

# Average run length calculation of the EWMA control chart using the first passage time of the Markov process

Changsoon Park<sup>a,1</sup>

<sup>a</sup>Department of Applied Statistics, Chung-Ang University

(Received October 12, 2016; Revised November 3, 2016; Accepted November 3, 2016)

---

## Abstract

Many stochastic processes satisfy the Markov property exactly or at least approximately. An interested property in the Markov process is the first passage time. Since the sequential analysis by Wald, the approximation of the first passage time has been studied extensively. The Statistical computing technique due to the development of high-speed computers made it possible to calculate the values of the properties close to the true ones. This article introduces an exponentially weighted moving average (EWMA) control chart as an example of the Markov process, and studied how to calculate the average run length with problematic issues that should be cautioned for correct calculation. The results derived for approximation of the first passage time in this research can be applied to any of the Markov processes. Especially the approximation of the continuous time Markov process to the discrete time Markov chain is useful for the studies of the properties of the stochastic process and makes computational approaches easy.

Keywords: Markov process, first passage time, average run length, integral equation, transition matrix, Weibull distribution

---

## 1. 서론

최초통과시간(first passage time; FPT)은 확률과정(stochastic process)이 어떤 정해진 경계선(boundary)을 최초로 통과하는데 걸리는 시간을 의미한다. 확률과정은 시간에 따라 전개하는 과정을 말하는데, 좀 더 명확하게는 확률변수에 의해 결정되는 시스템의 전개를 연속된 시간의 함수로 표현한 것을 말한다. 이 때 시간은 연속된 시간(continuous time)과 이산된 시간(discrete time)으로 구분되지만, 관측되는 확률과정은 시간의 구분에 관계없이 이산된 시간에 의해 표현될 수 있다. 이산된 시간에서의 대표적 확률과정으로 Markov 과정을 들 수 있는데 이는 기억하지 못함(memorylessness)으로 특징되는 Markov 특성을 만족하는 확률과정이다. Markov 과정이 취하는 값, 즉 상태공간(state space)은 이산적 상태공간(countable state space)과 연속된 상태공간(continuous state space)으로 구분된다. 여기서 연속된 상태공간을 가지는 Markov 과정이 주어진 경계선을 최초로 통과하는 시간, 즉 최초통과시간에 대한 통계적 특성을 계산하는 통계계산 과정에 대해 알아보하고자 한다.  $X_1, X_2, \dots$ 를 동일독립 분

This research was supported by Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education (No. 2015R1D1A1A01058196).

<sup>1</sup>Department of Applied Statistics, Chung-Ang University, 84, Heukseok-ro, Dongjak-gu, Seoul 06974, Korea.

E-mail: [cspark@cau.ac.kr](mailto:cspark@cau.ac.kr)

포를 따르는 확률변수의 열이라 하자. 이 때 알려진 함수  $g$ 와 모수  $\theta$ 에 대해, 통계량  $g(X; \theta) = g(X)$ 를 사용한 Markov 과정은 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} H_t &= h_1 \cdot g(X_t; \theta) + h_2 \cdot H_{t-q}, \quad t = 1, 2, \dots, \\ H_0 &= z. \end{aligned}$$

단,  $h_1, h_2$ 는 알려진 상수이고  $z$ 는 시작상태 값을 나타낸다. 확률과정  $H_t$ 의 경계선을  $(l, u)$ 라 하면, 최초통과 시간은

$$T(z) = \min_t \{H_t \notin (l, u)\}$$

와 같이 정의된다. 여기서 구간  $(l, u)$ 는 일시상태(transient state), 그 여집합인  $(l, u)^c$ 는 흡수상태(absorbing state)가 된다. 경계선을 가진 Markov 과정의 최초통과시간은 통계적 분석에서 여러 분야에 연구된다. 예를 들면, 가설검정을 위한 축차확률비검정(sequential probability ration test), 시계열분석에서 AR(1) 모형의 최초통과시간 연구, 관리도에서 런길이(run length)의 연구 등이다. 이러한 연구에서 공통점은 통계량이 Markov 과정이라는 것과 함께 이 과정은 경계선을 최초로 통과하게 되면 그것을 인지한 다음 다시 처음의 시작값( $H_0 = z$ )에서 동일한 과정을 반복한다는 것이다. 이 때 최초통과시간은 확률변수로서 그 특성을 비교하기가 어려우므로 평균과 분산 등을 사용하여 상대적 특성을 비교한다. 최초통과시간의 평균과 분산은 계산에 있어 두 가지 문제점을 가지고 있다. 첫째는 Markov 과정을 형성하는 통계량  $g(X; \theta)$ 의 확률밀도함수가 알려져 있지 않은 경우, 둘째는  $g(X; \theta)$ 의 확률분포를 사용할 때 평균이나 분산의 계산을 위한 적분식이 알려진 형태의 닫힌 형태(closed form)로 나타낼 수 없는 경우이다.

최초통과시간의 평균은  $T(z)$ 의 확률함수(probability mass function; pmf)가  $f_{T(z)}(t)$ 이면

$$E[T(z)] = \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot f_{T(z)}(t) \quad (1.1)$$

으로 표현된다.

