

Numerical studies on approximate option prices

Jeongyeon Yoon^a · Jisu Seung^b · Seongjoo Song^{a,1}

^aDepartment of Statistics, Korea University; ^bFinancial Security Institute

(Received January 20, 2017; Revised March 10, 2017; Accepted March 15, 2017)

Abstract

In this paper, we compare several methods to approximate option prices: Edgeworth expansion, A-type and C-type Gram-Charlier expansions, a method using normal inverse gaussian (NIG) distribution, and an asymptotic method using nonlinear regression. We used two different types of approximation. The first (called the RNM method) approximates the risk neutral probability density function of the log return of the underlying asset and computes the option price. The second (called the OPTIM method) finds the approximate option pricing formula and then estimates parameters to compute the option price. For simulation experiments, we generated underlying asset data from the Heston model and NIG model, a well-known stochastic volatility model and a well-known Levy model, respectively. We also applied the above approximating methods to the KOSPI200 call option price as a real data application. We then found that the OPTIM method shows better performance on average than the RNM method. Among the OPTIM, A-type Gram-Charlier expansion and the asymptotic method that uses nonlinear regression showed relatively better performance; in addition, among RNM, the method of using NIG distribution was relatively better than others.

Keywords: asymptotic option price, Gram-Charlier expansion, Heston model, normal inverse gaussian process

1. 서론

옵션가격은 할인된 수익함수의 위험중립 확률측도 하에서의 기댓값으로 주어지므로, 옵션가격의 계산에서 수익률의 위험중립 확률분포를 찾는 것은 매우 중요한 문제이다. 대표적인 옵션가격 결정모형인 블랙-숄즈 모형 (Black과 Scholes, 1973)에서는 위험중립 확률측도 하에서 기초자산 확률과정의 기하브라운 운동을 따른다고 가정한다. 이렇게 되면 로그수익률이 정규분포를 따르게 되어 옵션가격을 쉽게 계산할 수 있다. 하지만 이 경우 실제 확률분포에서도 기초자산의 로그수익률이 정규분포를 따르게 되고, 정규분포는 시장에서 관측되는 수익률분포의 높은 첨도나 0이 아닌 왜도 등의 특성을 반영하지 못한다. 또, 변동성을 상수로 가정하기에 시장에서 관측되는 변동성 스마일 등의 현상도 설명할 수 없게 된다. 이와 같이 블랙-숄즈 모형은 간편하고 이해하기 쉽지만 여러 가지 단점 또한 가지고 있기 때문

This research was supported by the Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (NRF-2013R1A1A3012819), and is based on Jisu Seung's master thesis and additional research.

¹Corresponding author: Department of Statistics, Korea University, 145, Anam-ro, Seongbuk-gu, Seoul 02841, Korea. E-mail: sjsong@korea.ac.kr

에, 블랙-숄즈 모형을 바탕으로 하되 실제 시장에서 관측되는 자료에 보다 잘 적합되는 모형을 찾기 위한 연구가 다각도로 이루어졌다. 그 중 하나가 옵션의 가격결정에 있어서 블랙-숄즈 옵션가격을 선도항(leading term)으로 하면서 오차를 보정하는 방식으로 옵션의 가격을 계산하는 연구이다. 이러한 연구는 기초자산의 확률과정이 근사적으로 블랙-숄즈 모형을 따른다는 기초 위에서 이루어진다고 할 수 있다. Jarrow와 Rudd (1982)는 로그수익률의 확률밀도함수를 일반화 Edgeworth 급수방법으로 확장하여 A-type Gram-Charlier의 방법을 옵션의 가격결정에 이용하였고, Madan과 Milne (1994)는 헤르미트 다항식을 기저로 하는 가격 확장식을 제안하였다. Rompolis와 Tzavalis (2007)는 C-type Gram-Charlier 급수확장을 이용하여 음의 확률값을 만들어낼 수 있는 A-type Gram-Charlier의 단점을 보완하였다. Song 등 (2011)은 위험중립 확률측도 하에서 블랙-숄즈 모형으로 수렴하는 기하 레비 모형을 고려하여 이 수렴과정을 통해 블랙-숄즈 가격을 선도항으로 하는 옵션가격의 근사식을 제안하였다.

앞서 Lee와 Song (2016)은 위에서 소개된 방법들을 variance gamma (VG) 확률과정에서의 모의실험으로 비교하였다. 유한 활동도(finite-activity)와 무한 변동성(infinite variation)을 갖는 순수 점프 레비 확률과정은 내재변동성의 스마일 현상이나 로그수익률분포의 두꺼운 꼬리 등 기하브라운 운동으로 설명될 수 없는 여러 가지를 설명할 수 있고, 블랙-숄즈 모형에 비해 실제 자료에 더 잘 적합된다는 것이 밝혀져 있는데 (Carr 등, 2002; Geman, 2002; Madan과 Seneta, 1990), 반면 블랙-숄즈 모형에 비하여 모수추정이나 계산이 어려운 단점이 있다. VG 확률과정은 순수 점프 레비 확률과정 가운데 상대적으로 간단한 모형으로, 확률밀도함수와 유럽식 콜옵션의 가격이 닫힌 형태로 표현되어 여러 가지 계산이 다소 쉬워진다. Lee와 Song (2016)은 VG 확률과정을 따르는 기초자산의 가격과정을 생성하여 Edgeworth 확장, A-type Gram-Charlier 확장, C-type Gram-Charlier 확장과 Song 등 (2011)에서 제안된 근사방법을 비교하였다. 또, 순수 점프 레비 확률과정인 normal inverse gaussian (NIG) 모형에서의 적률추정을 이용한 옵션가격도 계산하여 다른 방법들과 비교하였다.

이 논문에서는 Lee와 Song (2016)의 논문에서와 같이 Edgeworth 확장, A-type과 C-type Gram-Charlier 확장, Song 등 (2011)의 근사방법, NIG 옵션가격을 비교함에 있어서 NIG 확률과정과 Heston 모형을 이용하였다. NIG 모형은 모수의 개수가 VG 모형보다 한 개가 많아서 수익률 분포적합이 일반적으로 더 좋다고 알려져 있고 (Cepni 등, 2013; Eriksson 등, 2009), Value at Risk의 계산결과도 VG 모형을 이용하는 경우보다 더 우수하다고 알려져 있다 (Kim과 Song, 2011). 이에, 자료에의 적합도가 높아서 블랙-숄즈보다 좋은 적합결과를 보이는 모형에서 근사방법들이 어떤 성능을 보이는지 비교해보고자 하였다. 뿐만 아니라, 변동성 자체를 확률과정으로 보는 확률변동성 모형 가운데 가장 널리 사용되는 모형 중에 하나인 Heston 모형에서 근사방법들의 성능도 비교하였다. 그리하여, 자료 생성과정이 레비 확률과정이나 확률변동성 모형인 경우 어떤 근사방법으로 옵션 가격을 결정하는 것이 좋은지를 찾아보고자 하였다. 이 논문에서는 가격근사에 중점을 두고자 하였으며, 실제 자료의 분석에서 Lee와 Song (2016)이 한 가지 접근방식만을 사용한 것과는 달리 두 가지 접근방식을 모두 사용하여 비교하였다.

