생 B가 학생 A의 생각을 들은 후 그대로 자신의 말로 표현하고 있다고 판단하였기 때문이다. 먼저, 학생 A의 식에 대한 해석을 살펴보면 아래의 <발췌문 9>와 같다.

<발췌문 9> : [과제4]에서 학생 A의 빠르기 비교

학생A: 성인용 식이 이건데. y가 채워진 물의 높이고 t가 시간이니까 한 시간에 얼마 채워지는지 알면 되는데 그 뜻이 속도 뜻이랑 같으니까 3이 속도라고 생각해요.
교사: 그 뜻이 속도와 같으니까?
학생A: 그니까 높이랑 시간이 있는데 한 시간에 얼마를 채우면 이 높이가 되는지 알아야지 y값을 구할 거 아니에요. 3이 필요한데 이게(3) 속도.
교사: 아 속도다?
학생A: 유아용은 다른 거는 이거($y=5t$)는 이거($y=3t$)랑 같은데 10은 시작 높이가 그래프에서도 시작 높이가 10이여서.

<발췌문 9>와 같이 학생 A는 [과제4]에 제시된 식을 해석하는 과정에서 속도의 의미를 분명하게 언급하였다. 그에게 속도란 1시간에 채워지는 양을 의미하며, 식 '$y=3t$'와 '$y=5t+10$'에서 속도는 각각 t의 계수인 '3'과 '5'라고 말하였다. 나아가 유아용의 식인 '$y=5t+10$'에서 '10'은 처음의 높이라고 설명하였다. 학생 A는 '$y=at+b$'에서 t를 시간, y를 t시간에 채워지는 물의 높이, a를 시간과 높이 사이의 변화율인 속도, b를 t의 값이 0일 때 물의 높이로 해석하였다. 교사는 학생 B에게도 성인용과 유아용의 물이 채워지는 높이의 빠르기를 비교할 것을 요구하였고, 학생 B의 대답은 아래의 <발췌문 10>과 같다.

<발췌문 10> : [과제4]에서 학생 B의 빠르기 비교

학생B: 유아용이 더 빨리 채워진다. 같은 시간에 얘(유아용)가 더 크니까 더 높이 채워진다.
교사: 한 시간일 때 얘(성인용)는 3이고 얘(유아용)는 15이기 때문에? 이것만 비교하면 되는 거야?
학생B: 다른 것도 다~
교사: 두 시간일 때 많고 해서?
학생B: 네

<발췌문 10>과 같이 학생 B는 1시간일 때 성인용의 높이 3, 유아용 15이므로 유아용의 물의 높이가 더 높고, 이와 마찬가지로 시간이 2일 때도 유아용이 더 높기 때문에 성인용보다 유아용이 더 빨리 높아질 것이라고 답하였다. 학생 B가 식 '$y=at+b$'에서 1시간, 2시간일 때의 물의 높이를 구한 것은 [과제3]에서보다 더 나아진 것으로 볼 수 있지만, 학생 B는 여전히 1시간부터 1시간씩 더해지는 시간의 변화와 그에 대응하는 물의 높이에 주목하였다.

다. 정리

Thompson과 Thompson(1992)이 제안한 비율 수준에 해당되는 학생 A와 내재화된 비 수준인 학생 B가 일차함수의 식 '$y=at+b$'를 해석하는 과정에서 드러나는 학생간의 차이점을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 주어진 식 '$y=at+b$'의 해석에서 학생들이 구성한 '양'이 서로 달랐다. 학생 A가 주목한 양은 물이 채워지는 시간과 높이, 시간과 높이 사이의 일정한 비인 빠르기이며, 학생 B는 처음에 물의 양이 가득 채워질 때 소요된 시간을 구하였고 학생 A의 설명을 들은 후 일정하게 더해지는 시간에 대응하는 물의 높이를 구하였다.

둘째, 주어진 식 '$y=at$'의 해석에서 학생들이 구성한 '시간 t의 변화'가 서로 달랐다. 학생 A는 t의 계수인 'a'를 시간과 물의 높이 사이의 비인 속력으로 해석하며 1시간 30분일 때의 높이도 찾을 수 있었지만, 학생 B는 1시간부터 1시간씩 더해지는 시간의 변화에 대응하는 물의 높이만 구할 수 있었다.