이 논문에서는 여러 가지 방법의 이론적 연구보다 실제 계산에 있어 어떤 방법을 사용하는 것이 실질적으로 더 정확하고 효율성이 있는가를 판단하고 비교하는데 있다. 따라서 R 언어를 사용한 실제 계산에서 어떤 함수를 어떻게 사용하는 가를 보여주고 발생하는 계산상의 문제를 해결하고 원하는 정확도를 얻을 수 있는 방법에 대해 설명하고자 한다. 이러한 방법을 설명하는데 있어 Markov 과정을 사용하는 대표적인 예로서 지수가중 이동평균(exponentially weighted moving average; EWMA) 관리도를 사용한다. 관리도에서는 최초통과시간을 런길이(run length)라 하고 그 평균을 평균런길이(average run length; ARL)라 한다. 지수가중 이동평균 관리도는 Hunter (1986)와 Waldmann (1986) 이후 Chang과 Gan (1994), Crowder와 Hamilton (1992), MacGreger와 Harris (1993) 등 많은 연구가 되어 왔다. 특히 지수가중 이동평균 관리도의 평균런길이에 관한 연구는 Crowder (1987a, b) 이후 Gan (1993, 1995, 1998), Gan과 Chang (2000), Lucas와 Saccucci (1990), Park와 Won (1996) 등에 의해 연구되었다.

또한 확률변수  $X$ 와 함수  $g(X)$ 의 분포가 알려지지 않은 경우의 예로서, Weibull 분포의 경우를 예로 사용한다. 관리도의 연구에 사용되는 분포로는 정규분포가 가장 널리 사용되어 왔지만 공정특성치가 비대칭 분포를 따를 때는 Weibull 분포가 대표적인 분포로 사용되었다. 이에 대한 연구로는 Chan 등 (2015), Nichols와 Padgett (2005), Pascual (2010), Ramalhoto와 Morais (1999) 등이 있다.

공정으로부터 일정시간 간격으로 취한 표본을

$$\mathbf{Y}_i = \{Y_{ij}, i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, n\}$$

라 하고  $Y_{ij} \sim \text{Weibull}(\text{scale} = \eta, \text{shape} = \beta)$  분포를 따른다고 하자. 이 때 Weibull 분포의 척도(scale) 모수  $\eta$ 를 관리하기 위해서는 로그함수인 smallest extreme value(SEV) 분포를 사용하면 편리하다. 관측값의 로그변환은

$$X_{ij} = \log(Y_{ij}) \sim \text{SEV}\left(\text{location} = \xi = \ln(\eta), \text{scale} = \sigma = \frac{1}{\beta}\right)$$

을 따르고 Weibull 분포의 척도모수  $\eta$ 는 SEV 분포의 위치(location) 모수에 해당함을 알 수 있다. 이 때  $E(X_{ij}) = \xi - \gamma\sigma$  ( $\gamma = 0.5772$ , Euler constant)이 되어 주어진  $\beta$ (주어진  $\sigma$ )에서는 Weibull 분포의 척도모수  $\eta$ 를 관리하는 것은 SEV 분포의 위치모수  $\xi$ 를 관리하는 것이고 이는  $X_{ij}$ 의 표본평균  $\bar{X}_i$ 를 통해 관리할 수 있다. 관리상태 ( $\xi = \xi_0$ )일 때

$$E(\bar{X}_i) = \xi_0 - \gamma\sigma, \quad \text{Var}(\bar{X}_i) = \frac{\pi^2\sigma^2}{6n}$$

이 된다. 표본평균  $\bar{X}_i$ 를 사용한 지수가중 이동평균은 아래와 같이 정의한다.

$$E_t = r\bar{X}_t + (1-r)E_{t-1}, \quad i = 1, 2, \dots, \\ E_0 = \xi_0 - \gamma\sigma.$$

지수가중 이동평균 관리도의 절차는  $k\sigma$  한계를 사용하여, 관계식

$$E_t \leq \xi_0 - \gamma\sigma - k \cdot \frac{\pi\sigma}{\sqrt{6n}} \sqrt{\frac{r}{2-r}} \quad \text{또는} \quad E_t \geq \xi_0 - \gamma\sigma + k \cdot \frac{\pi\sigma}{\sqrt{6n}} \sqrt{\frac{r}{2-r}}$$

을 최초로 만족하는 시점에서 이상신호를 준다. 위 식에서  $E_t$ 는 Markov 과정에 해당되고 이때  $h_1 = r$ ,  $h_2 = 1 - r$ ,  $z = \xi_0 - \gamma\sigma$ 이다.

제 2절에서는 Markov 과정을 만족하는 관리도의 평균런길이를 계산하는 세 가지 방법, 즉 가우시안 구적법, Riemann 합, 그리고 Markov 연쇄 근사에 대한 설명을 하고 제 3절에서는  $g(X_i) = \bar{X}_i$ 의 확률 밀도함수 및 분포함수의 계산, 제 4장에서는 전이행렬의 계산 상의 문제점과 그 해결책을 설명한다. 제 5장에서는 계산된 결과의 신뢰도에 대해 모의실험을 통해 알아 보았다. 실제 계산과정은 R 언어를 사용하였다.

## 2. 평균런길이의 근사 계산 방법

평균런길이를 계산하는 방법으로는 크게 세가지가 있다. 평균런길이에 대한 적분식을 표현한 다음, 적분을 가우시안 구적법을 근사시키거나 동일 구간으로 나눈 다음 Riemann 합을 사용하는 두 가지 방법, 그리고 관리통계량  $E_t$ 를 이산적 Markov 연쇄로 근사시켜 최초통과시간의 평균을 구하는 방법이다. 적분식을 사용한 연구로는 Champ와 Rigdon (1991), Gianino 등 (1990) 등이 있다. 특히 Knoth (2003, 2004, 2005, 2007)는 지수가중 이동평균 관리도의 평균런길이의 계산에 대한 심도있는 연구를 하였고, R 패키지 'spc'를 작성하여 관리도의 특성을 연구하는데 많은 도움을 주었다.