이 논문에서 비교한 방법들은 기초자산의 모형을 따로 가정하지 않고, 블랙-숄즈의 가격에 오차에 대한 보정항을 고려하여 가격을 간단히 근사적으로 구하고 싶을 때 쓸 수 있는 몇 가지 옵션이라고 볼 수 있다. NIG 가격은 근사적인 가격은 아니지만, 일반적으로 좋은 적합을 보이는 것으로 알려져 있어 함께 고려하였다. 비교적 쉬운 방법으로 옵션의 시장가격이 잘못 설정되어 있지 않은지 그 경향성을 확인하여 가격산정의 참고로 사용할 수 있고, 위험중립적률의 계산을 통해 위험중립 확률분포가 블랙-숄즈 모형과 어떻게 다른지 또한 발견할 수 있을 것으로 생각된다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 2절에서는 기초자산 확률과정으로 고려한 NIG 모형과 Heston 모형을 소개하고, 3절에서는 근사방법을 살펴본다. 4절에서는 모의실험과 그 결과를 설명하고 5절에서는 KOSPI200 자료를 통해 모의실험의 결과를 확인하였다.

2. 기초자산 확률과정

2.1. Normal inverse gaussian (NIG) 모형

Barndorff-Nielsen (1997)에 의해 소개된 NIG과정은 inverse gaussian (IG)과정으로 시간변환된 브라운 운동이다. $IG(a, b)$ 분포는 $b > 0$ 의 추세를 갖는 브라운 운동이 수준 $a > 0$ 에 최초 도달하는 시간이 따르는 분포이며, 모수 $a > 0, b > 0$ 를 갖는 IG과정 $\{Y_t^{(IG)}; t \geq 0\}$ 는 0에서 출발하여 독립 정상증분을 가지면서 $Y_t^{(IG)}$ 가 $IG(at, b)$ 를 따르는 확률과정이다. W 를 표준브라운운동이라 하고 I 를 $a = 1, b = \delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ 인 IG과정이라고 할때, 모수 α, β, δ 인 NIG과정 X 는 시점 t 에서 다음과 같이 표현된다($\alpha > 0, \delta > 0, -\alpha < \beta < \alpha$).

$$X_t = \beta\delta^2 I_t + \delta W_{I_t},$$

X_t 는 모수 $\alpha, \beta, t\delta$ 인 NIG분포를 따르게 되며, 위치모수 μ 를 추가한 $NIG(\mu, \alpha, \beta, \delta)$ 분포의 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$f_{NIG}(x) = \alpha\delta \frac{e^{\delta\gamma + \beta(x-\mu)}}{\pi\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}} K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x-\mu)^2}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

여기서 γ 는 $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ 이고, K_1 은 index가 1인 제 3종의 변형(modified) Bessel함수로서 index가 ν 인 제 3종의 변형 Bessel함수의 적분표현은

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{\nu-1} \exp\left(-\frac{1}{2}z(y + y^{-1})\right) dy$$

이다. 일반적으로 레비 확률과정은 닫힌 형태의 확률밀도함수를 갖지 않지만 NIG과정에서는 확률밀도함수가 닫힌 형태로 존재하기 때문에 계산이 비교적 쉽고, 실제 주가 수익률 분포의 특성도 잘 반영한다 (Prause, 1999). NIG 모형의 모수는 흔히 최대가능도추정량(MLE)과 적률추정량(MME)으로 추정하는데, MLE는 확률밀도함수를 이용해 수치적으로 구하게 되고 MME는 모수를 평균(M), 분산(V), 왜도(S), 초과첨도(K)로 표현한 식 (2.1)에 각 표본값을 대입하여 추정한다. 여기서 초과첨도(K)는 첨도에서 정규분포의 첨도인 3을 뺀 값이고, 식 (2.1)에서 ρ 는 $3KS^{-2} - 4$ 이다.

$$\begin{aligned} \alpha &= 3\rho^{\frac{1}{2}}(\rho - 1)^{-1}V^{-\frac{1}{2}}|S|^{-1}, & \beta &= 3(\rho - 1)V^{-\frac{1}{2}}S^{-1}, \\ \delta &= M - 3\rho^{-1}V^{\frac{1}{2}}S^{-1}, & \mu &= 3\rho^{-1}(\rho - 1)^{\frac{1}{2}}V^{\frac{1}{2}}|S|^{-1}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

금융모형에 사용되는 NIG 모형에 대한 보다 자세한 내용은 Cont와 Tankov (2004) 또는 Schoutens (2003)를 참고할 수 있다.

2.2. Heston 모형

Heston (1993)은 기초자산 S 와 변동성 V 를 다음과 같이 모형화할 것을 제안하였다.

$$\begin{aligned} dS_t &= S_t \left(\mu dt + \sqrt{V_t} dW_t^1 \right), \\ dV_t &= \kappa (\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^2, \end{aligned}$$

여기서 W_t^1 과 W_t^2 는 ρ 의 상관계수를 갖는 표준브라운운동이고, μ 은 추세(drift), κ 는 평균회귀(mean-reversion) 속도, θ 는 V 의 장기평균(long-time mean), 그리고 σ 는 분산잡음(variance noise, volatility

of volatility)을 의미하는 모수이다. Heston 모형을 포함하는 확률변동성 모형은 변동성 자체를 랜덤한 확률과정으로 정의하여 변동성 스마일이나 변동성 군집현상 등을 설명할 수 있고, 파생상품을 보다 정밀하게 모형화할 수 있는 등 여러 장점을 갖는다. 또한 높은 척도와 0이 아닌 왜도로 대표되는 실제 주가 수익률 분포의 특성을 반영하고, 주가의 수익률과 변동성이 음의 상관관계를 갖는다는 레버리지 효과(leverage effect) 또한 반영할 수 있다. 물론 모형이 복잡해지기 때문에 블랙-숄츠 모형 등에 비해 계산 또한 복잡하다는 단점이 있으나, Heston 모형의 경우에는 닫힌 형태의 옵션가격결정식이 존재하여 파생상품의 가격결정에 널리 사용되고 있다 (Rouah, 2013).

Heston (1993)은 t 시점에서 기초자산 S 의 가격이 s , 변동성 V 의 값이 v 이고 무위험 이자율이 r 일 때, 만기까지의 잔여기간이 τ 이고 행사가격이 K 인 유럽식 콜옵션의 가격식이 식 (2.2)와 같음을 보였다.

$$\text{Call}(s, v, t, K) = sP_1 - e^{-r\tau} K P_2, \quad (2.2)$$

여기서 P_j 는 다음과 같고,

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[\frac{e^{-iu \ln(K) \Phi_t^{(j)}(u; \tau)}}{iu} \right] du, \quad j = 1, 2,$$

$\Phi_t^{(j)}(u; \tau)$ 는 다음과 같다.

$$\Phi_t^{(j)}(u; \tau) = \exp \left(C^{(j)}(u; \tau) + D^{(j)}(u; \tau)v + iu \ln(s) \right).$$

이 때,

$$\begin{aligned} C^{(j)}(u; \tau) &= r u \tau i + \frac{\kappa \theta}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho \sigma u i + d) \tau - 2 \ln \left(\frac{1 - g e^{d\tau}}{1 - g} \right) \right], \\ D^{(j)}(u; \tau) &= \frac{b_j - \rho \sigma u i + d}{\sigma^2} \frac{1 - e^{d\tau}}{1 - g e^{d\tau}}, \\ g &= \frac{b_j - \rho \sigma u i + d}{b_j - \rho \sigma u i - d}, \quad d = \sqrt{(\rho \sigma u i - b_j)^2 + \sigma^2 (u^2 - 2u_j u i)}, \\ b_1 &= \kappa - \rho \sigma, \quad b_2 = \kappa, \quad u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

이다. 이와 같이 Heston 모형은 옵션의 가격식이 닫힌 해로 표현되는 장점이 있지만, 변동성은 실제로 관측되지 않기 때문에 모수추정이 어렵고 옵션가격이 모수에 민감하게 반응한다는 단점이 있다 (Mikhailov와 Nögel, 2003).