셋째, 주어진 식 '$y=at+b$'에서 학생 A와 학생 B가 구성한 t의 계수인 'a'에 대한 의미가 서로 달랐다. 학생 A는 [과제3]에 제시된 식 '$y=at$'에서 'a'를 시간과 물의 높이 사이의 비로 해석하여 문제 해결에 적용하였고, [과제4]에서는 성인용과 유아용의 물이 채워지는 높이의 빠르기를 비교하기 위해 주어진 식 '$y=at+b$'에서 'a'에 주목하여 값들을 비교하였다. 반면, 학생 B는 [과제3]에 제시된 식 '$y=at$'에서 'a'를 처음에 시간으로 언급하였고, 학생 A와 대화를 나눈 후 1시간부터 1시간씩 더해질 때마다 일정하게 더해지는 값으로 설명하였다. 그러나 [과제4]에 주어진 식 '$y=at+b$'에서 물의 높이가 증가하는 빠르기를 비교할 때, [과제3]에서 설명한 "한 시간 두 시간 세 시간 네 시간이면 3 가고 3 가고"와 같은 표현을 전혀 언급하지 않았고, 특정한 시간에 대응하는 유아용과 성인용의 물의 높이인 y의 값을 구한 후 그 값이 클수록 물이 더 빠르게 높아진다고 답하였다. 따라서 학생 B는 [과제3]의 식 '$y=at$'에서 'a'를 시간의 변화량에 대한 일정하게 더해지는 높이의 변화량으로 해석하긴 하였지만, 이는 학생 A와의 상호작용을 통해 (혹은 도움으로) 가능했을 것이라 판단된다.

V. 결론 및 제언

본 연구에서는 중학생들이 일정한 속력을 포함하는 상황을 식 '$y=ax+b$'로 표현하는 과정에서 구성하는 양들 사이의 관계를 Thompson과 Thompson(1992)이 제안한 비와 비율 수준에 기초하여 분석하였고, '$y=ax+b$'를 표현하고 해석하는 과정에서 드러나는 학생간의 'a'에 대한 의미의 차이를 살펴보았다. 본 연구에서 얻게 된 결과는 다음과 같다.

첫째, 본 연구는 Thompson과 Thompson(1992)의 연구를 더 확장하여, 일정한 변화율을 포함하는 상황에 대한 식 표현과 해석에서 학생들의 양적 추론의 수준과 그 특징을 제시하였다. 학생 A는 모든 과제에서 속력을 찾았고, 속력 사이의 관계로부터 교사가 제시한 새로운 과제를 해결하는 모습을 보였다. 반면, 학생 B는 스스로 두 양 사이의 비례 관계에 대해 언급한 적이 없으며, 덧셈 연산을 사용하여 두 양의 변화를 설명하였다. 이처럼 학생 B는 학생 A와 달리 상황에서 구성하는 양이 제한적이었기 때문에 임의의 시각에서의 또 다른 변량의 변화, 임의의 시간 변화량에서 또 다른 변량의 변화량을 상상하는데 어려움을 겪었다. 이로부터 학생 A는 모든 과제에 포함된 상황을 Thompson과 Thompson

(1992)이 제안한 비율 수준으로, 학생 B는 내재화된 비 수준으로 이해한 것으로 판단된다.

둘째, 학생들이 일정한 속력을 포함하는 상황에서 시간과 위치 사이의 관계를 식 '$y=ax$'로 동일하게 표현하더라도, 식에 쓴 'a'의 의미는 서로 다를 수 있다. 구체적으로, 학생 A는 상황에서 'a'를 찾은 후 이를 임의의 시각에서의 위치와 임의의 시간 변화량에 대응하는 이동 거리의 변화량을 구하는데 활용하였다. 즉, 'a'를 두 양 사이의 비의 일정함을 대표하는 수치로 인식한 것이다. 이에 반해 학생 B는 'a'를 특정한 시간에 곱해진 상수로 인식하여 1초부터 1초씩 더해지는 시간에 대응하는 위치를 찾을 수 있었지만, 1초부터 1초씩 늘어나는 시간이 아닌 임의의 시각에서의 위치를 구하는데 어려움을 겪었다.

셋째, 학생 A와 학생 B는 '$y=ax$'를 표현하는 과정에서 구성한 'a'의 의미에 따라 식 '$y=ax+b$'를 표현하고 해석하였다. 학생간의 차이는 [과제2]와 [과제4]에서 분명하게 드러났다. 속력은 같지만 출발하는 위치가 서로 다른 캐릭터의 움직임을 포함하는 [과제2]에서 학생 A는 속력에 주목한 후 시간과 위치 사이의 관계를 '$y=ax+b$'로 적절하게 표현하였고, 학생 B는 세 캐릭터의 시간 1초에 대응하는 위치로 각각 $5m$, $15m$, $20m$를 찾은 후 시간과 위치 사이의 관계를 식으로 나타내면 각각 '$y=5x$', '$y=15x$', '$y=20x$'가 될 것이라고 예상하였다. 이와 유사하게 물이 채워지는 시간과 높이 사이의 관계가 식 '$y=at+b$'일 때 채워지는 물의 높이의 빠르기를 비교하는 [과제4]에서도 학생 A는 'a'에 주목하였고, 학생 B는 1초일 때의 y의 값을 찾은 후 그 값이 클수록 더 빠르다고 답하였다.