### 2.1. 가우시안 구적법의 사용

일반적으로  $f_{T(z)}(t)$ 의 표현은 잘 알려져 있지 않다. 따라서 식 (1.1) 대신 Markov 특성과 통계량  $g(X_1; \theta)$ 의 pmf인  $f_{g(X_1)}(x)$ 를 사용하여 아래와 같은 적분식을 사용한 표현이 많이 이용된다.

$$E[T(z)] = \int_A E[T(z)|g(X_1) = x] \cdot f_{g(X_1)}(x)dx + \int_{A^c} E[T(z)|g(X_1) = x] \cdot f_{g(X_1)}(x)dx.$$

단,  $A = \{x; l < h_1x + h_2z < u\}$ .  $L(z) = E[T(z)]$ 라 하면 위 식은 다음과 같이 다시 표현할 수 있다.

$$L(z) = 1 + \frac{1}{h_1} \int_l^u L(y)f_{g(X_1)}\left(\frac{y - h_2z}{h_1}\right) dy. \quad (2.1)$$

식 (2.1)의 왼쪽과 오른쪽의 적분에는 동일한 함수  $L$ 이 있고 오른쪽의 적분이 직접적으로 풀리지 않기 때문에 다른 방법으로 함수  $L$ 을 풀어야 한다. 식 (2.1)의 오른쪽 적분은 가우시안 구적법(Gaussian quadrature method)을 사용하여 근사적으로 표현하면 다음과 같다.

$$\int_l^u L(y)f_{g(X_1)}\left(\frac{y - h_2z}{h_1}\right) dy \approx \sum_{j=1}^m w_j^G \cdot L(x_j^G) f_{g(X_1)}\left(\frac{x_j^G - h_2z}{h_1}\right). \quad (2.2)$$

단,  $\{x_j^G, j = 1, 2, \dots, m\}$ 과  $\{w_j^G, j = 1, 2, \dots, m\}$ 는 구간  $(l, u)$ 에서  $m$ 개의 가우시안 구적점(quadrature point)과 가중치(quadrature weight)를 의미한다. 일반적으로 가우시안 구적법을 사용하면 적분을 근사시킬 때 구적점의 수를 크게 하면 오차가 줄어든다.

이제 식 (2.1)와 (2.2)에서 함수  $L$ 에  $m$ 개의 가우시안 구적점을 대입하여 정리하면 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} L(x_1^G) \\ L(x_2^G) \\ \vdots \\ L(x_m^G) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{C}^G \begin{pmatrix} L(x_1^G) \\ L(x_2^G) \\ \vdots \\ L(x_m^G) \end{pmatrix}.$$

단,  $\mathbf{C}^G$ 는  $m \times m$ 행렬로서 각 요소는  $c_{ij}^G = (1/h_1)w_j^G f_{g(X_1)}((x_j^G - h_2x_i^G)/h_1)$ 이다. 위 식으로부터 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{pmatrix} L(x_1^G) \\ L(x_2^G) \\ \vdots \\ L(x_m^G) \end{pmatrix} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}^G)^{-1} \mathbf{1}.$$

단,  $\mathbf{I}$ 는 차원  $m$ 인 단위행렬,  $\mathbf{1}$ 은 차원  $m$ 인 1벡터이다. 따라서 시작값이  $x_s^G$ 인 지수가중 이동평균 관리도의 평균런길이는

$$L(x_s^G) \approx \mathbf{s}^{G'} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{C}^G)^{-1} \cdot \mathbf{1} \quad (2.3)$$

으로 근사됨을 알 수 있다. 단,  $\mathbf{s}^G$ 는  $m$ 차원 벡터로서  $x_s^G$ 에 해당하는 요소만 1이고 나머지는 0이다. 최종적으로 시작값이  $z$ 인 지수가중 이동평균 관리도의 평균런길이는  $z$ 에 가장 가까운  $x_s^G$ 를 찾고 이에 해당하는 식 (2.3)의 값으로 대신한다.

## 2.2. Riemann 합의 사용

가우시안 구적법과 유사하지만 Riemann 적분의 원리를 사용한 계산법도 유용하게 사용될 수 있다. 즉, 적분 구간을 사다리 꼴로 배분하여 면적을 계산한 다음 그 합(Riemann 합)을 구하여 적분의 근사치로 사용하는 것이다. 이때 적분 구간을 배분하는 부구간의 수를 많이 하면 오차가 줄어든다. 사다리 꼴을 사용한 Riemann 합은 다음과 같이 표현된다.

$$\int_l^u L(y)f_{g(X_1)}\left(\frac{y-h_2z}{h_1}\right)dy \approx \sum_{j=1}^m w^R \cdot L(x_j^R) f_{g(X_1)}\left(\frac{x_j^R-h_2z}{h_1}\right).$$

단,  $\{x_j^R, j=1,2,\dots,m\}$ 과  $\{w^R, j=1,2,\dots,m\}$ 는 구간  $(l,u)$ 을  $m$ 개의 동일 부구간으로 나누었을 때 각 구간의 가운데 값과 각 구간의 넓이를 의미한다. 따라서  $w^R = (u-l)/m$ 이다. 가우시안 구적법에서와 유사한 과정을 통해 아래 식을 얻는다.