3. 근사방법 및 계산

3.1. 근사방법

앞서 소개한 바와 같이, 본 논문에서는 옵션가격을 근사적으로 결정하는 방법인 Edgeworth 확장방법과 A-type, C-type Gram-Charlier방법, Song 등 (2011)의 근사방법, 그리고 NIG 모형에서 계산된 옵션가격을 비교하고자 한다. 이 절에서는 위의 5개 근사방법들을 간략하게 설명하였다.

Jarrow와 Rudd (1982)에서 옵션가격 결정을 위하여 제안된 A-type Gram-Charlier방법(이하 GCA)은 근사하고자 하는 위험중립 확률측도하에서의 목적분포를 기저분포와 기저분포의 누울(cumulant), 그리고 목적분포의 누울을 이용하여 제시하였다 (Jarrow와 Rudd, 1982). 이를 바탕으로 Eriksson 등

(2009)은 기저분포를 정규분포로 하여 평균 μ , 표준편차 σ , 왜도 S , 초과첨도 K 를 갖는 X 의 확률밀도 함수에 대한 확장식을 다음과 같이 표현하였다.

$$f(x) = g(x) \left(1 + \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{m!} E_{X,m} H_m(z) \right),$$

이 때 $z = (x - \mu)/\sigma$, $g(x) = (1/(\sigma\sqrt{2\pi})) \exp(-1/2z^2)$ 이고 $H_m(\cdot)$ 는 헤르미트 다항식이며 $E_{X,m} = E(H_m(Z))$ 인 헤르미트 적률이다. 헤르미트 다항식은 표준정규분포의 밀도함수 ϕ 에 대해 $(-1)^m (d^m/dz^m)\phi(z) = H_m(z)\phi(z)$ 를 만족하는 직교다항식이다. 이를 $m = 4$ 까지 GCA 근사를 하면

$$f(x) = g(x) \left(1 + \frac{1}{6} S (z^3 - 3z) + \frac{1}{24} K (z^4 - 6z^2 + 3) \right)$$

이 되고 Edgeworth 근사를 하면

$$f(x) = g(x) \left(1 + \frac{1}{6} S (z^3 - 3z) + \frac{1}{24} K (z^4 - 6z^2 + 3) + \frac{1}{72} S^2 (z^6 - 15z^4 + 45z^2 - 15) \right)$$

이 된다 (Barndorff-Nielsen과 Cox, 1989). 일반적으로 GCA와 Edgeworth는 계산이 간단하지만 목적 분포가 정규분포에서 멀리 떨어져 있을 때 근사의 정확성이 떨어질 수 있고, 음의 확률밀도함수 값을 가질 수 있다는 단점이 있다.

Rompolis와 Tzavalis (2007)는 Charlier (1928)에 의해 고안된 C-type Gram-Charlier 확장을 이용하여 위험중립 확률측도하에서 확률밀도함수를

$$f(x) = \frac{\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \delta_m H_m(z)\right)}{\int \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \delta_m H_m(z)\right)}$$

와 같이 표현하고, 무한함을 적당한 차수까지 사용하여 밀도함수를 근사하는 방법(이하 GCC)을 제안하였다. δ_m 은 급수확장의 계수로서 정의는 Rompolis와 Tzavalis (2007)에 자세히 설명되어 있다. GCC는 Gram-Charlier의 지수함수형태를 기반으로 하기에 위험중립 확률밀도함수가 항상 양수가 되고 분포가 정규분포에서 멀리 떨어져 있는 경우에 GCA보다 좋은 성능을 보인다. 하지만 Edgeworth나 GCA와 달리 옵션가격근사식에 대한 닫힌식을 유도할 수 없고 추정해야 하는 적률 값이 많다는 단점이 있다.

Song 등 (2011)은 기초자산가격이 블랙-숄즈 모형으로 수렴하는 순수점프 레비 확률과정을 따를 때, 근사적 옵션가격 결정식을 유도하였다. 이 방법은 적률 등을 계산하여 밀도함수를 추정하는 과정을 거치지 않고 곧바로 옵션의 가격을 근사시키는 방법이며, 아래에서 Asymp라고 표기하였다. 자세한 내용은 Song 등 (2011)을 참조하도록 한다.

Eriksson 등 (2009)에서는 수익률의 위험중립 확률분포가 NIG분포를 따른다고 가정하고 옵션가격을 계산하면 자료생성과정이 NIG가 아니더라도 우수한 성능을 보일 것이라고 주장하였다. 이를 확인하기 위해 옵션자료를 통해 NIG 확률밀도함수의 모수를 추정하여 옵션가격식을 계산하는 방법도 함께 고려하였다.

3.2. 근사적 옵션가격의 계산

본 논문에서 옵션가격을 계산할 때, 두 가지 접근방식을 사용하였다. 한 가지는 옵션 가격에 내재된 위험중립 적률을 추정하여 이를 토대로 위험중립 확률분포하에서의 밀도함수를 근사한 후, 옵션의 수익

함수의 할인된 기댓값으로 가격을 근사하는 방법(이하 RNM방법으로 표기함)이다. 또 다른 방법은 직접 유도된 근사가격식에서 모수를 추정하여 옵션가격을 계산하는 방법(이하 OPTIM방법으로 표기함)이다. 위험중립 확률밀도함수가 알려져 있는 Edgeworth, GCA, GCC, NIG는 RNM방법으로 계산이 가능하고 닫힌 형태의 근사가격식이 알려진 Edgeworth, GCA, Asymp은 OPTIM방법으로 계산할 수 있다.

RNM방법의 경우, 근사적 위험중립 확률분포식에 구체적인 적률값이 필요하기에 적절한 적률추정방법이 요구된다. Bakshi 등 (2003)은 t 시점에서 τ 기간의 로그수익률 $R(t, \tau) (\equiv \ln[S_{t+\tau}] - \ln[S_t])$ 의 세 가지 수익함수, $R(t, \tau)^2$ (volatility contract), $R(t, \tau)^3$ (cubic contract), $R(t, \tau)^4$ (quartic contract)를 고려하였다. 그리고 현재시점으로 할인된 각각의 수익함수에 대한 위험중립 기댓값을 각각 $V(t, \tau)$, $W(t, \tau)$, $X(t, \tau)$ 로 표기하고 식 (3.1)와 같이 표현하였다. 여기서 S_t 는 t 시점에서의 기초자산이고 K 는 행사가격이며, $C(t, \tau; K)$ 와 $P(t, \tau; K)$ 는 행사가격이 K 이고 만기까지 잔여기간이 τ 인 유럽식 콜옵션과 풋옵션의 t 시점에서의 가격이다.