넷째, 본 연구의 분석에 사용된 과제들은 서로 다른 움직임을 나타내고 있다는 점, 상황을 식으로 표현하거나 반대로 식을 상황으로 표현한다는 점에서 다양한 문제 상황을 포함하는 것으로 볼 수 있음에도 불구하고, 학생 A와 학생 B는 각각 자신만의 양적 추론 방식을 수업 내내 일관성 있게 보여주었다. 구체적으로 [과제1]과 [과제2]는 시간과 위치 사이의 관계가 포함된 상황을 식으로 표현하고, [과제3]과 [과제4]는 시간이 지남에 따라 채워지는 물의 높이를 나타낸 식을 상황에 적절하게 해석해야 한다. 이처럼 상황에 포함된 양들 사이의 관계는 시간과 위치, 시간과 채워지는 물의 높이와 같이 서로 다른 비례 관계를 포함하고 있다. 그러나 모든 과제에서 학생 A가 구성한 양은 두 양의 변화와 그들 사이의 불변의 관계였고, 학생 B는 이산적으로 변화하는 두 양뿐이었다. 따라서 학생 A와 학생 B가 구성한 양들 사이의 관계의 측면에서 본다면, 모든 과제는 같은 유형의 문제로 볼 수 있다.

이와 같이 본 연구는 중학생들의 일차함수의 식에 대한 이해와 그들 간의 차이점을 Thompson과 Thompson(1992)이 제안한 추론의 수준에 비추어 분석하였고, 일차함수의 식을 표현하고 해석하는 과정에서 겪는 어려움과 그 원인도 함께 살펴보았다. 이를 바탕으로 본 연구는 일차함수의 식 '$y=ax+b$'의 이해에 대한 교수·학습과 연구에 다음과 같은 시사점을 줄 수 있다.

첫째, 본 연구는 학생들이 상황에서 주목한 양들 사이의 관계에 따른 일차함수의 식 표현과 해석의 차이를 살펴보았다. 이는 일차함수의 교수·학습 상황에서 일차함수의 식에 대한 이해와 발달을 돕기 위해 동적인 상황에서 변하는 양과 불변인 양을 찾고 이를 표현하고 해석하는 활동이 필수적으로 요구됨을 의미한다. 또한 본 연구에서는 학생 A의 경우 [과제1]과 [과제2]에서 심칼 프로그램을 활용하여 불변인 양을 자연스럽게 찾을 수 있었고, 일차함수의 식 '$y=ax$'에서 '$y=ax+b$'로 표현의 발달이 이루어짐을 확인하였다. 이러한 본 연구의 결과는 기존의 일차함수

의 도입 방식인, 즉 상황에 주어진 변량의 변화를 이산적으로 해석하여 표로 나타낸 후 이를 빠르게 식으로 변환하여 일차함수의 개념을 제시하는 방식을 보완할 수 있는 교수·학습의 내용에 대한 정보를 제공한 것으로, 함수 지도를 위한 교육과정 및 교과서의 구성에 도움을 줄 것으로 기대한다.

둘째, 본 연구는 함수식을 지도하는 교사에게 학생의 수준을 진단하고 그 능력을 향상시킬 수 있는 과제를 준비하는데 긍정적인 도움을 줄 것으로 기대한다. 본 연구 결과, 상황에서 변화하는 양과 그들 사이의 불변인 관계를 추론하는 능력은 함수의 그래프 학습(Carlson et al., 2002, Castillo-Garsow, 2012; Moore & Thompson, 2015) 뿐 아니라 함수식의 표현과 해석에서도 중요한 역할을 한다는 것을 확인하였다. 따라서 이러한 결과는 함수식의 표현과 해석에서 어려움을 겪는 학생이 있다면 그 원인을 진단하는데 하나의 참고 자료가 될 것이며, 학생이 함수식을 상황에 적절하게 나타내더라도 그 상태에서 수학적으로 더 발전할 수 있도록 하려면 어떤 과제를 제시하고 이끌어 나가야 하는지에 대한 하나의 방향을 제시한 것이다.