$$\begin{pmatrix} L(x_1^R) \\ L(x_2^R) \\ \vdots \\ L(x_m^R) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{C}^R \begin{pmatrix} L(x_1^R) \\ L(x_2^R) \\ \vdots \\ L(x_m^R) \end{pmatrix}.$$

단,  $\mathbf{C}^R$ 는  $m \times m$ 행렬로서 각 요소는  $c_{ij}^R = (1/h_1)w_j^R f_{g(X_1)}((x_j^R - h_2x_i^R)/h_1)$ 이다. 위 식으로부터 다음 결과를 얻는다.

$$\begin{pmatrix} L(x_1^R) \\ L(x_2^R) \\ \vdots \\ L(x_m^R) \end{pmatrix} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}^R)^{-1} \mathbf{1}.$$

시작값  $z$ 에 가장 가까운 부구간의 중심값을  $x_s^R$ 라 하면 최초통과시간의 평균은

$$L(z) \approx \mathbf{s}^{R'} \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{C}^R)^{-1} \cdot \mathbf{1}$$

으로 근사됨을 알 수 있다. 단,  $\mathbf{s}^R$ 은  $m$ 차원 벡터로서 시작값  $z$ 가 속한 부구간의 값은 1이고 나머지는 모두 0이다.

## 2.3. Markov 연쇄의 근사

Markov 과정의 연속적 전이상태 구간(transient state interval)을 여러 개의 부구간(sub-interval)으로 나누고 각각의 부구간이 하나의 전이상태를 나타내도록 한다. 즉 전이상태 구간  $(l,u)$ 를  $m$ 개의 동일 크기의 부구간으로 분리하여 각 전이상태 구간  $\{I_j, j=1,2,\dots,m\}$ 를 아래와 같이 정의한다.

$$I_j = (l + (j-1) \cdot w^M, l + j \cdot w^M).$$

단,  $w^M = (u-l)/m$ . 또한 각 전이상태 구간의 중심값을  $x_j^M = l + (j-0.5) \cdot w^M$ , 각 구간의 (하한, 상한)은  $(l_j, u_j) = (l + (j-1) \cdot w^M, l + j \cdot w^M)$ 라 정의한다.

상태  $x_i$ 에서 상태  $x_j$ 로 가는 전이확률  $p_{ij}$ 는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P \left\{ l_j < h_1 g(X_1) + h_2 x_i^M < u_j \right\} \\ &= P \left\{ \frac{l_j - h_2 x_i^M}{h_1} < g(X_1) < \frac{u_j - h_2 x_i^M}{h_1} \right\}. \end{aligned}$$

통계량  $g(X_1)$ 의 분포함수가  $F_{g(X_1)}$ 으로 알려져 있다면

$$p_{ij} = F_{g(X_1)} \left( \frac{l + j w^M - h_2 x_i^M}{h_1} \right) - F_{g(X_1)} \left( \frac{l + (j-1) w^M - h_2 x_i^M}{h_1} \right) \quad (2.4)$$

이 된다. 분포함수  $F_{g(X_1)}$ 가 알려져 있지 않은 경우에는 표본으로부터 추정된  $\hat{F}_{g(X_1)}$ 를 사용한다. 이러한 Markov 연쇄의 전이확률행렬은 다음과 같이 근사적으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{C}^M = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mm} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

단, 이 전이확률은 Markov 과정이 상태  $i$ 에 있을 때는 항상 해당 상태공간  $i$ 의 중심값을 가진다는 가정하에 근사된 것이다. 전이확률행렬의  $l$  제곱의  $(i, j)$  요소  $(\mathbf{C}^M)^l_{i,j}$ 는 상태  $x_i$ 에서  $l$  시점 후에 상태  $x_j$ 로 가는 확률을 의미한다. 따라서

$$\sum_{l=0}^{\infty} (\mathbf{C}^M)^l_{i,j} = P \{ \# \text{ of visits to } x_j \text{ until signal} | E_0 = x_i \}$$

이 되고, Markov 과정의 최초통과시간에 대한 평균값은 아래 식에 의해 계산된다.

$$L(z) \approx \mathbf{s}^{M'} [\mathbf{I} - \mathbf{C}^M]^{-1} \mathbf{1}.$$

단,  $\mathbf{s}^M$ 은  $m$ 차원 벡터로서 시작값  $z$ 가 속한 전이상태 구간의 값은 1이고 나머지는 모두 0이다. 만일 경계선이 한쪽만 있는 경우에는, 예를 들면 전이상태 구간이  $(-\infty, u)$ , 누적분포함수  $F_{g(X_1)}$  범위  $(0, F_{g(X_1)}(u))$ 를  $m$ 개의 동일 부구간으로 나눈 다음 다시 역함수를 취하여 각 전이상태 구간  $\{I_j, j = 1, 2, \dots, m\}$ 를 아래와 같이 정의한다.

$$I_j = \left( F_{g(X_1)}^{-1} \left( \frac{j-1}{m} F_{g(X_1)}(u) \right), F_{g(X_1)}^{-1} \left( \frac{j}{m} F_{g(X_1)}(u) \right) \right).$$

또한 각 전이상태 구간의 중심값을  $x_j^M = F_{g(X_1)}^{-1}[\{(j-0.5)/m\} F_{g(X_1)}(u)]$ 로 정의하고 식 (2.4)와 동일한 공식을 적용하여 전이확률행렬 식 (2.5)를 구할 수 있다. 경계하한만 있는 경우도 이와 유사한 과정을 통하여 계산할 수 있다.