$$\begin{aligned} V(t, \tau) &= \int_{S_t}^{\infty} \frac{2 \left(1 - \ln \frac{K}{S_t}\right)}{K^2} C(t, \tau; K) dK + \int_0^{S_t} \frac{2 \left(1 + \ln \frac{S_t}{K}\right)}{K^2} P(t, \tau; K) dK, \\ W(t, \tau) &= \int_{S_t}^{\infty} \frac{6 \ln \frac{K}{S_t} - 3 \left(\ln \frac{K}{S_t}\right)^2}{K^2} C(t, \tau; K) dK - \int_0^{S_t} \frac{6 \ln \frac{S_t}{K} + 3 \left(\ln \frac{S_t}{K}\right)^2}{K^2} P(t, \tau; K) dK, \\ X(t, \tau) &= \int_{S_t}^{\infty} \frac{12 \left(\ln \frac{K}{S_t}\right)^2 - 4 \left(\ln \frac{K}{S_t}\right)^3}{K^2} C(t, \tau; K) dK + \int_0^{S_t} \frac{12 \left(\ln \frac{S_t}{K}\right)^2 + 4 \left(\ln \frac{S_t}{K}\right)^3}{K^2} P(t, \tau; K) dK. \end{aligned} \quad (3.1)$$

또, 식 (3.1)를 이용하여 $R(t, \tau)$ 에 대한 위험중립 적률을 식 (3.2)와 같이 제시하였다. 분산은 VAR, 왜도는 SKEW 그리고 첨도는 KURT로 표기하였다. 자세한 내용 및 증명은 Bakshi 등 (2003)을 참고할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{VAR}(t, \tau) &= e^{r\tau} V(t, \tau) - \mu^2(t, \tau), \\ \text{SKEW}(t, \tau) &= \frac{e^{r\tau} W(t, \tau) - 3\mu(t, \tau)e^{r\tau} V(t, \tau) + 2\mu(t, \tau)^3}{[e^{r\tau} V(t, \tau) - \mu(t, \tau)^2]^{\frac{3}{2}}}, \\ \text{KURT}(t, \tau) &= \frac{e^{r\tau} X(t, \tau) - 4\mu(t, \tau)e^{r\tau} W(t, \tau) + 6e^{r\tau} \mu(t, \tau)^2 V(t, \tau) - 3\mu(t, \tau)^4}{[e^{r\tau} V(t, \tau) - \mu(t, \tau)^2]^2}, \\ \mu(t, \tau) &= e^{r\tau} - 1 - \frac{e^{r\tau} V(t, \tau)}{2} - \frac{e^{r\tau} W(t, \tau)}{6} - \frac{e^{r\tau} X(t, \tau)}{24}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

GCC로 확률밀도함수를 근사할 때는 전개되는 항의 수보다 많은 수의 적률이 필요하다. Rompolis와 Tzavalis (2007)는 GCC의 위험중립 적률의 계산에 필요한 $R(t, \tau)$ 의 m 차 적률 μ_m 을 t 시점에서의 기초자산 S_t , 행사가격 K , 그리고 행사가격이 K 이고 잔여기간이 τ 인 유럽식 콜옵션과 풋옵션의 가격을 이용하여 식 (3.2)으로 정리하였다. μ_2 , μ_3 , μ_4 는 식 (3.1)과 비교할 때, $\mu_2 = e^{r\tau} V(t, \tau)$, $\mu_3 = e^{r\tau} W(t, \tau)$, $\mu_4 = e^{r\tau} X(t, \tau)$ 이다.

$$\mu_1 = e^{r\tau} \left[1 - \int_{S_t}^{\infty} \frac{1}{K^2} C(t, \tau; K) dK - \int_0^{S_t} \frac{1}{K^2} P(t, \tau; K) dK \right] - 1,$$

$$\begin{aligned} \mu_m = e^{r\tau} & \left[\int_{S_t}^{\infty} \frac{m}{K^2} \left[\ln \frac{K}{S_t} \right]^{m-2} \left[m - 1 - \ln \frac{K}{S_t} \right] C(t, \tau; K) dK \right. \\ & \left. + \int_0^{S_t} \frac{m}{K^2} \left[\ln \frac{K}{S_t} \right]^{m-2} \left[m - 1 - \ln \frac{K}{S_t} \right] P(t, \tau; K) dK \right], \quad \geq 2. \end{aligned}$$

위의 식들을 이용하여 적률을 계산할 때, 동일 만기를 갖는 옵션가격이 행사가격에 대해 연속적으로 존재해야 한다. 그러나 이용할 수 있는 실제 자료에는 한계가 있으므로 근사적으로 구하게 된다.

4. 모의실험

모의실험에서는 NIG 모형과 Heston 모형에서 생성된 기초자산을 바탕으로 각 근사방법에 따라 계산된 옵션가격을 비교하였다. 이 때, 현재시점의 기초자산가격은 200으로 하고 무위험 이자율 r 은 0.05, 그리고 만기 τ 는 0.328(82일)로 하였으며, 옵션의 행사가격 K 는 1부터 400까지로 하여 행사가격 간 간격을 1로 하였다. RNM방법과 OPTIM방법으로 계산된 옵션가격의 적합정도를 비교하기 위해서는 다음과 같이 정의된 평균백분위오차(APE), 평균절대오차(AAE), 제곱근 평균오차(RMSE)를 사용하였다 (Schoutens, 2003).

$$\begin{aligned} \text{APE} &= \frac{1}{\text{옵션가격의 평균}} \sum \frac{|\text{시장가격} - \text{모형가격}|}{\text{옵션갯수}}, \\ \text{AAE} &= \sum \frac{|\text{시장가격} - \text{모형가격}|}{\text{옵션갯수}}, \\ \text{RMSE} &= \sqrt{\sum \frac{(\text{시장가격} - \text{모형가격})^2}{\text{옵션갯수}}}. \end{aligned}$$

4.1. Normal inverse gaussian (NIG) 모형에서의 결과

NIG 모형의 기초자산을 이용한 모의실험에서는 모수의 참값을 $\alpha = 4$, $\beta = 0.03$, $\delta = 0.18$, $\mu = -0.001$ 로 하였다. NIG분포의 모수는 일반적으로 MLE와 MME로 추정하는데, 위험중립 적률을 추정하여 옵션가격을 근사하는 방법과 같은 맥락으로 MME를 통해 근사적인 옵션가격을 계산하였다. 생성된 10,000개의 자료에서 추정된 MME는 $\hat{\alpha} = 4.22$, $\hat{\beta} = 0.0065$, $\hat{\delta} = 0.189$, $\hat{\mu} = -0.0037$ 이다. 또한 식 (3.2)에서 VAR은 0.045, SKEW는 0.1247, KURT는 7.1914로 계산되었다. 이렇게 추정된 NIG분포의 밀도함수와 Edgeworth, GCA, GCC로 근사된 확률밀도함수를 자료생성에 이용한 참(true)밀도함수와 비교한 그림이 Figure 4.1이다. NIG와 GCC가 실제 분포에 상당히 근접하는 결과를 보이고 있고, Edgeworth와 GCA의 경우 음의 확률밀도함수 값을 갖는 부분도 발생하였다.