셋째, 본 연구는 중학생들이 일차함수의 식을 표현하고 해석하는 과정을 세세하게 관찰하고 분석한 것으로, 함수식을 표현하고 해석하는 능력과 그 발달에 대한 후속 연구에 기초가 될 것이다. 그러나 본 연구는 두 변량의 값 또는 두 변량 사이의 일정한 비가 음수가 되는 경우를 다루지 못했다는 제한점을 갖는다. 이에 본 연구의 결과를 토대로 하여 함수식 '$y=ax+b$'에서 'a'의 값이 음수가 되는 상황에서 학생들의 함수식에 대한 이해를 탐색하는 추가 연구도 이루어지기를 기대한다.

참고문헌

마민영 · 신재홍(2016). 대수 문장제의 해결에서 드러나는 중등 영재 학생간의 공변추론 수준 비교 및 분석. **학교수학, 18**(1), 43-59.

박선화 · 변희현 · 주미경(2011). **중학교 학생의 수학과 학습 특성 연구**. 한국교육과정평가원 연구보고 RRI 2011-5.

변희현 · 주미경(2012). 우리나라 중학생의 함수 개념화 특성. **수학교육학연구, 22**(3), 353-370.

손홍찬 · 류희찬(2005). 함수 지도와 수학적 모델링 활동에서 스프레드시트의 활용. **수학교육학연구, 15**(4), 505-522.

이광상 · 조민식 · 류희찬(2006). 엑셀의 활용이 일차함수 문제해결에 미치는 효과. **학교수학, 8**(3), 265-290.

이종희 · 김부미(2003). 교수학적 처방에 따른 중학생들의 일차함수 오개념의 변화와 그 효과 분석. **학교수학, 5**(1), 115-133.

이화영 · 류현아 · 장경윤(2009). 함수의 그래프 표현 및 그래프 해석 지도 가능성 탐색. **학교수학, 11**(1), 131-145.

전형옥 · 이경화 · 방정숙(2009). 초등학교 6학년 학생의 양적 추론 사례 연구. **수학교육학연구, 19**(1), 81-98.

정은실(2003). 비 개념에 대한 역사적, 수학적, 심리적 분석. **학교수학, 5**(4), 421-440.

최지영 · 방정숙(2008). 초등학교 4학년 학생들의 대수적 사고 분석. **수학교육논문집, 22**(2), 137-164.

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. Research in *Collegiate Mathematics Education III, Conference Board of the Mathematical Sciences, Issues in Mathematics Education, 7*, 114-163.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 352-378.

Castillo-Garsow, C. (2012). Continuous quantitative reasoning. In R. Mayes & L. L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context* (Vol. 2, pp. 55-73). Laramie, WY: University of Wyoming College of Education.

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the middle school: Developing functional relationship through quantitative reasoning. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization* (pp.215-238). Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Hackenberg, A. J. (2009). *Relationships between students' fraction knowledge and equation solving*. In Paper presentation at the research pre-session of the annual conference of the National Council of Teachers of Mathematics Washington, D.C.

Lobato, J., Hohensee, C., Rhodehamel, B., & Diamond, J. (2012). Using student reasoning to inform the development of conceptual learning goals: The case of quadratic functions. *Mathematical Thinking and Learning, 14*, 85-119.

Monk, S. (1992). Students’ understanding of a function given by a physical model. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 175-193). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Moore, K. C., & Thompson, P. W. (2015). Shape thinking and students’ graphing activity. In T. Fukawa-Connelly, N. E. Infante, K. Keene & M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 18th Meeting of the MAA Special Interest Group on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 782-789. Pittsburgh, PA: RUME.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Smith, J., & Thompson, P. W. (2007). Quantitative reasoning and the development of algebraic reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 95-132). New York: Erlbaum.

Steffe, L. P. & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education (pp. 267-306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Thompson, P. W., & Thompson, A. G. (1992). *Images of rate*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA.

Two Middle School Students' Meaning of 'a' in the Linear Function, '$y = ax + b$'

Ma, Minyoung (Indong Middle School)
Shin, Jaehong (Korea National University of Education)

The purpose of this study is to investigate the differences in the meanings of two 7th grade students over 'a' in expressing and interpreting a function of the form of '$y = ax + b$(a, b is a constant, $a \neq 0$)', and to identify causes of the differences. We collected data from a teaching experiment with four 7th grade students who participated in 23 teaching episodes. Analysis of the collected data revealed marked differences between student A and student B in expressing and interpreting given situations with linear functions. The differences between the two students and the causes of differences were also analyzed. The results show that the students expressed and interpreted 'a' in the linear function '$y = ax + b$', on the basis of their construction of quantities and their quantitative relationships in a given situation involving a constant rate of change.

* Key Words : quantitative reasoning(양적 추론), constant rate of change(일정한 변화율), ratio(비), rate(비율), linear functions(일차함수)

논문접수 : 2017. 4. 7
논문수정 : 2017. 5. 8
심사완료 : 2017. 5. 11