### 3. 통계량 $g(X)$ 의 분포함수

앞 장에서 설명한 세 가지 방법은 서로 유사하지만 조금씩은 다른 면이 있다. 가우시안 구적법과 Riemann 합은 적분 구간을 인위적으로 나눈 다음 사다리 꼴의 면적을 계산하여 더하는 과정은 동일하나 적분구간을 나누는 방법이 다르다. 다만 Markov 연쇄를 사용하는 방법은 Markov 연쇄의 특성을 통하여 평균런길이를 계산하는 점이 앞의 두 방법과 다르다. 계산상으로는 전자의 두 방법은  $g(X)$ 의 확률밀도함수를 사용하게 되고 후자는 분포함수를 사용하는 것이 다르다.

Markov 연쇄의 근사 방법은 관리도 통계량을 Markov 연쇄로 근사함으로써 계산문제에서 두 가지 장점을 가지고 있다. 첫째는 관리통계량을 Markov 연쇄로 나타냄으로써 관리도의 다양한 특성을 규명하는데 유용하게 사용될 수 있다. 이에 관한 연구는 Park(2007), Park 등 (2004), Park과 Reynolds (1999, 2008) 등이 있다. 둘째는  $g(X)$ 의 분포함수를 사용하는 점이 가우시안 구적법과 Riemann 합을 사용하는 방법과의 차이점이다. 이론적으로는 확률밀도함수를 사용하거나 분포함수를 사용하는 것이 대등하지만 실제 계산을 통해 근사값을 구하는 경우는 많이 다를 수 있다. 특히 관리한계의 폭이 넓을 때는 공정이 관리상태일 때 관리통계량이 관리한계 내에 있을 확률이 1에 가깝게 되는데, 이 때 가우시안 구적법과 Riemann 합 사용에서는 확률밀도함수의 근사값을 사용한 사다리꼴의 면적의 합이 1을 초과하는 경우가 자주 발생하고 그 때문에 평균런길이가 음수로 계산되는 오류를 범하게 된다. 이런 문제는 구적점의 수나 구간의 수를 크게 하여도 해결되지 않는다. 그러나 Markov 연쇄의 근사에서처럼 분포함수를 사용하면 관리통계량이 관리한계 내에 있을 확률의 추정값(표분포함수)이 구간의 수에 관계없이 항상 1보다 작게 나오게 되어 신뢰할 수 있는 값을 보증한다. 이와 같은 이유로 평균런길이를 계산하는 문제는 Markov 연쇄의 근사에 대해 고려하기로 한다.

앞 장에서 정의한 Markov 과정의 최초통과시간의 기대값은 통계량  $g(X)$ 의 분포함수를 알아야 계산할 수 있다. 이것은 확률변수  $X$ 가 잘 알려진 확률변수일지라도 그것의 함수  $g(X)$ 의 분포는 알려져 있지 않는 경우가 많다. 예를 들면,  $X$ 가 정규분포를 따르는  $n$ 차 벡터이고, 즉 iid이면 함수  $g(X_1) = \sum_{k=1}^n X_{1k}/n$ 일 때  $N(\mu, \sigma^2/n)$ 이다. 그러나  $X$ 가 Weibull 분포를 따르면 그 평균의 분포함수에 대해 구체적으로 닫힌 형태를 구할 수 없다. 이러한 경우에는  $X$ 의 분포로부터 모의실험을 통해 난수를 생성하고 그 난수의 함수값  $\{g(X_1), g(X_2), \dots, g(X_N)\}$ 을 사용하여 분포함수를 추정할 수 있다. 특정  $x$ 값에서 분포함수를 계산하는 대표적인 R함수는 ‘ecdf’가 있고, 이를  $x$ 의 범위 내 모든 실수 값에서 표현하기 위해서는 R함수 ‘approxfun’을 사용할 수 있다. 이를 수행하는 알고리즘은 다음과 같다

- 1) Generate  $N$  random vectors  $\{\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}), i = 1, 2, \dots, N\}$  from distribution  $f_x$ .
- 2) Calculate  $D = \{g(x_1), g(x_2), \dots, g(x_N)\}$ .
- 3) Estimate the distribution function (df) of  $g(X)$  using ‘ecdf’ at each point in  $D$ .
- 4) Estimate the df curve using ‘approxfun’ for values in  $(\min(D), \max(D))$ .

R함수 ‘approxfun’은 ‘ecdf’를 부드러운 곡선으로 적합시켜 관측된  $g(x)$ 의 범위 내에서 모든  $g(x)$  값에 대해 분포함수를 계산할 수 있다. 주어진 어떤 값  $x$ 에 대해 분포함수는

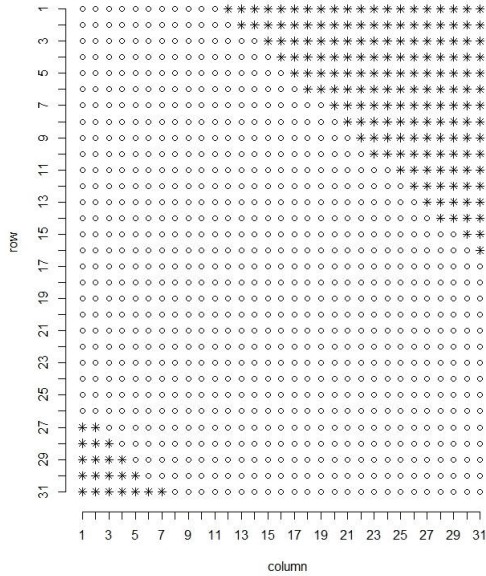
$$\hat{F}(x) = \text{approxfun}(X, \text{ecdf}(X)(X))(x)$$

로 추정한다.