Figures 4.2와 4.3은 각각 RNM방법과 OPTIM방법으로 행사가격 K 에 따라 계산한 옵션가격을 전체 구간과 거래빈빈구간에서 살펴본 결과이다. 거래빈빈구간은 행사가격이 현재가격의 80%에서 120%가 되는 구간으로, 현실적으로 가장 많은 거래가 이루어지는 구간이기에 따로 적합도를 살펴보았다. Figures 4.2와 4.3에서 알 수 있듯이 OPTIM방법에 의해 근사된 옵션가격이 실제 옵션가격에 더욱 가깝게 근사되고 있으며, 거래빈빈구간에서 OPTIM방법의 성능의 우수함을 다시 확인할 수 있다.

Table 4.1에서 RNM방법과 OPTIM방법의 적합정도를 전체구간에서 살펴보면, OPTIM방법으로 근사한 옵션가격의 적합정도가 RNM방법의 결과보다 우수하고 RNM방법에서는 NIG가 실제가격에 가장 근접하게 근사하며, OPTIM방법에서는 GCA가 가장 우수한 적합도를 가진다. 자료생성과정에서 NIG이

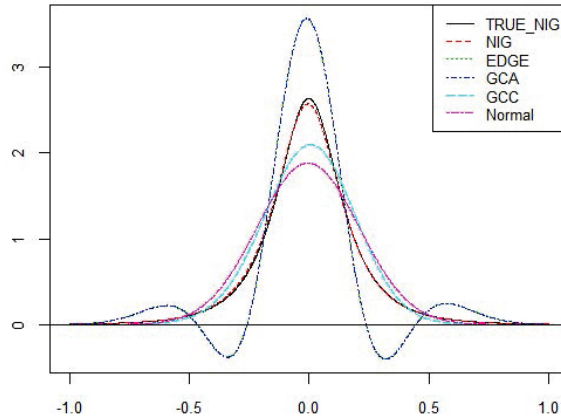


Figure 4.1. Estimated risk neutral density of log return when the data generating process is NIG. NIG = normal inverse gaussian; EDGE = Edgeworth; GCA = A-type Gram-Charlier; GCC = C-type Gram-Charlier.

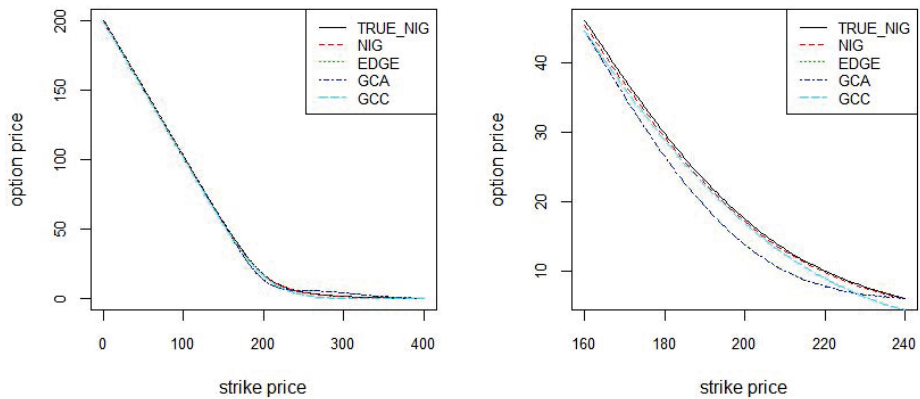


Figure 4.2. NIG model: call option price by RNM (left panel: total, right panel: vicinity of ATM). NIG = normal inverse gaussian; EDGE = Edgeworth; GCA = A-type Gram-Charlier; GCC = C-type Gram-Charlier.

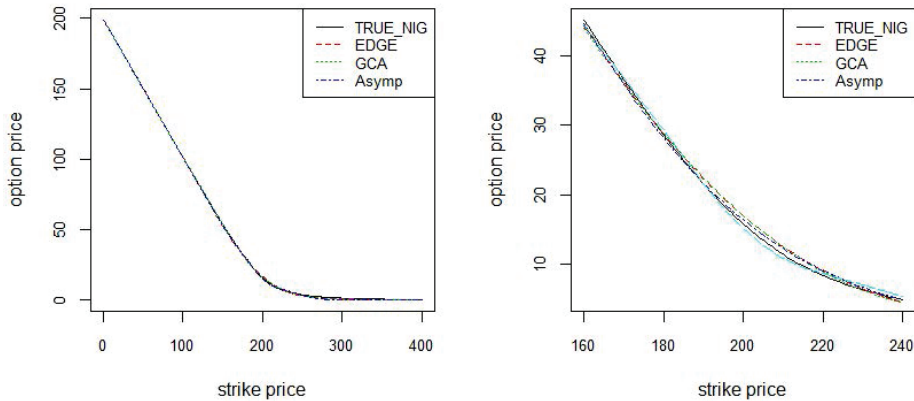


Figure 4.3. NIG model: call option price by OPTIM (left panel: total, right panel: vicinity of ATM). NIG = normal inverse gaussian; EDGE = Edgeworth; GCA = A-type Gram-Charlier; GCC = C-type Gram-Charlier.

Table 4.1. NIG model: errors in approximating option price

Range	Type	Approx. method	APE	AAE	RMSE
All	RNM	Edgeworth	0.0286	1.5475	1.8235
		GCA	0.0287	1.5491	1.8265
		GCC	0.0227	1.2224	1.2801
		NIG	0.0082	0.4428	0.5361
	OPTIM	Edgeworth	0.0097	0.5144	0.6276
		GCA	0.0091	0.4823	0.5574
Asymp		0.0112	0.5917	0.7382	
Vicinity of ATM	RNM	Edgeworth	0.1247	2.5763	2.7906
		GCA	0.1249	2.5809	2.7964
		GCC	0.0514	1.0652	1.1197
		NIG	0.0194	0.4002	0.4344
	OPTIM	Edgeworth	0.0348	0.6692	0.7721
		GCA	0.0267	0.5133	0.5716
Asymp		0.0237	0.4549	0.5017	

Vicinity of ATM: Strike price $\in [160, 240]$.

APE = average percentage error; AAE = average absolute error; RMSE = root mean squared error; ATM = at the money; GCA = A-type Gram-Charlier; GCC = C-type Gram-Charlier; NIG = normal inverse gaussian.

므로 NIG방법의 결과가 다른 방법에 비해 월등한 것은 당연한 결과이지만, OPTIM방법의 GCA와 Asymp이 NIG방법의 결과에 크게 뒤지지 않는 오차를 보이고 있는 것이 눈에 띈다. 예상했던 대로 GCA보다 GCC의 결과가 우수한데, 그 차이가 많이 크지는 않다(APE: GCA 2.9%, GCC 2.3%). Figure 4.1에서 보듯이 전체구간에서 참분포가 정규분포에서 크게 멀리 떨어져 있지 않기 때문에 그런 것으로 보인다. 반면, OPTIM방법의 결과가 RNM방법의 결과보다 우수했다는 것은 같았지만, Lee와 Song (2016)에서는 정규분포와 상당히 다른 VG분포를 이용하여 모의실험을 했기 때문에, RNM방법에서 GCC가 GCA에 비해 훨씬 좋은 결과(APE: GCA 14%, GCC 7%)를 보였었다. 또한 OPTIM방법에서 Asymp이 GCA보다 적합도가 더 좋았던(APE: GCA 2%, Asymp 1.8%) 것도 분포의 형태에 기인한 것이라고 추측할 수 있다.

거래빈번구간에서 적합정도를 살펴보면, 전체구간과 마찬가지로 NIG방법의 오차가 가장 작고 OPTIM방법이 RNM방법에 비교하여 오차가 작다. 하지만 RNM방법에서는 GCC(APE: 5%)의 적합도가 GCA(APE: 12.5%)보다 훨씬 좋고, OPTIM방법에서는 Asymp(APE: 2.4%)의 성능이 GCA(APE: 2.7%)보다 우수한 점 등의 차이도 눈에 띈다. Lee와 Song (2016)에서는 전체구간에서의 결과만 보고하였기에 비교는 어렵다.

4.2. Heston 모형에서의 결과

Heston 모형의 기초자산을 이용한 모의 실험에서는 Eriksson 등 (2009)에서 제시한 모수 $r = 0.05$, $\kappa = 1.62$, $\theta = 0.04$, $\sigma = 0.44$, $\rho = -0.76$ 에 준하여 기초자산을 생성하였다. RNM방법에 필요한 위험중립 적률 VAR은 0.01, SKEW는 -1.396, KURT가 6.266으로 추정되었다. Figure 4.4는 각 방법별 근사된 위험중립 확률분포이다. Heston 모형을 기초로 한 이 모의실험에서도 NIG방법이 Edgeworth, GCA 그리고 GCC방법에 비하여 실제분포에 가깝게 근사되었다.

Figure 4.5는 RNM방법으로 계산된 옵션가격이고 Figure 4.6은 OPTIM방법으로 계산된 옵션가격이

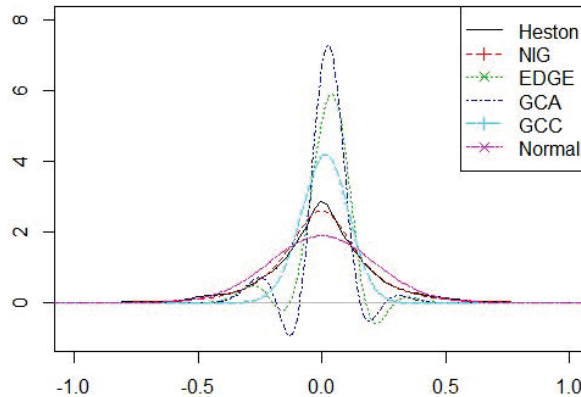


Figure 4.4. Estimated risk neutral density of log return when the data generating process is Heston. NIG = normal inverse gaussian; EDGE = Edgeworth; GCA = A-type Gram-Charlier; GCC = C-type Gram-Charlier.

다. 각 접근방식에 따른 옵션가격의 적합정도를 Table 4.2에서 비교하였는데, 이전과 같은 방식으로 전체구간과 거래빈번구간에서 비교하였다. NIG 모형을 기반으로 한 모의실험과 유사하게 OPTIM방법의 결과가 RNM방법보다 우수하였고 RNM방법에서 NIG방법의 적합정도가 구간에 관계없이 가장 좋은 결과를 보였으며, OPTIM방법에서 GCA가 전체구간과 거래빈번구간에서 성능이 가장 좋았다. 4.1절의 결과와 비교하면 전반적으로 오차가 작아서 모든 방법이 가격을 보다 잘 근사하고 있음을 알 수 있는데, 이는 Figures 4.5과 4.6에서도 확인된다.

Figure 4.4에서 보듯이 Heston 모형에서 생성된 분포도 정규분포와 아주 많이 떨어져 있지는 않아서, 4.1절에서처럼 GCA와 GCC의 결과차이가 크지 않고, OPTIM방법에서 GCA가 좋은 성능을 보이는 것으로 생각된다. 두 모의실험에서의 참분포가 유사하기 때문에, Heston 모형을 쓴 경우에도 NIG방법의 결과가 우수하게 나타났다. 결과를 종합하면, 모의실험에서 사용한 NIG와 Heston 모형에서 OPTIM방법의 결과가 우수하며, RNM방법에서는 NIG, OPTIM방법에서는 GCA와 Asymp 이 우수한 결과를 보였다.

5. 실증자료분석

실제 KOSPI200 콜옵션자료를 이용하여 내표본과 외표본에서 RNM방법과 OPTIM방법으로 가격을 근사해 보았다. 내표본은 같은 자료로 모수도 추정하고 성능도 비교하는 경우이고, 외표본은 모수추정에 사용하는 자료와 성능비교에 사용하는 자료가 다른 경우이다. 내표본에서는 2017년 1월 16일에 공시된 옵션 자료를 추정과 가격비교에 모두 사용하였고 외표본에서는 2017년 1월 16일 자료로 모수를 추정하여 17일 옵션가격을 예측하고, 이를 17일에 공시된 옵션 가격자료와 비교하였다. 사용한 만기일로 본 옵션의 잔존기간은 내표본의 경우 1월 16일 기준으로 25일, 53일, 81일이고, 외표본의 경우 1월 17일 기준으로 24일, 52일, 80일이다. 무위험 이자율 r 은 0.0163로 당시 국고채 3년 수익률을 사용하였다. 2017년 1월 16일과 17일은 금융시장이 크게 흔들렸던 시기가 아니기 때문에 안정적인 시기로 간주할 수 있으며, 수치적인 결과도 Lee와 Song (2016)의 안정시장에서의 결과에 가깝다. Lee와 Song (2016)에서는 OPTIM방법만 비교했으나, 본 논문에서는 RNM방법도 함께 비교하여 두 접근방식에 의한 근사결과를 Table 5.1에 나타내었다.

내표본과 외표본 모두에서 RNM방법보다는 OPTIM방법의 결과가 대체로 우수하였지만 외표본에서는

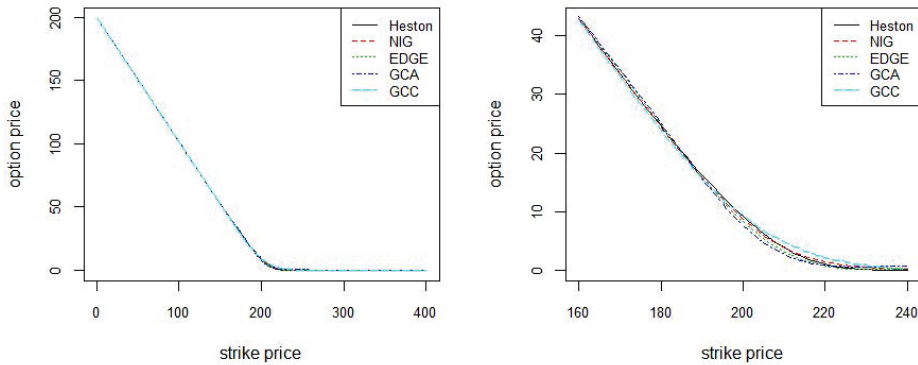


Figure 4.5. Heston model: call option price by RNM (left panel: total, right panel: vicinity of ATM). NIG = normal inverse gaussian; EDGE = Edgeworth; GCA = A-type Gram-Charlier; GCC = C-type Gram-Charlier.