#### 4. 전이행렬의 계산

Markov 연쇄의 전이행렬 식 (2.5)는 전이확률 식 (2.4)로 구성되어 있다. 이때 전이확률은 사전상태(prior state)에서 사후상태(posterior state)로 가는 조건부확률을 의미하는데 이 확률의 값은 사전상태와 사후상태가 멀리 떨어져 있을 때 작아진다. 전이확률을 계산할 때는 인자값(가장 작은 값, 가장 큰 값)은

$$\left( \frac{l_1 - (1-r)x_m^M}{r}, \frac{u_m - (1-r)x_1^M}{r} \right)$$



**Figure 4.1.** The shape of  $31 \times 31$  transition matrix: “o” indicates the index  $(i, j)$  where the distribution function is calculated, and “\*” indicates the index where the distribution function is not calculated and appeared as ‘NA’.

이 되고 ‘ecdf’ 함수에서 위의 인자 값에 대해 정의가 되어 있어야 한다. 그렇지 않으면  $\hat{F}_{g(X_1)}$ 는 “NA”로 인식되어 계산할 수 없다. 예를 들어  $m = 31$ 인 Weibull 분포에서의 전이행렬을 계산할 때 인자의 값이 너무 작거나 너무 커서 ‘ecdf’에 의해 정의되지 않은 인자 값이 있는 경우는 전이행렬이 Figure 4.1과 같이 나타난다. Figure 4.1에서 행렬의 우상단과 좌하단 부근에서 ‘NA’로 나타나는 것은 실제 값이 0에 아주 가까운 값이 되는 경우이다. 전이행렬에서 이 문제점을 보완하기 위해서는 ‘NA’로 나타난 곳은 모두 0으로 대체한다. 이렇게 하면 “NA”가 없는 전이확률을 구할 수 있고 평균 최초통과 시간을 계산할 수 있다.

또 주의해야 할 점은 대각원소(diagonal element)를 포함하여 모든 비 대각원소가 0일 수는 없다. 이것은 Markov 연쇄에서 어떤 임의의 전이상태에서 다른 또는 동일 상태로 전이할 가능성은 0 보다 커야 하기 때문이다. 그렇지 않으면 이 상태는 흡수상태에 해당한다. 관리통계량의 분포에 비해 관리한계가 지나치게 넓게 설정되어 있는 경우에는 Figure 4.1의 현상이 극단적이 되어 하나의 행에서 모든 열에 대한 값이 ‘NA’로 나타나는 현상이 발생할 수 있다. 이 때 ‘NA’를 모두 0으로 대체하면 그 해당 행의 모든 확률은 0이 되고 따라서 해당 상태는 전이상태가 될 수 없게 된다. 이러한 경우에는 표본분포함수를 모든 실수 구간에서 정의되도록 아래와 같이 수정할 필요가 있다.

$$\hat{F}^M(x) = \begin{cases} \frac{1}{2N} e^{x - \min(X)}, & x < \min(X), \\ \hat{F}(x) - \frac{1}{2N}, & \min(X) \leq x \leq \max(X), \\ \frac{2N - 1}{2N} + \frac{1 - e^{-(x - \max(X))}}{2N}, & x > \max(X), \end{cases}$$

여기서,  $X$ 는 크기  $N$ 인 확률표본이다. 확률표본의 크기  $N$ 이 큰 경우에는  $\hat{F}^M(x)$ 에서  $\hat{F}(x)$  대신 단순히  $\text{ecdf}(X)(x)$ 를 사용하면 계산시간을 줄일 수 있다.



그 다음 접하는 문제는 부구간의 수  $m$ 이다. 관리통계량의 시작 값은 적용 여부에 따라 0이 아닌 값도 사용할 수 있지만 일반적으로 0을 가정한다. 따라서 시작값 0을 중심값으로 하는 부구간을 정의하기 위해 부구간의 수  $m$ 은 홀수로 사용한다. 구간의 수가  $m$ 인 평균런길이를  $ARL(m)$ 이라 하면 논리적으로

$$\lim_{m \rightarrow \infty} ARL(m) = E(T)$$

이 됨을 알 수 있다. 문제는 얼마나 큰  $m$ 을 사용해야 정확도가 신뢰할 만한 값을 계산하느냐이다.

일반적으로 평균런길이는  $m$ 이 커지면서 빠르게 한 값으로 수렴하는 모양을 보이게 된다. 따라서 최적의  $m$ 값( $m^*$ )은 절대적 기준보다 아래와 같이 상대적 중지조건(stopping criterion)을 제시하여 사용하는 것을 추천한다.

$$m^* = \min_m \{ |ARL(m) - ARL(m-1)| < \varepsilon \},$$

여기서,  $\varepsilon$ 은 공차한계(tolerance)이다. 공차한계  $\varepsilon$ 은 구하고자 하는 값의 정확성에 따라 선택할 수 있으며, 원하는 정확성의범위 내에서 결정하면 된다.

## 5. 모의실험과의 비교

제 2.3절에서 설명한 Markov 연쇄를 사용한 평균런길이의 계산 방법에 대해 정확도를 비교하기 위해 모의실험을 통해서도 평균런길이를 계산하였다. 제 1절의 Weibull 분포의 척도모수의 변화를 탐지하는 지수가중이동평균 관리도에서 평균런길이를 계산할 때에 모의실험과 Markov 연쇄를 사용한 방법의 비교를 위해 다음과 같은 모수들을 설정하였다.

$$n = 5, \quad k = 2.5, \quad \sigma = 1, \quad \delta = 0, 0.5, 1, 2, 3, 5 \quad \left( \text{단위: } \frac{\pi\sigma}{\sqrt{6n}} \right).$$

또한 관리상태일 때 SEV 분포의 평균을 0이 되도록  $\xi_0 = \gamma\sigma$ 로 하였다. 이때  $\bar{X}$ 의 표준편차는  $\pi\sigma/\sqrt{6n}$ 이다. Weibull 분포의 척도모수의 변화에 따른 SEV 분포의 위치모수는 표준오차의 배수로 아래와 같이 표현하였다.

$$\xi = \xi_0 + \delta \left( \frac{\pi\sigma}{\sqrt{6n}} \right).$$

확률밀도함수를 추정하기 위해  $N = 10,000,000$ 개의 Weibull 확률변수값을 추출하였고 로그변환을 통해 SEV 분포의 난수로 사용하였다. Figure 5.1를 보면 전이상태의 개수  $m$ 이 커지면서 평균런길이가 빠르게 수렴하는 과정을 볼 수 있다. 이를 감안하여 행렬  $C^M$ 의 차수는  $m = 151$ 을 사용하였다. Table 5.1에서는 Markov 연쇄를 사용한 평균런길이의 계산이 신뢰할 만한 값으로 계산되는 가를 보기 위해 모의실험을 통한 평균런길이와 근사적 95% 신뢰구간을 비교하였다. 표에 의하면 Markov 연쇄에 의한 평균런길이가 모의실험의 평균런길이의 95% 신뢰구간에 잘 포함되어 계산 결과를 신뢰할 만하다고 하겠다.

## 6. 결론

이 논문에서는 Markov 과정의 최초통과시간에 대한 예로서 지수가중 이동평균 관리도를 들어 평균최초 통과시간인 평균런길이를 계산하는 데 사용될 수 있는 세가지 방법을 소개하고 비교하였다. 저자는 계산의 정확성과 신뢰성을 위해 Markov 연쇄를 통한 근사 방법을 사용하였다. 또한 통계량의 분포함수가

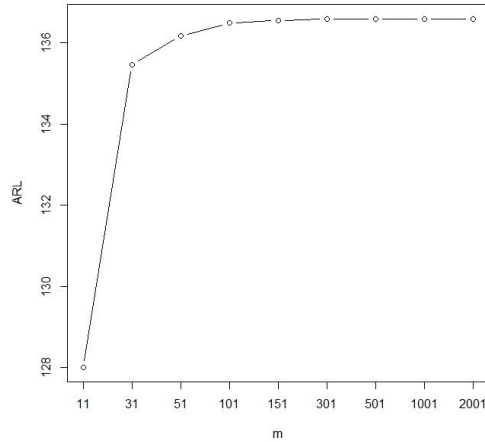


Figure 5.1. Average run length curve according to the number of sub-intervals ( $m$ ).

Table 5.1. Comparison of the average run lengths by Markov chain and simulation

$\delta$	Markov chain ( $m = 151$ )	Simulation (95% confidence interval)
0	136.729	137.058 (136.230, 137.886)
0.5	23.480	23.471 (23.355, 23.587)
1	7.515	7.518 (7.492, 7.545)
2	3.070	3.072 (3.065, 3.079)
3	2.070	2.069 (2.066, 2.073)
5	1.193	1.193 (1.191, 1.1906)

달한 형태로 표현될 수 없을 때 모의실험을 통해 추정한 다음 Markov 연쇄로의 근사를 통해 계산하는 과정과 그에 따른 문제점 및 대책을 제시하였다.

많은 통계적 확률과정인 Markov 과정을 따르는 사실을 고려하면 경계선내의 구역을 부구간으로 나누어서 이산적 Markov 연쇄로 근사시키는 방법은 여러 분야에서 다양하게 적용될 수 있는 도구로 사용할 수 있다. 이 때 이론적으로는 인지하더라도 실제 계산에서 여러 가지 어려움에 직면하게 되는데 이 논문이 제시한 내용으로 이러한 계산적 문제가 해결될 수 있으리라 판단한다.

이 논문에서 제시한 방법에 의하면 여러 다른 종류의 관리도 형태(예: 누적합 관리도)와 Markov 과정에 대한 특성을 분석하는데 도움이 되리라 판단한다.

## References

- Chang, T. C. and Gan, F. F. (1994). Optimal designs of one-sided EWMA charts for monitoring a process variance, *Journal of statistical Computation and Simulation*, **49**, 33–48.
- Chang, T. C., Han, B., and Pascual, F. (2015). Monitoring the Weibull shape parameter with type II censored data, *Quality and Reliability Engineering International*, **31**, 741–760.
- Chang, T. C. and Rigdon, S. E. (1991). A comparison of the Markov chain and the integral equation approaches for evaluating the run length distribution of quality control charts, *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **20**, 191–204.
- Crowder, S. V. (1987a). A simple method for studying run-length distributions of exponentially weighted moving average charts, *Technometrics*, **29**, 401–407.