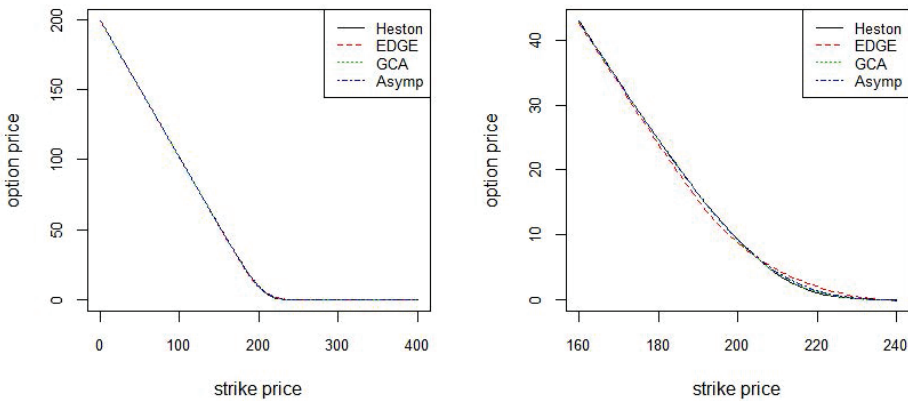


Figure 4.6. Heston model: call option price by OPTIM (left panel: total, right panel: vicinity of ATM). EDGE = Edgeworth; GCA = A-type Gram-Charlier.

Table 4.2. Heston model: errors in approximating option price

Range	Type	Approx. method	APE	AAE	RMSE
All	RNM	Edgeworth	0.0028	0.1436	0.2756
		GCA	0.0038	0.1942	0.4056
		GCC	0.0031	0.1605	0.3175
		NIG	0.0013	0.0651	0.1406
	OPTIM	Edgeworth	0.0027	0.1395	0.2953
		GCA	0.0006	0.0294	0.0539
		Asymp	0.0007	0.0344	0.0752
		<hr/>			
Vicinity of ATM	RNM	Edgeworth	0.0323	0.4467	0.5281
		GCA	0.0515	0.7124	0.8386
		GCC	0.0453	0.6262	0.6945
		NIG	0.019	0.2631	0.3053
	OPTIM	Edgeworth	0.0402	0.5560	0.6363
		GCA	0.0060	0.0830	0.0931
		Asymp	0.0079	0.1103	0.1516
		<hr/>			

Vicinity of ATM: Strike price $\in [160, 240]$.

APE = average percentage error; AAE = average absolute error; RMSE = root mean squared error; ATM = at the money; GCA = A-type Gram-Charlier; GCC = C-type Gram-Charlier; NIG = normal inverse gaussian.

Table 5.1. KOSPI200 call option: errors in approximating option price

Sample	Type	Approx. method	APE	AAE	RMSE
In-sample	RNM	Black-Scholes	0.0728	0.4528	0.6682
		Edgeworth	0.0906	0.5643	0.7594
		GCA	0.1026	0.6384	0.8506
		GCC	0.0626	0.3898	0.6382
		NIG	0.0492	0.3059	0.5504
	OPTIM	Black-Scholes	0.0656	0.4080	0.6628
		Edgeworth	0.0665	0.4141	0.6566
		GCA	0.0458	0.2847	0.4884
		Asymp	0.0521	0.3242	0.4570
		Out-of-sample	RNM	Black-Scholes	0.0716
Edgeworth	0.0774			0.4846	0.5675
GCA	0.0910			0.5696	0.6655
GCC	0.0580			0.3634	0.4867
NIG	0.0362			0.2272	0.3792
OPTIM	Black-Scholes		0.0579	0.3625	0.4705
	Edgeworth		0.0587	0.3676	0.4716
	GCA		0.0531	0.3322	0.5107
	Asymp		0.0585	0.3665	0.5466

In-sample: Jan/16/2017 and out-of-sample: Jan/17/2017.

APE = average percentage error; AAE = average absolute error; RMSE = root mean squared error; GCA = A-type Gram-Charlier; GCC = C-type Gram-Charlier; NIG = normal inverse gaussian.

NIG가 더 좋은 결과를 주면서 반드시 OPTIM이 좋다고 할 수는 없었다. 그러나 블랙-숄즈, GCA와 Edgeworth처럼 두 방법을 모두 사용할 수 있는 경우에는 항상 RNM 보다 OPTIM방법이 좋은 결과를 보인다. 내표본에서 RNM방법으로 옵션가격을 근사했을 때, NIG의 결과가 가장 우수하였고 OPTIM방법에서는 GCA로 근사된 옵션가격이 실제옵션가격에 가장 근접하였다. 외표본에서는 RNM방법에서 NIG가 역시 가장 우수하였고, OPTIM방법에서는 모두 비슷한 결과를 보였다.

특히 블랙-숄즈 방법과 다른 방법들을 비교한다면, 내표본의 RNM방법에서 NIG가 약 20-30%, OPTIM방법에서는 GCA가 약 30%의 오차를 줄이고 있고, RNM의 GCC방법과 OPTIM의 Asymp방법도 블랙-숄즈 방법에 대해 우위를 보인다. 외표본에서는 RNM방법에서 NIG가 40-50%정도, GCC가 20%정도의 오차를 줄이는 것으로 나타났으나, OPTIM방법에서는 블랙-숄즈 방법과 별로 차이가 없었다. 다만 이것은 표본경로 하나에 대한 결과이므로 항상 이와 같은 결과가 나온다고 할 수는 없기에, 실제 자료에서의 성능을 엿볼수 있는 참고사항으로 고려될 필요가 있다.

6. 결론

본 논문에서는 근사적 옵션가격 결정방법에 의해 계산된 옵션가격과 옵션가격의 참값 또는 관측된 값과 비교하여 어떤 근사방법이 우수한지 수치적으로 확인하고자 하였다. 이에 확률변동성모형인 Heston 모형과 기하 레비모형인 NIG 모형에서 생성된 기초자산을 이용하여 모의실험을 하였고 KOSPI200 콜옵션자료를 사용하여 각 근사방법에 따른 계산결과를 비교하였다. 근사적 옵션가격은 적률로부터 위험중립 확률분포를 추정하여 가격을 기댓값으로 계산하는 RNM방법과 근사된 가격식으로부터 직접 계산하는 OPTIM방법으로 구하였다. 그 결과, 모의실험에서 OPTIM방법이 RNM방법보다 성능이 전반적으

로 좋음을 확인하였다. RNM방법을 사용했을 때는 가정된 두 모형에서 NIG방법이 전체구간과 거래빈번구간에서 모두 우수한 성능을 보였고, OPTIM방법을 사용했을 때는 세 가지 방법의 적합결과가 비슷한데 주로 GCA와 Asymp이 우수한 적합결과를 보였다. 이 결과는 선행연구인 Lee와 Song (2016)의 결과와 대체적으로 비슷하지만, 모의실험에서 가정된 분포의 형태가 달라서 자세한 결과는 조금씩 다르게 나타났다. KOSPI200의 실증자료분석에서는 전체적으로 NIG의 가격근사결과가 좋았다. RNM과 OPTIM의 두 방법을 모두 사용할 수 있는 경우에는 OPTIM의 결과가 좋고, OPTIM방법들 가운데에서는 GCA가 가장 오차가 작았지만 다른 방법들과 큰 차이를 보이지는 않았다. 물론, NIG 모형과 Heston 모형에서 성능이 좋다고 해서 언제나 우수한 결과를 주는 것은 아닐 것이며, 보다 다양한 모형에서의 모의실험과 더 많은 시점의 실제자료에 대한 연구가 필요할 것으로 생각된다.

결과를 근사방법들에 대해 요약하면, GCC는 밀도함수의 근사에서 GCA의 단점을 보완하기 위해 나온 확장법이지만 계산이 복잡하고 GCA방법보다 더 많은 적률을 필요로 한다. 밀도함수의 근사에서는 특히 기저분포가 정규분포와 많이 다를때 좋은 결과를 주고, 옵션의 가격근사에서도 RNM방법에서는 GCA보다 우수하지만 NIG나 OPTIM방법의 결과에 비해 큰 장점이 없다. GCA는 OPTIM을 통한 옵션의 가격근사에서 우수한 결과를 보이는데, GCC와 마찬가지로 실증자료분석에서 옵션자료가 많지 않으면 적률근사의 성능이 떨어질 수 있는 단점도 있다. 특히 개별주식의 경우 주가지수에 비해 사용할 수 있는 옵션자료가 많지 않아서 적률추정에 문제가 있을 수 있다. Asymp은 적률계산을 하지 않아도 되는 장점이 있고 모의실험이나 실증자료분석에서 결과가 우수한 편이다. Lee와 Song (2016)에 따르면 특히 불안정시장의 외표본에서 성능이 좋다. NIG방법은 확장을 통한 근사방법이 아니고 수익률의 분포가 NIG분포를 따른다는 가정에 기반을 둔 것인데, 전반적으로 상당히 우수한 성능을 보인다. 결과적으로, 옵션가격의 결정을 위해서는 RNM방법보다 OPTIM방법을 쓰는 것을 추천하며, RNM방법 가운데에서는 NIG방법이 좋은 결과를 주리라고 기대된다.

References

- Bakshi, G., Kapadia, N., and Madan, D. (2003). Stock return characteristics, skew laws, and the differential pricing of individual equity options, *The Review of Financial Studies*, **16**, 101–143.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1997). Processes of normal inverse gaussian type, *Finance and Stochastics*, **2**, 41–68.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Cox, D. R. (1989). *Asymptotic Techniques for Use in Statistics*, Chapman and Hall, London.
- Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities, *The Journal of Political Economy*, **2**, 637–654.
- Carr, P., Geman, H., Madan, D., and Yor, M. (2002). The fine structure of asset returns: an empirical investigation, *Journal of Business*, **75**, 305–333.
- Cepni, O., Goncu, A., Karahan, M. O., and Kuzubas, T. U. (2013). *Goodness-of-Fit of the Heston, Variance-Gamma and Normal-Inverse Gaussian Models* (Research paper), Bogazici University, Istanbul.
- Charlier, C. (1928). A new form of the frequency function, *Maddalende fran Lunds Astronomiska Observatorium*, **II**, 51.
- Cont, R. and Tankov, P. (2004). *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- Eriksson, A., Ghysels, E., and Wang, F. (2009). The normal inverse gaussian distribution and the pricing of derivatives, *The Journal of Derivatives*, **16**, 23–37.
- Geman, H. (2002). Pure jump Lévy processes for asset price modeling, *Journal of Banking and Finance*, **26**, 1297–1316.
- Heston, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with application to bond and currency options, *Review of Financial Studies*, **6**, 327–343.

- Jarrow, R. and Rudd, A. (1982). Approximate option valuation for arbitrary stochastic processes, *Journal of Financial Economics*, **10**, 347–369.
- Kim, T. and Song, S. (2011). Value-at-risk estimation using NIG and VG distribution, *Journal of the Korean Data Analysis Society*, **13**, 1775–1788.
- Lee, J. and Song, S. (2016). Comparison of methods of approximating option prices with variance gamma processes, *The Korean Journal of Applied Statistics*, **29**, 181–192.
- Madan, D. and Milne, F. (1994). Contingent claims valued and hedged by pricing and investing in a basis, *Mathematical Finance*, **4**, 223–245.
- Madan, D. and Seneta, E. (1990). The VG model for share market returns, *Journal of Business*, **63**, 511–524.
- Mikhailov, S. and Nögel, U. (2003). Heston's stochastic volatility model implementation, calibration and some extensions, *Wilmott Magazine*, 74–94.
- Prause, K. (1999). *The Generalized Hyperbolic Model: Estimation, Financial Derivatives, and Risk Measures* (Doctoral dissertation), University of Freiburg, Freiburg.
- Rompolis, L. S. and Tzavalis, E. (2007). Retrieving risk neutral densities based on risk neutral moments through a Gram-Charlier series expansion, *Mathematical and Computer Modelling*, **46**, 225–234.
- Rouah, F. (2013). *The Heston Model and its Extensions in Matlab and C#*, John Wiley & Sons, New Jersey.
- Schoutens, W. (2003). *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*, John Wiley & Sons, New York.
- Seung, J. (2013). *Comparison of Approximate Option Pricing Methods under Normal Inverse Gaussian Model* (Master dissertation), Korea University, Seoul.
- Song, S., Jeong, J., and Song, J. (2011). Asymptotic option pricing under pure jump Lévy processes via nonlinear regression, *Journal of the Korean Statistical Society*, **40**, 227–238.

근사적 옵션 가격의 수치적 비교

윤정연^a · 승지수^b · 송성주^{a,1}

^a고려대학교 통계학과, ^b금융보안원

(2017년 1월 20일 접수, 2017년 3월 10일 수정, 2017년 3월 15일 채택)

요약

본 논문에서는 옵션의 가격을 결정하기 위해 사용될 수 있는 몇 가지 근사적인 방법들을 수치적으로 비교하였다. 헤르미트 다항식 계열의 Edgeworth 확장과 A-type Gram-Charlier 방법, C-type Gram-Charlier 방법, normal inverse gaussian (NIG) 분포를 이용하는 방법, 그리고 비선형 회귀를 이용한 점근적 근사방법이 그것이다. 이 방법들을 위험중립 확률측도 하에서 수익률의 분포함수를 근사하여 옵션가격을 계산하는 방식과 옵션의 근사가격식을 먼저 구하고 모수를 추정하여 가격을 계산하는 두 가지 방식을 사용하여 비교하였다. 모의실험에서는 확률변동성 모형에서 많이 사용되는 Heston 모형과 레비확률과정에서 좋은 적합도를 보이는 NIG 모형을 이용하여 자료를 생성하였고, 실제 자료로는 KOSPI200 콜옵션을 이용하였다. 모의실험과 실제 자료분석의 결과, 근사적 가격식을 먼저 구하는 방식이 좀 더 우수한 성능을 보였고 그 가운데 A-type Gram-Charlier와 비선형 회귀를 이용한 점근적 근사방법이 좋은 성능을 보였으며, 분포함수를 추정하여 옵션가격을 계산하는 경우 NIG분포를 이용하는 것이 상대적으로 좋은 결과를 보였다.

주요용어: 점근적 옵션가격, Gram-Charlier 급수확장, Heston 모형, normal inverse gaussian 분포

이 연구는 2013년도 정부(미래창조과학부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업(NRF-2013R1A1A3012819)이며, 이 논문은 제 2저자 승지수의 석사학위논문을 바탕으로 추가연구하여 작성한 것임.

¹교신저자: (02841) 서울특별시 성북구 안암로 145, 고려대학교 통계학과. E-mail: sjsong@korea.ac.kr