- Crowder, S. V. (1987b). Average run length of exponentially weighted moving average charts, *Journal of Quality Technology*, **19**, 161–164.
- Crowder, S. V. and Hamilton, M. D. (1992). An EWMA for monitoring a process standard deviation, *Journal of Quality Technology*, **24**, 12–21.
- Gan, F. F. (1993). Exponentially weighted moving average control charts with reflecting boundaries, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **46**, 45–67.
- Gan, F. F. (1995). Joint monitoring of process mean and variance using exponentially weighted moving average control charts, *Technometrics*, **37**, 446–453.
- Gan, F. F. (1998). Designs of one- and two-sided exponential EWMA charts, *Journal of Quality Technology*, **30**, 55–69.
- Gan, F. F. and Chang, T. C. (2000). Computing average run lengths of exponential EWMA charts, *Journal of Quality Technology*, **32**, 183–187.
- Gianino, A. B., Champ, C. W., and Rigdon, S. E. (1990). Solving integral equations by the collocation method. In *ASA Proceedings of the Statistical Computing Section* (pp. 101–102), American Statistical Association, Washington.
- Hunter, J. S. (1986). The exponentially weighted moving average, *Journal of Quality Technology*, **18**, 203–210.
- Knuth, S. (2003). EWMA schemes with non-homogeneous transition kernels, *Sequential Analysis*, **22**, 241–255.
- Knuth, S. (2004). Fast initial response features for EWMA control charts, *Statistical Papers*, **46**, 47–64.
- Knuth, S. (2005). Accurate ARL computation for EWMA-S2 control charts, *Statistics and Computing*, **15**, 341–352.
- Knuth, S. (2007). Accurate ARL calculation for EWMA control charts monitoring simultaneously normal mean and variance, *Sequential Analysis*, **26**, 251–264.
- Lucas, J. M. and Saccucci, M. S. (1990). Exponentially weighted moving average control schemes: properties and enhancements, *Technometrics*, **32**, 1–12.
- MacGregor, J. F. and Harris, T. J. (1993). The exponentially weighted moving variance, *Journal of Quality Technology*, **25**, 106–118.
- Nichols, M. D. and Padgett, W. J. (2005). A bootstrap control chart for Weibull percentiles, *Quality and Reliability Engineering International*, **22**, 141–151.
- Park, C. (2007). An algorithm for the properties of the integrated process control with bounded adjustments and EWMA monitoring, *International Journal of Production Research*, **45**, 5571–5587.
- Park, C., Lee, J., and Kim, Y. (2004). Economic design of a variable sampling rate EWMA chart, *IIE Transactions*, **36**, 387–399.
- Park, C. and Reynolds, M. R. (1999). Economic design of a variable sampling rates  $X$  chart, *Journal of Quality Technology*, **31**, 363–443.
- Park, C. and Reynolds, M. R. (2008). Economic design of an integrated process control procedure with repeated adjustments and EWMA monitoring, *Journal of the Korean Statistical Society*, **37**, 155–174.
- Park, C. S. and Won, T. Y. (1996). Selection of the economically optimal parameters in the EWMA control chart, *Korean Journal of Applied Statistics*, **9**, 91–109.
- Pascual, F. (2010). EWMA charts for the Weibull shape parameter, *Journal of Quality Technology*, **42**, 400–416.
- Ramalhoto, M. F. and Morais, M. (1999). Shewhart control charts for the scale parameter of a Weibull control variable with fixed and variable sampling intervals, *Journal of Applied Statistics*, **26**, 129–160.
- Waldmann, K. H. (1986). Bounds for the distribution of the run length of geometric moving average charts, *Applied Statistics*, **35**, 151–158.

# Markov 과정의 최초통과시간을 이용한 지수가중 이동평균 관리도의 평균런길이의 계산

박창순<sup>a,1</sup>

<sup>a</sup>중앙대학교 응용통계학과

(2016년 10월 12일 접수, 2016년 11월 3일 수정, 2016년 11월 3일 채택)

---

## 요약

많은 확률과정이 Markov 특성을 만족하거나 근사적으로 만족하는 것으로 가정된다. Markov 과정에서 특히 관심을 끄는 것은 최초통과시간이다. 최초통과시간에 대한 연구는 Wald의 측차분석에서 시작하여 근사적 특성에 대한 많은 연구가 되어왔고 컴퓨터의 발달로 통계계산적 방법이 사용되면서 근사적 결과가 참값에 가까운 값을 계산할 수 있게 되었다. 이 논문은 Markov 과정의 예로서 지수가중 이동평균 관리도를 사용할 때 평균런길이를 계산하는 과정과 계산상의 주의점, 문제점 등을 연구하였다. 이 결과는 다른 모든 Markov 과정에 적용될 수 있으며 특히 Markov 연쇄로의 근사는 확률과정의 특성의 연구에 유용하고 계산적 접근을 용이하게 한다.

주요용어: Markov 과정, 최초통과시간, 평균런길이, 적분방정식, 전이행렬, Weibull 분포

---

---

이 논문은 2015년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구사업임(No. 2015R1D1A1A01058196).

<sup>1</sup>(06974) 서울특별시 동작구 흑석로 84, 중앙대학교 응용통계학과. E-mail: cspark@cau.ac.kr